Aufgaben mit ln-Funktionen, bayerisches Abitur

1. $f(x) = 2 - \ln(x-1)$
2. $f(x) = 2 \cdot \big((\ln x)^2 - 1\big)$
3. $h(x) = 3x \cdot (-1 + \ln x)$
4. $f(x) = \ln(4+x) - \ln(4-x)$
5. $f(x) = \frac{x}{2}[1 + (\ln x)^2]$
6. Luftdruck $f_{a,b}(x) = -a\ln(bx)$, $p(x) = 1013 \cdot e^{-\frac{x}{8{,}44}}$

↑ ln-Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 - \ln(x-1)$ mit maximalem Definitionsbereich.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs an.

b) Berechnen Sie die Nullstelle von f.

c) Beschreiben Sie, wie der Graph von f schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \to \ln x$ hervorgeht. Erklären Sie damit das Monotonieverhalten des Graphen von f.

d) Zeigen Sie, dass $F(x) = 3x - (x-1) \cdot \ln(x-1)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{D} =]1, \infty[$ eine Stammfunktion von f ist, und bestimmen Sie den Term der Stammfunktion von f, die bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 - \ln(x-1)$ mit maximalem Definitionsbereich.

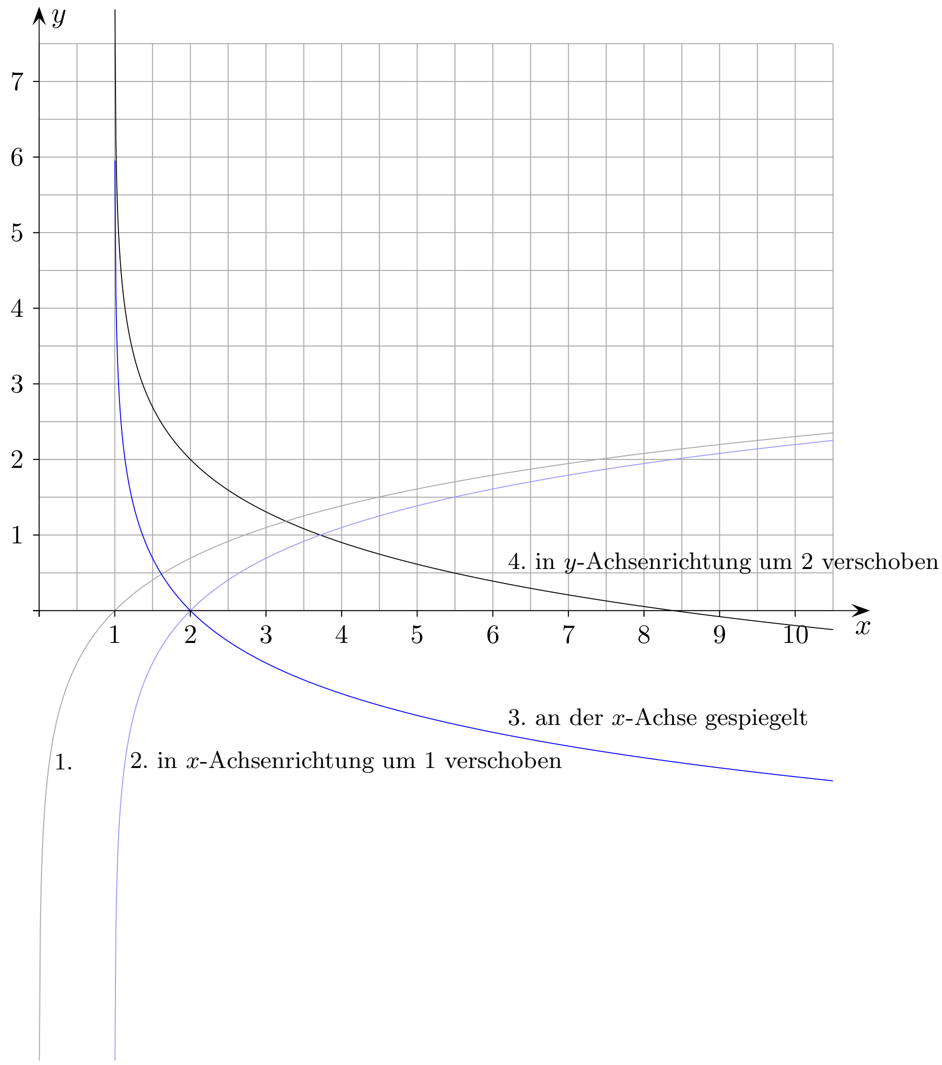
a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs an. $\mathbb{D} =]1, \infty[, \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$

b) Berechnen Sie die Nullstelle von f. $x_N = e^2 + 1$

c) Beschreiben Sie, wie der Graph von f schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \to \ln x$ hervorgeht. Erklären Sie damit das Monotonieverhalten des Graphen von f.

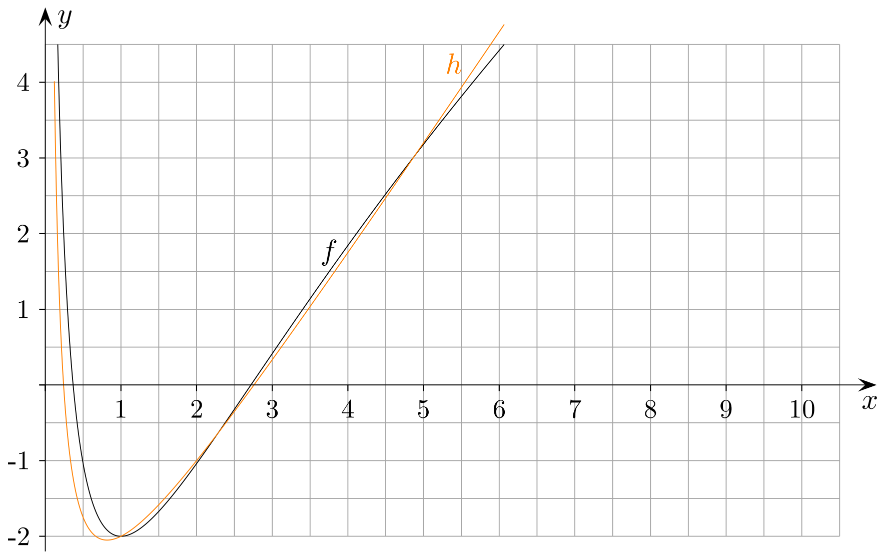
d) Zeigen Sie, dass $F(x) = 3x - (x-1)\cdot\ln(x-1)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{D} =]1, \infty[$ eine Stammfunktion von f ist, und bestimmen Sie den Term der Stammfunktion von f, die bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

$F'(x) = f(x), \ \ldots, \ F(2) + C = 0, \ C = -6$



↑ ln-Funktion

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $f(x) = 2 \cdot \big((\ln x)^2 - 1\big)$, siehe Abbildung.



a) Zeigen Sie, dass $x = e^{-1}$ und $x = e$ die einzigen Nullstellen von f sind, und berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts.

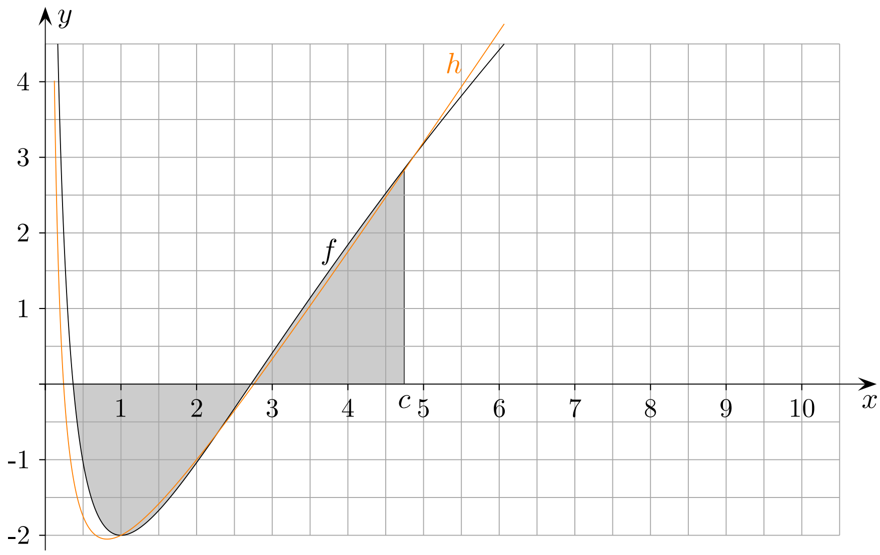
b) Zeigen Sie, dass f genau einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Gleichung der Wendetangente.

c) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der Abbildung, dass es zwei Werte $c \in \,]0;\,6]$ gibt, für die gilt: $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{c} f(x)\,dx = 0$

d) Die gebrochen-rationale Funktion $h(x) = 1{,}5x - 4{,}5 + 1/x$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stellt in einem gewissen Bereich eine gute Näherung für f dar.
Geben Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten des Graphen von h an.

Im IV. Quadranten schließt der Graph von f zusammen mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 2$ ein Flächenstück ein, dessen Inhalt etwa 1,623 beträgt.
Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung von diesem Wert, wenn bei der Berechnung des Flächeninhalts die Funktion h als Näherung für die Funktion f verwendet wird.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $f(x) = 2 \cdot \big((\ln x)^2 - 1\big)$, siehe Abbildung.



a) Zeigen Sie, dass $x = e^{-1}$ und $x = e$ die einzigen Nullstellen von f sind, und berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts. $\ln x = \pm 1$, $f'(x) = \frac{4}{x} \cdot \ln x$, VZW von $-$ nach $+$, $T(1 \mid -2)$

b) Zeigen Sie, dass f genau einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Gleichung der Wendetangente. $f''(x) = \frac{4}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$, VZW, $W(e \mid 0)$, $y = \frac{4}{e}x - 4$

c) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der Abbildung, dass es zwei Werte $c \in \,]0;\, 6]$ gibt,

für die gilt: $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{c} f(x)\, dx = 0$ $c \approx 4{,}7$ und $c = e^{-1}$ (trivial)

d) Die gebrochen-rationale Funktion $h(x) = 1{,}5x - 4{,}5 + 1/x$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stellt in einem gewissen Bereich eine gute Näherung für f dar.
Geben Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten des Graphen von h an. $x = 0$ (y-Achse)
$y = 1{,}5x - 4{,}5$

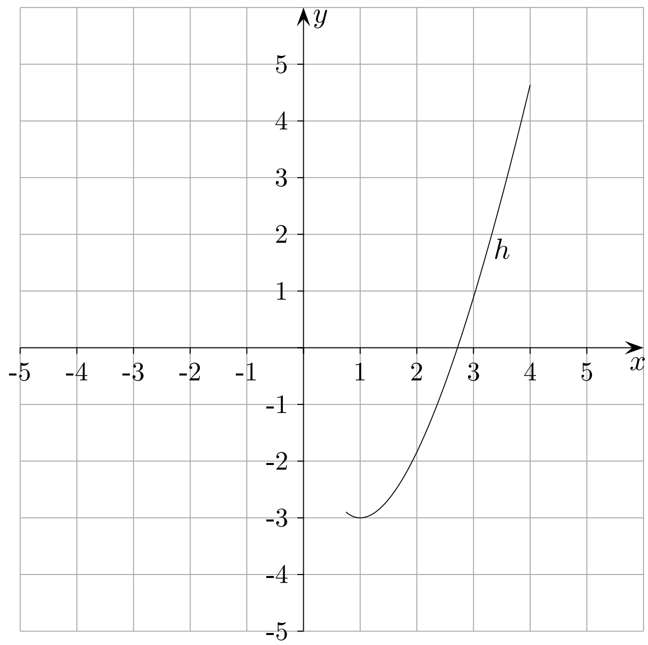
Im IV. Quadranten schließt der Graph von f zusammen mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 2$ ein Flächenstück ein, dessen Inhalt etwa 1,623 beträgt.
Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung von diesem Wert, wenn bei der Berechnung des Flächeninhalts die Funktion h als Näherung für die Funktion f verwendet wird.

$$A = \left|\int_1^2 h(x)\, dx\right| = |\ln 2 - 2{,}25|$$

prozentuale Abweichung $\approx 4{,}1\,\%$

↑ ln-Funktion

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h(x) = 3x \cdot (-1 + \ln x)$.
Die Abbildung zeigt den Graphen von h im Bereich $0{,}75 \leq x \leq 4$.



a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $(e\,|\,0)$ und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von h. Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to \infty$ an und begründen Sie, dass $[-3; \infty[$ die Wertemenge von h ist.

c) Geben Sie für die Funktion h und deren Ableitungsfunktion h' jeweils das Verhalten für $x \to 0$ an und zeichnen Sie den Graphen von h im Bereich $0 < x < 0{,}75$ in die Abbildung ein.

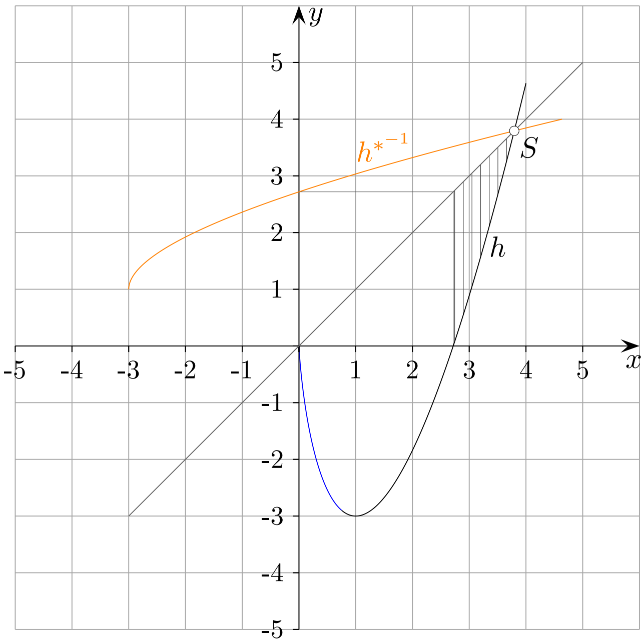
Die Funktion $h^* = h(x)$ mit Definitionsmenge $[1; \infty[$ unterscheidet sich von der Funktion h nur hinsichtlich der Definitionsmenge. Im Gegensatz zu h ist die Funktion h^* umkehrbar.

d) Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von h^* an. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S des Graphen von h^* und der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

e) Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von h^* unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere der Lage von Punkt S, in die Abbildung ein.

f) Schraffieren Sie in der Abbildung ein Flächenstück, dessen Inhalt A_0 dem Wert des Integrals $\int_e^{x_s} (x - h^*(x))\,dx$ entspricht, wobei x_S die x-Koordinate von Punkt S ist. Der Graph von h^*, der Graph der Umkehrfunktion von h^* sowie die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Geben Sie unter Verwendung von A_0 einen Term zur Berechnung von A an.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h(x) = 3x \cdot (-1 + \ln x)$.
Die Abbildung zeigt den Graphen von h im Bereich $0{,}75 \leq x \leq 4$.



a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $(e\,|\,0)$ und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet. $y = 3(x - e), \quad \alpha = \tan^{-1}(3) \approx 71{,}6°$

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von h. Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to \infty$ an und begründen Sie, dass $[-3;\, \infty[$ die Wertemenge von h ist. $h'(x) = 3\ln x, \quad h'(x) < 0$ für $c \in\,]0;\, 1[$
$h'(x) > 0$ für $x > 1$

c) Geben Sie für die Funktion h und deren Ableitungsfunktion h' jeweils das Verhalten für $x \to 0$ an und zeichnen Sie den Graphen von h im Bereich $0 < x < 0{,}75$ in die Abbildung ein.

Die Funktion $h^* = h(x)$ mit Definitionsmenge $[1;\, \infty[$ unterscheidet sich von der Funktion h nur hinsichtlich der Definitionsmenge. Im Gegensatz zu h ist die Funktion h^* umkehrbar.

d) Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von h^* an. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S des Graphen von h^* und der Geraden mit der Gleichung $y = x$.
$S\big(e^{4/3}\,|\,e^{4/3}\big)$

e) Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von h^* unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere der Lage von Punkt S, in die Abbildung ein.

f) Schraffieren Sie in der Abbildung ein Flächenstück, dessen Inhalt A_0 dem Wert des Integrals $\displaystyle\int_e^{x_s} (x - h^*(x))\,dx$ entspricht, wobei x_S die x-Koordinate von Punkt S ist. Der Graph von h^*, der Graph der Umkehrfunktion von h^* sowie die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Geben Sie unter Verwendung von A_0 einen Term zur Berechnung von A an. $A = e^2 + 2A_0$

↑ ln-Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(4+x) - \ln(4-x)$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f =]-4;4[$.
G_f bezeichnet den Graphen von f.

1. a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

   b) Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft.

   c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.
   Weisen Sie nach, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt und berechnen Sie dessen Koordinaten.

   d) Berechnen Sie $f(-3)$, $f(-2)$ und $f'(0)$. Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von f in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).

   e) Begründen Sie, dass die Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1} mit $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ besitzt, und bestimmen Sie den Funktionsterm von f^{-1}. Zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d.

2. Gegeben ist außerdem die Funktion $g(x) = \ln(4+x)$ mit $\mathbb{D}_g =]-4;4[$.
   Der Graph von g wird mit G_f bezeichnet.

   a) Zeigen Sie, dass G_f und G_g genau einen gemeinsamen Punkt $S(x_S \mid y_S)$ haben, und bestimmen Sie dessen Koordinaten.

   b) Zeigen Sie, dass G_f für $x \in]-4;3[$ unterhalb und für $x \in]3;4[$ oberhalb von G_g verläuft.

   c) Beweisen Sie, dass $K(x) = -x - (4-x) \cdot \ln(4-x)$ mit $\mathbb{D}_K =]-4;4[$ eine Stammfunktion von $g - f$ ist, und berechnen Sie $J_1 = \int\limits_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx$ auf zwei Dezimalen genau.

   d) Begründen Sie, für welchen Wert $t \in]-4;4[$ das Integral $J_t = \int\limits_0^t [g(x) - f(x)]\, dx$ den größten Wert annimmt.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(4+x) - \ln(4-x)$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f =]-4;4[$.
G_f bezeichnet den Graphen von f.

1. a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. $2x = 0,\ x_N = 0,\ \lim\limits_{x\to -4+} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 4-} f(x) = \infty$

   b) Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft. $f(-x) = -f(x)$

   c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f. $f'(x) = \dfrac{8}{16-x^2} > 0,\ f$ monoton wachsend
   Weisen Sie nach, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt und berechnen Sie dessen Koordinaten. $f''(x) = \dfrac{16x}{(16-x^2)^2},\ x_W = 0,\ \text{VZW},\ W(0\,|\,0)$

   d) Berechnen Sie $f(-3)$, $f(-2)$ und $f'(0)$. Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von f in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).

   e) Begründen Sie, dass die Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1} mit $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ besitzt, und bestimmen Sie den Funktionsterm von f^{-1}. Zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d. $f^{-1}(x) = \dfrac{4(e^x-1)}{e^x+1}$

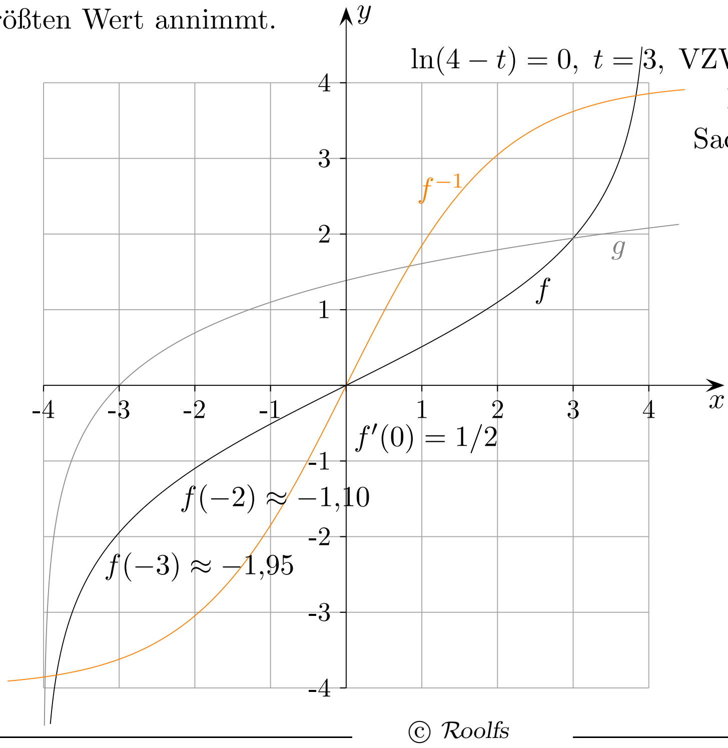
2. Gegeben ist außerdem die Funktion $g(x) = \ln(4+x)$ mit $\mathbb{D}_g =]-4;4[$.
   Der Graph von g wird mit G_f bezeichnet.

   a) Zeigen Sie, dass G_f und G_g genau einen gemeinsamen Punkt $S(x_S\,|\,y_S)$ haben, und bestimmen Sie dessen Koordinaten. $S(3\,|\,\ln 7)$

   b) Zeigen Sie, dass G_f für $x \in]-4;3[$ unterhalb und für $x \in]3;4[$ oberhalb von G_g verläuft. $g(x) > f(x),\ x < 3$

   c) Beweisen Sie, dass $K(x) = -x - (4-x)\cdot\ln(4-x)$ mit $\mathbb{D}_K =]-4;4[$ eine Stammfunktion von $g - f$ ist, und berechnen Sie $J_1 = \displaystyle\int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx$ auf zwei Dezimalen genau. $\approx 1{,}25$

   d) Begründen Sie, für welchen Wert $t \in]-4;4[$ das Integral $J_t = \displaystyle\int_0^t [g(x) - f(x)]\,dx$ den größten Wert annimmt. $J_t' = g(t) - f(t) = 0$
   $\ln(4-t) = 0,\ t = 3$, VZW von $+$ nach $-$, Maximum
   Rechnung nicht erforderlich,
   Sachverhalt ist mit 2b evident.



↑ ln-Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{2}\left[1 + (\ln x)^2\right]$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$.
G_f bezeichnet den Graphen von f.
Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[x (\ln x)^n\right] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt.

   b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

   c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \to 0^+$ und für $x \to +\infty$.
   Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

   d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

2. Berechnen Sie $f(1{,}5)$ sowie $f(4)$ und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).

3. a) Weisen Sie nach, dass $F(x) = \frac{x^2}{8}\left[2(\ln x)^2 - 2\ln x + 3\right]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist.

   b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche $A(u)$, die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$.

4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet. Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1} \,|\, e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{2}\left[1 + (\ln x)^2\right]$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$.
G_f bezeichnet den Graphen von f.
Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0^+}\left[x\,(\ln x)^n\right] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt. $f'(x) \geq 0,\ f$ monoton steigend

   b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten. $f''(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$
   $0 < x < e^{-1}$ konvex gekrümmt $(f'' < 0)$, $x > e^{-1}$ konkav, $W\big(e^{-1} \,|\, e^{-1}\big)$, $f'(x_w) = 0$, VZW f''

   c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \to 0^+$ und für $x \to +\infty$.
   Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.
   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \infty,\ W_f = \mathbb{R}^+$

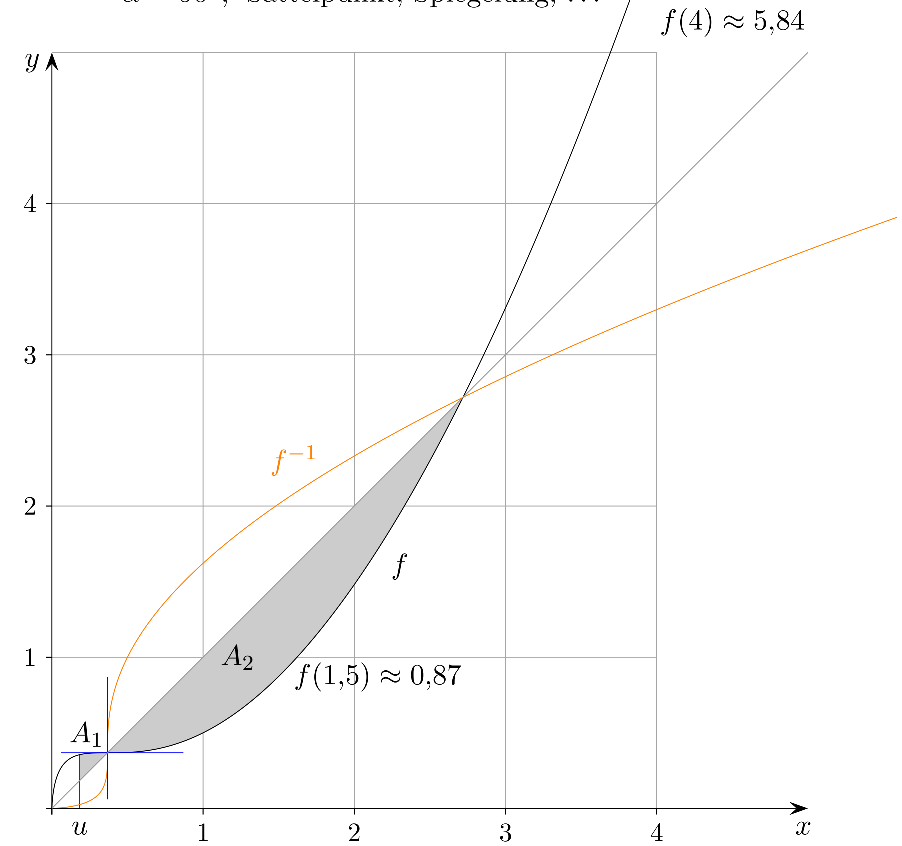
   d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten. $f(x) = x,\ \ln x = \pm 1,\ S_1(e \,|\, e),\ S_2\big(e^{-1} \,|\, e^{-1}\big)$, y-Koordinaten evident

2. Berechnen Sie $f(1{,}5)$ sowie $f(4)$ und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).

3. a) Weisen Sie nach, dass $F(x) = \frac{x^2}{8}\left[2(\ln x)^2 - 2\ln x + 3\right]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist. $F'(x) = f(x),\ \ldots$

   b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche $A(u)$, die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u\to 0} A(u)$.
   $A(u) = A_1 + A_2,\ A(u) = \frac{1}{8}e^2 + \frac{3}{4}e^{-2} + \frac{u^2}{8} + \frac{1}{4}u^2[\ln u - (\ln u)^2],\ \lim\limits_{u\to 0} A(u) = \frac{1}{8}e^2 + \frac{3}{4}e^{-2}$

4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet. Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1} | e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich. $\alpha = 90°$, Sattelpunkt, Spiegelung, …



↑ Luftdruck   Bayern 2019

1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_{a,b}(x) = -a\ln(bx)$ mit $a > 0,\ b > 0$ und maximaler Definitionsmenge $D_{a,b}$. Der Graph von $f_{a,b}$ wird mit $G_{a,b}$ bezeichnet.

   a) Geben Sie $D_{a,b}$ und das Verhalten von $f_{a,b}$ für $x \to +\infty$ an.

   b) Geben Sie die Wertemenge von $f_{a,b}$ an und begründen Sie, dass der Graph von $f_{a,b}$ streng monoton fällt.

   c) Die Gerade mit der Gleichung $x = \frac{1}{2b}$, der Graph von $f_{a,b}$ und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück. Die Tangente an $G_{a,b}$ durch den Schnittpunkt von $G_{a,b}$ mit der x-Achse teilt dieses Flächenstück in zwei Teilflächen. Weisen Sie nach, dass das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Teilflächen unabhängig von a und b ist.

   d) Für einen bestimmten Wert von a und einen bestimmten Wert von b hat der zugehörige Graph $G_{a,b}$ im Punkt $(1 \mid 1)$ die Steigung -1. Bestimmen Sie diese Werte.

2. Die Funktion der Schar $f_{a,b}$ aus Aufgabe 1 mit $a = 1$ und $b = \frac{1}{e}$ wird mit f bezeichnet. Der Funktionsterm von f lautet somit $f(x) = -\ln\left(\frac{x}{e}\right)$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

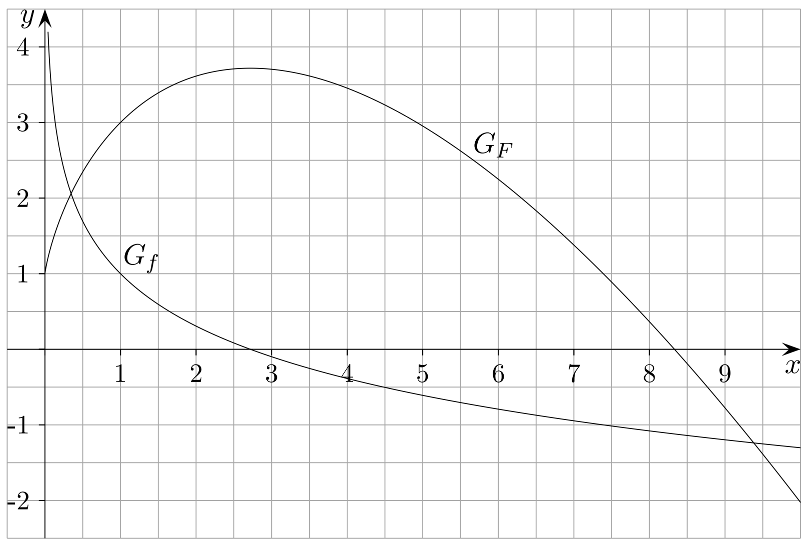


Abb. 1

   a) Beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \to \ln x$ hervorgeht.

   b) Begründen Sie ausschließlich anhand des Graphen von f, dass der Graph jeder Stammfunktion von f einen Hochpunkt hat.

   Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $F(x) = 2x - x\ln x + 1$.

   c) Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen G_F von F und zeichnen Sie G_F in Abbildung 1 ein.

   d) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $H_c(x) = F(x) + c$ und $x > 0$ eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Intervall maximaler Länge für den Wert des Parameters c an, sodass H_c genau zwei Nullstellen hat.

3. Die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $p(x) = 1013 \cdot e^{-\frac{x}{8,44}}$ beschreibt modellhaft die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe. Dabei bezeichnen $p(x)$ den Luftdruck in Hektopascal (hPa) und x die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern (km) (im Weiteren kurz als Höhe bezeichnet).

   a) Begründen Sie, dass die Funktion p umkehrbar ist, und geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von p an.

   Für die Umkehrfunktion h von p gilt $h(x) = -8,44 \cdot \ln\left(\frac{x}{1013}\right)$.
   Der Funktionsterm $h(x)$ entspricht somit dem der Funktion $f_{a,b}$ der Schar von Aufgabe 1 mit den Parameterwerten $a = 8,44$ und $b = \frac{1}{1013}$.
   Abbildung 2 zeigt den Graphen von h für $250 \leq x \leq 1013$.

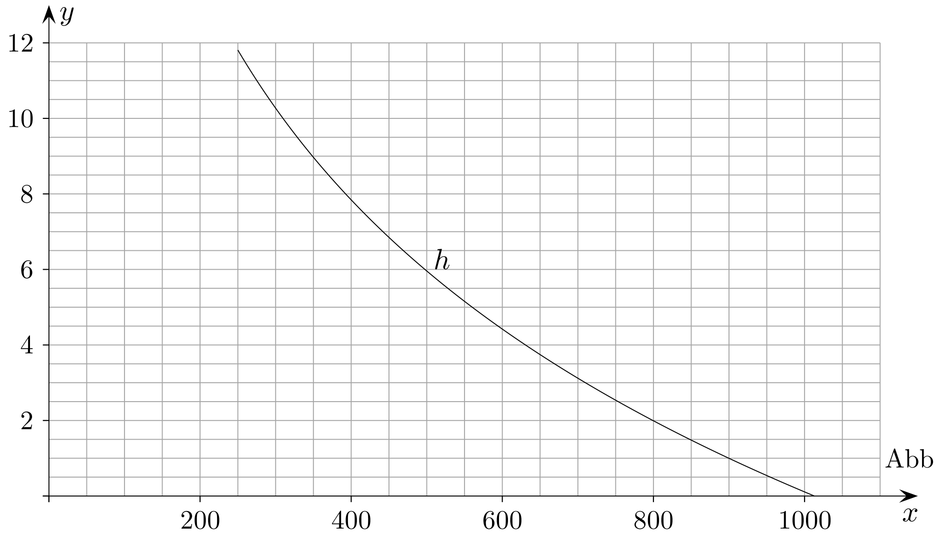


Abb. 2

   b) Geben Sie die Nullstelle von h und deren Bedeutung im Sachzusammenhang an.

   c) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von h im Intervall $[550; 950]$ und veranschaulichen Sie diese Änderungsrate in Abbildung 2. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser mittleren Änderungsrate im Sachzusammenhang.

   d) Bei einer alternativen Modellierung wird die Funktion h durch die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $\tilde{h}$ ersetzt. Beschreiben Sie schrittweise, wie man die maximale Differenz der Funktionswerte $\tilde{h}(x)$ und $h(x)$ im Bereich $250 \leq x \leq 1013$ bestimmen kann.

↑ Luftdruck

1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_{a,b}(x) = -a\ln(bx)$ mit $a > 0,\ b > 0$ und maximaler Definitionsmenge $D_{a,b}$. Der Graph von $f_{a,b}$ wird mit $G_{a,b}$ bezeichnet.

   a) Geben Sie $D_{a,b}$ und das Verhalten von $f_{a,b}$ für $x \to +\infty$ an. $D_{a,b} = \mathbb{R}^+,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_{a,b} = -\infty$

   b) Geben Sie die Wertemenge von $f_{a,b}$ an und begründen Sie, dass der Graph von $f_{a,b}$ streng monoton fällt. $W = \mathbb{R},\ f'_{a,b}(x) = -\frac{a}{x} < 0$

   c) Die Gerade mit der Gleichung $x = \frac{1}{2b}$, der Graph von $f_{a,b}$ und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück. Die Tangente an $G_{a,b}$ durch den Schnittpunkt von $G_{a,b}$ mit der x-Achse teilt dieses Flächenstück in zwei Teilflächen. Weisen Sie nach, dass das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Teilflächen unabhängig von a und b ist. $y = -abx + a,\ x_N = 1/b$
   $A_1/A_2 = 3 - 4\ln 2$

   d) Für einen bestimmten Wert von a und einen bestimmten Wert von b hat der zugehörige Graph $G_{a,b}$ im Punkt $(1 \mid 1)$ die Steigung -1. Bestimmen Sie diese Werte. $a = 1,\ b = e^{-1}$

2. Die Funktion der Schar $f_{a,b}$ aus Aufgabe 1 mit $a = 1$ und $b = \frac{1}{e}$ wird mit f bezeichnet. Der Funktionsterm von f lautet somit $f(x) = -\ln\left(\frac{x}{e}\right)$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

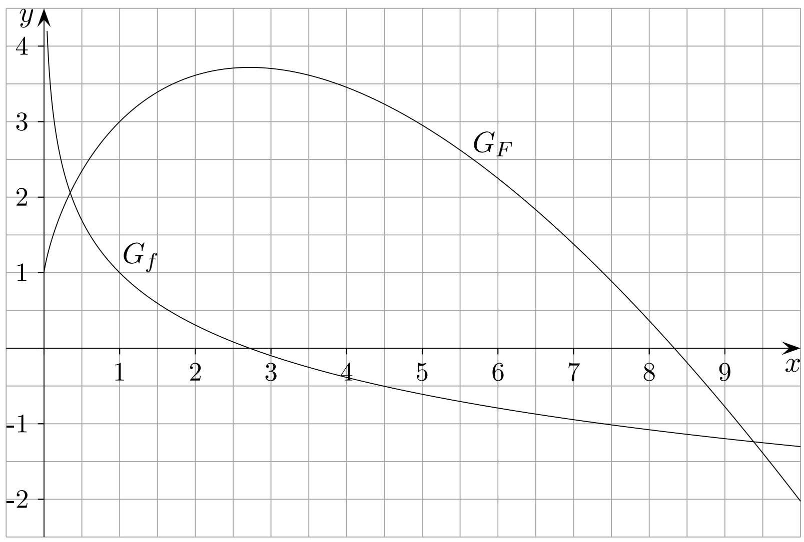


Abb. 1

   a) Beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \to \ln x$ hervorgeht. $f(x) = -\ln\left(\frac{x}{e}\right) = -\ln x + 1$, Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um 1 in y-Achsenrichtung

   b) Begründen Sie ausschließlich anhand des Graphen von f, dass der Graph jeder Stammfunktion von f einen Hochpunkt hat. VZW an der Stelle $x = e$ von + nach −

   Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $F(x) = 2x - x\ln x + 1$.

   c) Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen G_F von F und zeichnen Sie G_F in Abbildung 1 ein. $H(e \mid e+1)$

   d) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $H_c(x) = F(x) + c$ und $x > 0$ eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Intervall maximaler Länge für den Wert des Parameters c an, sodass H_c genau zwei Nullstellen hat. $]-e-1; -1[$

3. Die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $p(x) = 1013 \cdot e^{-\frac{x}{8{,}44}}$ beschreibt modellhaft die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe. Dabei bezeichnen $p(x)$ den Luftdruck in Hektopascal (hPa) und x die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern (km) (im Weiteren kurz als Höhe bezeichnet).

   a) Begründen Sie, dass die Funktion p umkehrbar ist, und geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von p an.

   Graph von p streng monoton fallend, $p'(x) < 0$, $D_h = \mathbb{R}^+$, $W_h = \mathbb{R}$

Für die Umkehrfunktion h von p gilt $h(x) = -8{,}44 \cdot \ln\left(\frac{x}{1013}\right)$.

Der Funktionsterm $h(x)$ entspricht somit dem der Funktion $f_{a,b}$ der Schar von Aufgabe 1 mit den Parameterwerten $a = 8{,}44$ und $b = \frac{1}{1013}$.

Abbildung 2 zeigt den Graphen von h für $250 \leq x \leq 1013$.

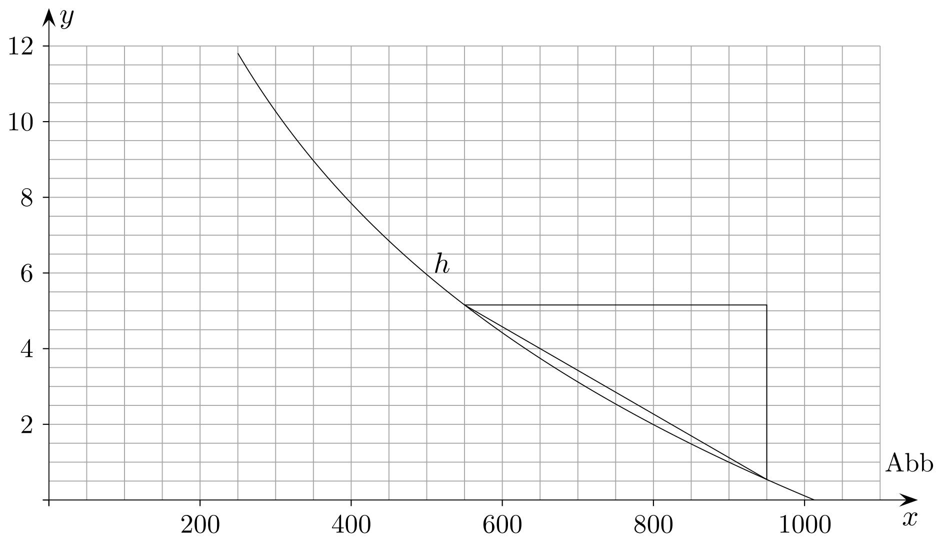


Abb. 2

   b) Geben Sie die Nullstelle von h und deren Bedeutung im Sachzusammenhang an.

   $x_N = 1013$

   In Höhe des Meeresspiegels beträgt der Luftdruck 1013 hPa.

   c) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von h im Intervall $[550; 950]$ und veranschaulichen Sie diese Änderungsrate in Abbildung 2. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser mittleren Änderungsrate im Sachzusammenhang. $m = -0{,}0115$

   Steigt der Luftdruck um 100 hPa an, so verringert sich die Höhe um ca. 1,15 km.

   d) Bei einer alternativen Modellierung wird die Funktion h durch die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $\tilde{h}$ ersetzt. Beschreiben Sie schrittweise, wie man die maximale Differenz der Funktionswerte $\tilde{h}(x)$ und $h(x)$ im Bereich $250 \leq x \leq 1013$ bestimmen kann.

   Maximum von $d(x) = |\tilde{h}(x) - h(x)|$ auf dem Intervall $[250; 1013]$ mit der Differenzialrechnung ermitteln, Randextrema berücksichtigen.