

Wurzelfunktionen Typisches

Ein negativer Radikand (Term unter der Wurzel) ist nicht zugelassen, da sonst mit den Rechenregeln für Potenzen Seltsames entstehen kann:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

1. $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{10-x}$

maximaler Definitionsbereich

$$\mathbb{D} = \{x \mid x \leq 10\} \quad \text{oder} \quad \mathbb{D} =]-\infty; 10]$$

Nullstellen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 10$$

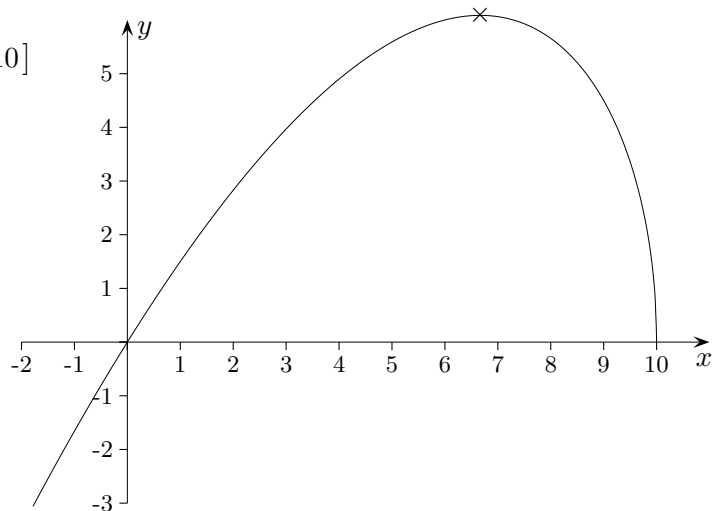
1. Ableitung durch implizites Differenzieren

$$y^2 = \frac{1}{4}x^2(10-x) \quad | \quad ()'$$

$$2yy' = \dots$$

$$\implies f'(x) = \frac{20-3x}{4\sqrt{10-x}}$$

$$\text{Max}\left(\frac{20}{3} \mid 6,09\right)$$



Rotationsvolumen

$$V = \int_a^b Q(x) dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \frac{625}{3}\pi$$

2. Der Graph schließt mit der x -Achse eine Fläche ein. Berechne das zugehörige Rotationsvolumen.

a) $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$

b) $f(x) = (x^2-9)\sqrt{x}$

3. Die Graphen der Funktionen $f(x) = 3\sqrt{x}$ und $g(x) = \sqrt{36-3x}$ begrenzen mit der x -Achse ein Flächenstück.

a) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x -Achse entsteht?

b) Welches Rechteck mit maximalem Inhalt kann diesem Flächenstück eingeschrieben werden?

4. Berechne die Nullstellen und das Extremum der Funktion $f(x) = 3-x+2\sqrt{x}$.

5. Welche Eigenschaft haben ganzrationale Funktionen im Gegensatz zur Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$?

Wurzelfunktionen Lösungen

2. a) $\frac{27}{4}\pi$

b) $\frac{243}{2}\pi$

3. a) 162π

b) $a = 8, b = 3$

4. $x_1 = 1, (x_2 = 9)$

$\text{Max}(1 | 4)$

a) Weise nach: Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{10-x}$ schließt mit der x -Achse an der Stelle $x = 0$ einen Winkel von $57,7^\circ$ ein.

b) $\int \sqrt{x} dx = \dots = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

c) $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \dots = 2 - 2\sqrt{a}$ für $0 < a < 1$

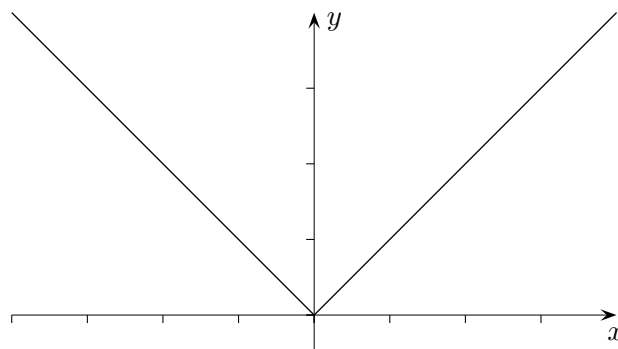
d) $\int \sqrt{2-3x} dx = \dots = -\frac{2}{9}\sqrt{(2-3x)^3} + C$

beachte: $\int f'(ax+b) dx = \frac{1}{a}f(ax+b) + C$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \dots = \arcsin \frac{x}{2} + C$

Differenzierbarkeit

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

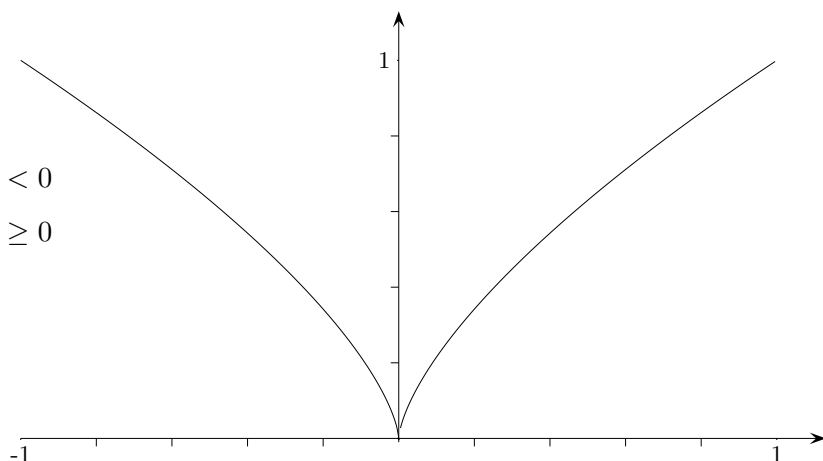


An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion zwar stetig,
jedoch nicht differenzierbar, da links- und rechtsseitige Ableitung nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = |x|^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} (-x)^{\frac{2}{3}} & x < 0 \\ x^{\frac{2}{3}} & x \geq 0 \end{cases}$$



An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion stetig,
jedoch nicht differenzierbar, da die Ableitung an dieser Stelle nicht existiert:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty$$

Sei eine zusammengesetzte Funktion f gegeben und $f_1(a) = f_2(a)$.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < a \\ f_2(x) & x \geq a \end{cases}$$

f ist an der Stelle a differenzierbar, falls $f'_1(a) = f'_2(a)$ ist.

Relationen

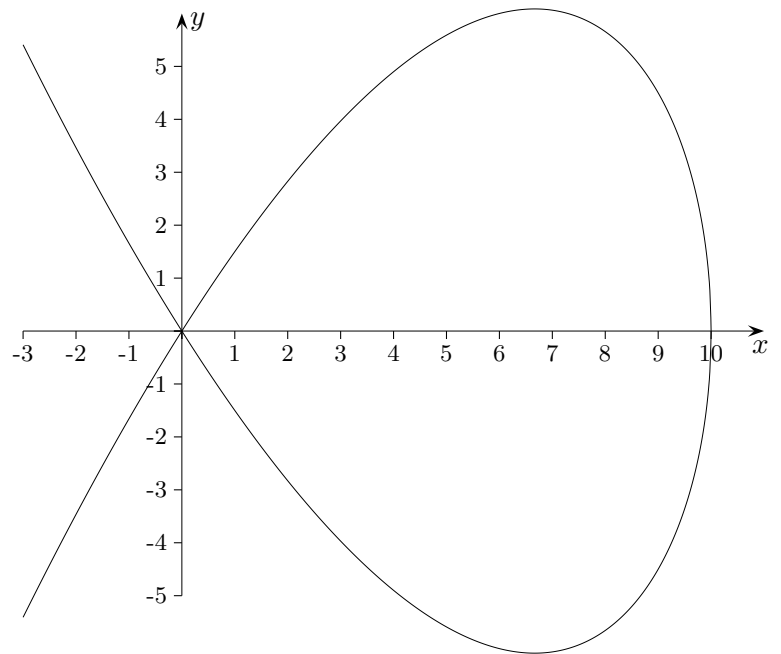
$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{10-x}$$

ist ein Zweig der Relation

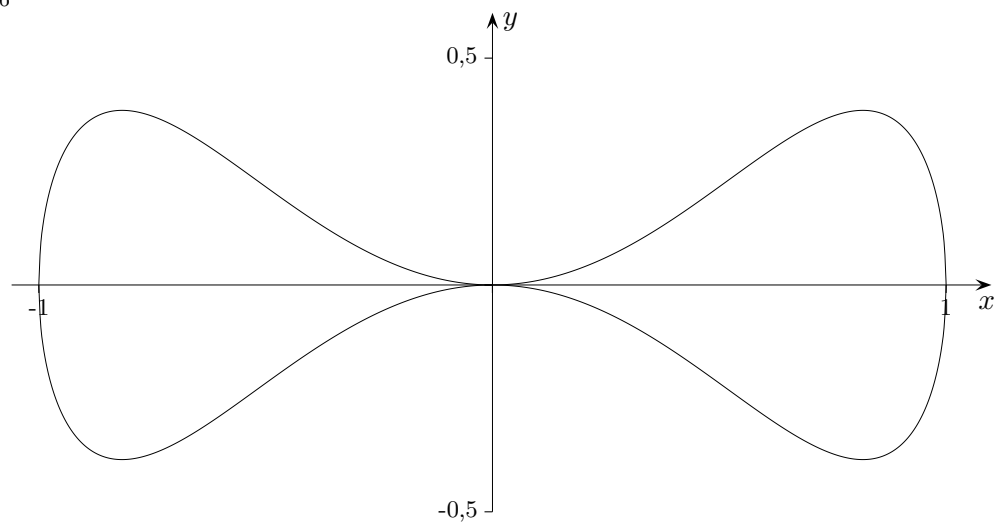
$$y^2 = \frac{1}{4}x^2(10-x),$$

der übrige Zweig lautet

$$g(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{10-x}.$$



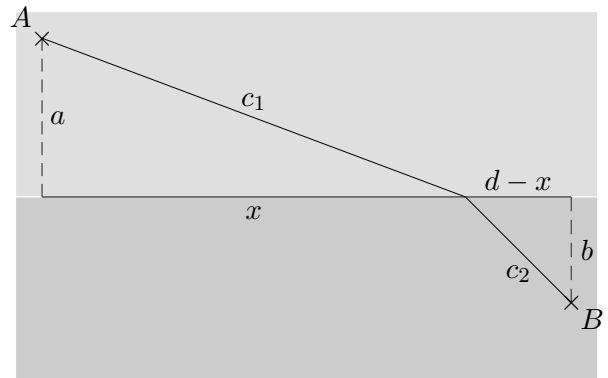
$$y^2 = x^4 - x^6$$



Extremwertprobleme GTR

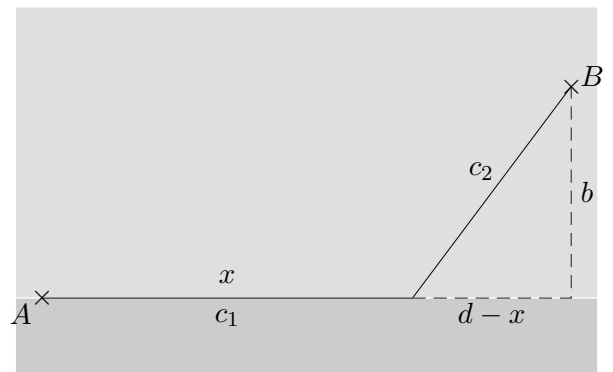
Welcher Weg von A nach B
kann in kürzester Zeit zurückgelegt werden?
Die in den Bereichen möglichen Geschwindigkeiten
sind c_1 und c_2 .

$$\begin{aligned} a &= 3 \quad (\text{in } km) \\ b &= 2 \\ d &= 10 \\ c_1 &= 5 \quad (\text{in } \frac{km}{h}) \\ c_2 &= 3 \end{aligned}$$



Welcher Weg von A nach B
kann in kürzester Zeit zurückgelegt werden?
Die in den Bereichen möglichen Geschwindigkeiten
sind c_1 und c_2 .

$$\begin{aligned} b &= 4 \quad (\text{in } km) \\ d &= 10 \\ c_1 &= 4 \quad (\text{in } \frac{km}{h}) \\ c_2 &= 2 \end{aligned}$$



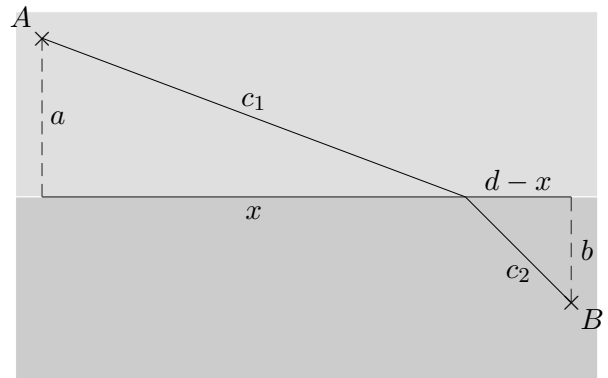
Extremwertprobleme Ergebnisse

Welcher Weg von A nach B
kann in kürzester Zeit zurückgelegt werden?
Die in den Bereichen möglichen Geschwindigkeiten
sind c_1 und c_2 .

$$\begin{aligned} a &= 3 \quad (\text{in } km) \\ b &= 2 \\ d &= 10 \\ c_1 &= 5 \quad (\text{in } \frac{km}{h}) \\ c_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{c_2}$$

$$x_{\min} = 8,62$$

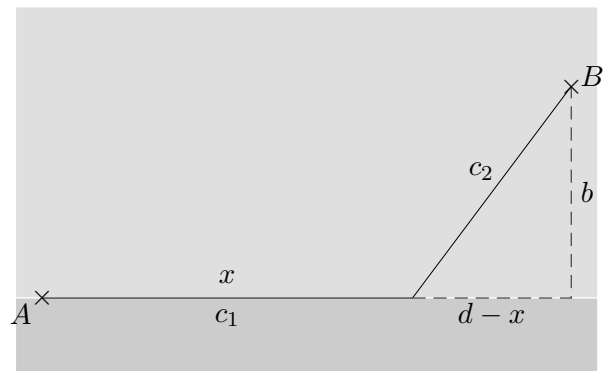


Welcher Weg von A nach B
kann in kürzester Zeit zurückgelegt werden?
Die in den Bereichen möglichen Geschwindigkeiten
sind c_1 und c_2 .

$$\begin{aligned} b &= 4 \quad (\text{in } km) \\ d &= 10 \\ c_1 &= 4 \quad (\text{in } \frac{km}{h}) \\ c_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{c_2}$$

$$x_{\min} = 7,69$$



Aufgaben

1. Bilde die 1. Ableitung Ergebnis auf einen Bruchstrich

a) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2-x}$

b) $f(x) = (x-2) \cdot \sqrt{x}$

2. Integriere Ergebnis in Wurzelschreibweise

a) $\int \sqrt[3]{x} dx$

b) $\int x \cdot \sqrt{x} dx$ Tipp: Vor dem Integrieren ist manchmal eine Umformung nützlich.

3. Der Graph der Funktion $f(x) = (6-x) \cdot \sqrt{x}$ erzeugt bei Rotation um die x -Achse zwischen den Nullstellen einen „Tropfen“. Berechne

a) das Volumen des Tropfens (algebraisch),

b) Schnittfläche des Tropfens, in der die x -Achse liegt (GTR),

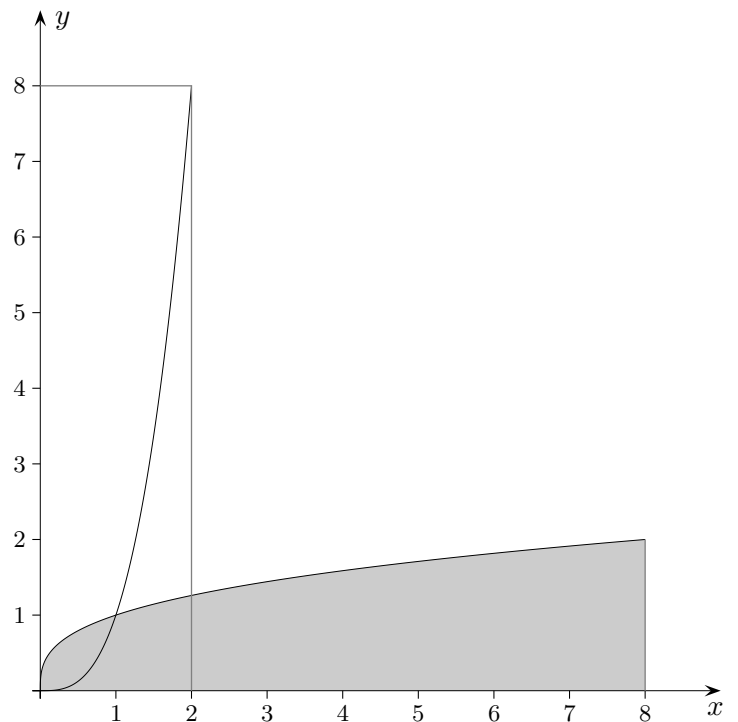
c) die größte ebene Schnittfläche des Tropfens rechtwinklig zur Drehachse (GTR).

4. Ermittle (GTR) den Punkt P auf dem Graphen

der Funktion $f(x) = 2\sqrt{x}$ ($x \geq 0$), der vom Punkt $A(5 | 0)$ den kleinsten Abstand hat.

5. Bestimme $\int_0^a \sqrt[n]{x} dx$ mit einer Umkehrfunktion.

Graphen für $n = 3$ und $a = 8$.



Aufgaben Lösungen

1. Bilde die 1. Ableitung Ergebnis auf einen Bruchstrich

a) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2-x}$

$$f'(x) = \frac{x(8-5x)}{2\sqrt{2-x}}$$

b) $f(x) = (x-2) \cdot \sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$$

2. Integriere Ergebnis in Wurzelschreibweise

a) $\int \sqrt[3]{x} dx$

$$\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$$

b) $\int x \cdot \sqrt{x} dx$ Tipp: Vor dem Integrieren ist manchmal eine Umformung nützlich.

$$\frac{2}{5} \sqrt{x^5} + C$$

3. Der Graph der Funktion $f(x) = (6-x) \cdot \sqrt{x}$ erzeugt bei Rotation um die x -Achse zwischen den Nullstellen einen „Tropfen“. Berechne

a) das Volumen des Tropfens (algebraisch),

$$108 \pi$$

b) Schnittfläche des Tropfens, in der die x -Achse liegt (GTR),

$$47,03$$

c) die größte ebene Schnittfläche des Tropfens rechtwinklig zur Drehachse (GTR).

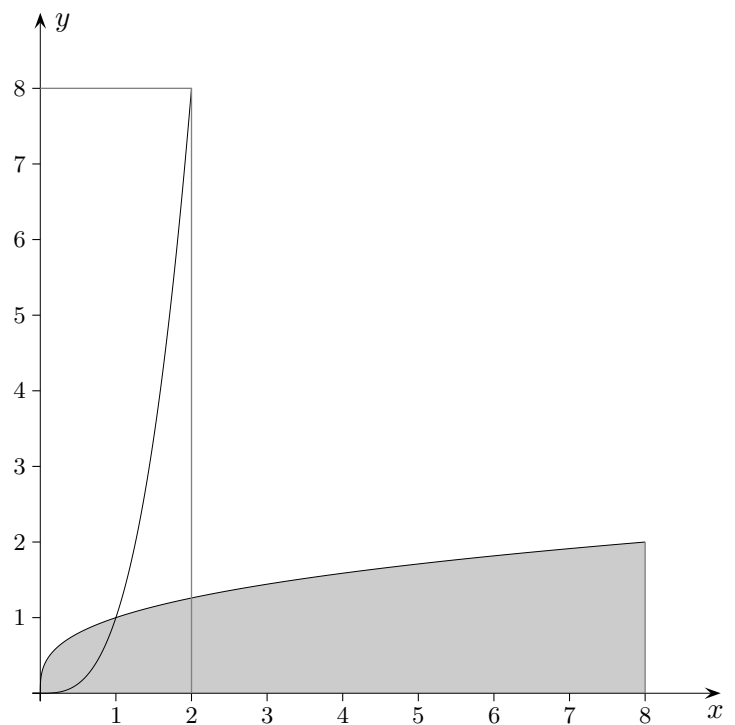
$$32 \pi$$

4. Ermittle (GTR) den Punkt P auf dem Graphen

der Funktion $f(x) = 2\sqrt{x}$ ($x \geq 0$), der vom Punkt $A(5 | 0)$ den kleinsten Abstand hat. $P(3 | 2\sqrt{3})$

5. Bestimme $\int_0^a \sqrt[n]{x} dx$

mit einer Umkehrfunktion.



$$\int_0^a \sqrt[n]{x} dx = a \sqrt[n]{a} - \int_0^{\sqrt[n]{a}} x^n dx = \dots = a \sqrt[n]{a} - \frac{a \sqrt[n]{a}}{n+1} = \frac{na \sqrt[n]{a}}{n+1}$$

Aufgaben

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{x}{2}\sqrt{x+6}$, C sei der Graph von f .
- Bestimme den maximalen Definitionsbereich von f , die Nullstellen und das Extremum.
 - $P(u | v)$ sei ein Punkt von C mit $u < 0$. Die Parallele zur y -Achse durch P schneidet die x -Achse in Q . Das Dreieck OPQ hat den Flächeninhalt $A(u)$. Für welches u nimmt die Flächeninhaltsfunktion einen Extremwert an und wie groß ist er?
 - Durch Rotation dieses Dreiecks um die x -Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen $V(u)$. Für welches u nimmt dieses Volumen einen Extremwert an und wie groß ist er?

Lösungen:

6. a) $\mathbb{D} = [-6; \infty[$
Nullstellen: $x_1 = -6, x_2 = 0,$
 $f'(x) = -\frac{3(x+4)}{4\sqrt{x+6}} \quad \text{Max}(-4 | 2\sqrt{2})$
- b) $u_{\max} = -4,8 \quad A_{\max} = 6,31$
- c) $u_{\max} = -4,5 \quad V_{\max} = 35,78$

7. Für jedes k ($k > 0$) ist die Funktion $f_k(x) = x\sqrt{k-2x}$ gegeben.

- a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_k und wählen Sie das k so, dass an der Stelle $x = 3$ ein Extremum vorliegt (notwendige Bedingung genügt).

$$\left(\text{Zwischenergebnis: } f'_k(x) = \frac{k-3x}{\sqrt{k-2x}} \right)$$

Skizzieren Sie den Graphen von f_9 .

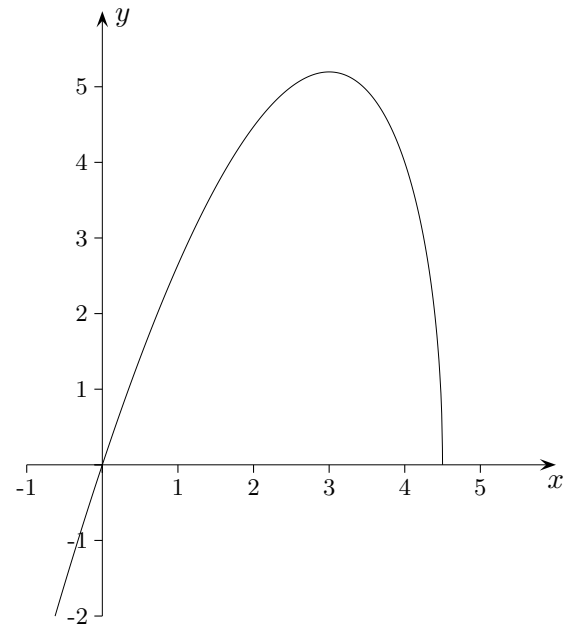
- b) Ermitteln Sie die Ortskurve der Extrema.
- c) Für welches k verläuft der Graph von f_k durch den Punkt $R(4 | 8)$? Untersuchen Sie, ob durch jeden Punkt $S(x_0 | y_0)$ mit $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$ ein Graph der Schar f_k verläuft.
- d) $P(u | v)$ mit $u > 0$ sei ein Punkt auf dem Graphen von f_9 . Die Parallele zur y -Achse durch P schneidet die x -Achse in Q . Dreht man das Dreieck OPQ um die y -Achse entsteht ein Körper mit einer kegelförmigen Mulde. Berechnen Sie das Volumen des Körpers. Für welches u nimmt das Körpervolumen einen Extremwert an? Wie groß und von welcher Art ist er?

Der Körper K entsteht durch Rotation um die x -Achse des Graphen von f_9 im Definitionsbereich, für den $x \geq 0$ gilt.

- e) Geben Sie die Höhe und den Grundkreisradius eines kleinen Kegels mit möglichst geringer Höhe an, aus dem K gefräst werden kann.
- f) K soll von einer zur xy -Ebene parallelen Ebene $z = 1$ geschnitten werden. Skizzieren Sie die Schnittkurve und berechnen Sie ihre beiden orthogonalen Durchmesser (parallel zu den Achsen).

7. a) max. Def.-Bereich: $x \leq \frac{k}{2}$, $f'_k(3) = 0 \implies k = 9$

$N_1(0|0)$, $N_2\left(\frac{k}{2} | 0\right)$



b) $Max\left(\frac{k}{3} \mid \frac{k}{3} \sqrt{k - \frac{2k}{3}}\right) = Max\left(\frac{k}{3} \mid \frac{1}{9} k \sqrt{9k - 6k}\right) \implies y = x \sqrt{x}$

c) $f_k(4) = 12 \implies k = 12$

Damit ein Graph durch $P(x_0 | y_0)$ verläuft, muss es ein positives k geben, so dass $y_0 = x_0 \sqrt{k - 2x_0}$ gilt. $k = 2x_0 + \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2$ erfüllt das Verlangte.

d) $V(u) = \frac{2}{3} \pi u^2 \cdot f_9(u) \implies u_{\max} = 3,86$

e) $f'_9(0) = 3$, $h = 4,5 \implies r = 13,5$

f) Die Schnittkurve ist ein Oval.

$f_9(x) = 1 \implies x_1 = 0,347$ und $x_2 = 4,475$
 $(x \geq 0) \quad d_1 = 4,128$

$d_2 = 2 \cdot \sqrt{(f(3))^2 - 1} = 2\sqrt{26}$ (Pythagoras)

