Tangentialebene und Gradient

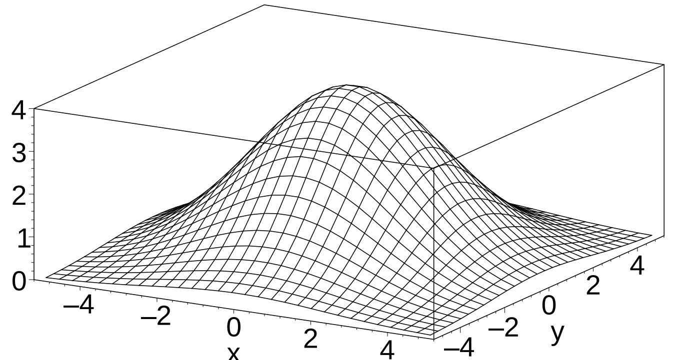

Fig. 1

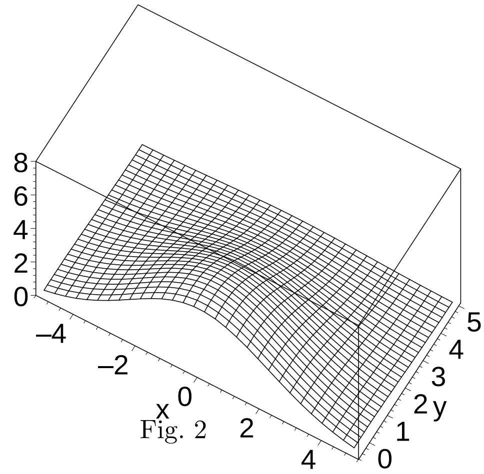

Fig. 2

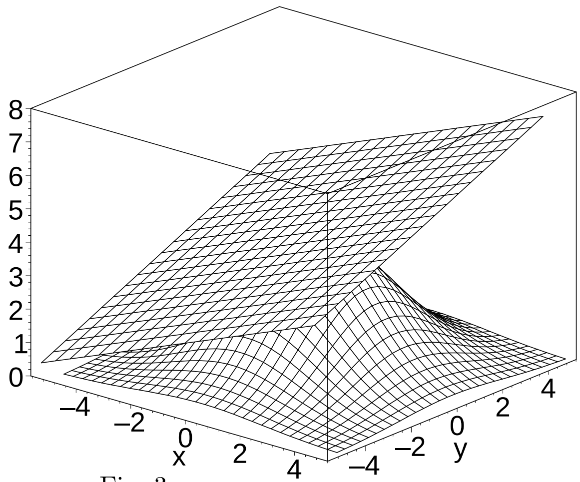

Fig. 3

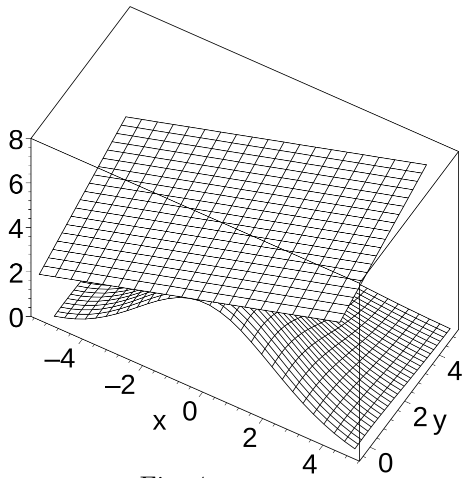

Fig. 4

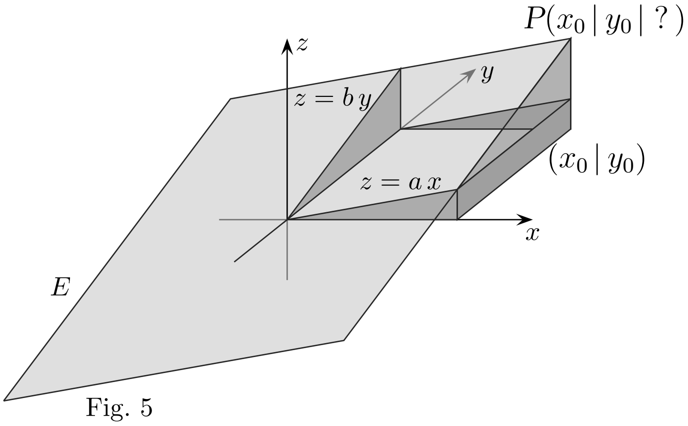

Fig. 5

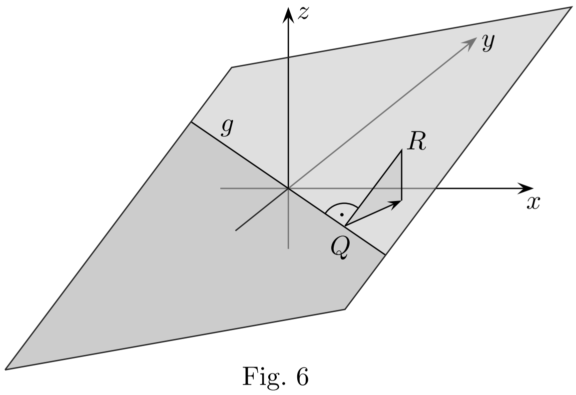

Fig. 6

1. a) Es sind a und b gegeben, wie lautet die Gleichung der Ebene E? (Fig. 5)
   b) Wie lautet die Gleichung der zu E parallelen Ebene, die durch einen bestimmten Punkt $P(x_1\,|\,y_1\,|\,z_1)$ verläuft?
   c) Welche Richtung schlägt eine Kugel ein, die in einem Punkt R losgelassen wird? (Fig. 6)

Tangentialebene und Gradient

2. a) Gesucht ist für die Funktion $f(x, y)$ die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P(x_1 \,|\, y_1 \,|\, ?\,)$.

   b) Welche Richtung schlägt eine Kugel ein, die in einem Punkt $P(x_1 \,|\, y_1 \,|\, z_1)$ auf der Fläche einer Funktion $f(x, y)$ losgelassen wird?

   c) Wie kann der Anstiegswinkel α für beliebige Richtungen in $P(x_1 \,|\, y_1 \,|\, z_1)$ berechnet werden?

   d) Wie lautet für $f(x, y) = 4\,e^{-0,1\,(x^2+y^2)}$ die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P(-0,5 \,|\, -0,5 \,|\, ?\,)$ und wie groß ist der maximale Anstiegswinkel in P?

Tangentialebene und Gradient

Lösungen:

1. a) P hat die z-Koordinate $z_0 = ax_0 + by_0$, daher gilt allgemein: $z = ax + by$

   b) Die Verschiebung der Ebene E nach $N(x_1\,|\,y_1\,|\,0)$ ergibt $z = a(x - x_1) + b(y - y_1)$,
   die anschließende Verschiebung nach $P(x_1\,|\,y_1\,|\,z_1)$ ergibt dann: $z = a(x - x_1) + b(y - y_1) + z_1$

   c) Zunächst wird die Gleichung der Schnittgeraden g von E mit der xy-Ebene bestimmt:
   Bedingung: $z = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -\dfrac{a}{b}\,x.$

   Die eingeschlagene Richtung verläuft senkrecht zu g, also $m_1 = \dfrac{b}{a}$ (beachte: $m_1 \cdot m_2 = -1$) oder

   als Vektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (stärkster Anstieg), stärkster Abstieg in Richtung $-\vec{u}$.

2. a) $a = f_x$ und $b = f_y$ mit partiellen Ableitungen an der Stelle $(x_1\,|\,y_1)$, (siehe Fig. 4 und Fig. 5)
   daher $z = f_x(x - x_1) + f_y(y - y_1) + z_1$, mit $z_1 = f(x_1\,|\,y_1)$

   b) Nach 1. c) erhalten wir den stärksten Anstieg für $\vec{u} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ und daher den stärkster Abstieg für $-\vec{u}$. Der Vektor $\vec{u}$ heißt Gradient.

   c) Man betrachte die Ursprungsebene $z = f_x\,x + f_y\,y$,
   für die Funktion $f(x, y)$ gilt: $\Delta z = f_x\,\Delta x + f_y\,\Delta y$.

   Hieraus ist ersichtlich, wie für beliebige Richtungen $\vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ die Änderungsrate für die Tangentialebene exakt und für die Funktion näherungsweise bestimmt werden kann.
   Für den Anstiegswinkel - er liegt in der Ebene, die senkrecht auf der xy-Ebene steht und in der die Richtungsgerade verläuft - gilt: $\alpha = \arctan \dfrac{\Delta z}{|\,\vec{u}\,|}$
   Die Rechnung vereinfacht sich, wenn für $\vec{u}$ ein Einheitsvektor verwendet wird, z.B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$

   d) $z = 0{,}380(x + 0{,}5) + 0{,}380(y + 0{,}5) + 3{,}80$

   Aus $\Delta z = f_x\,\Delta x + f_y\,\Delta y$ folgt für die Richtung des stärksten Anstiegs $\vec{u} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ $\quad \Delta z = f_x^2 + f_y^2$,

   dann gilt: $\alpha = \arctan \dfrac{\Delta z}{|\,\vec{u}\,|} = \arctan \dfrac{f_x^2 + f_y^2}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} = \arctan \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = 28{,}3^\circ$
   $\left(= \arctan \left|\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}\right|\right).$

   Wir erhalten:
   Die Steigung der Richtungsgeraden des stärksten Anstiegs ist der Betrag des Gradienten.