Wurzelfunktionen Aufgaben

1. Für jedes k $(k > 0)$ ist die Funktion $f_k(x) = \frac{1}{8}(2x - k^2)\sqrt{kx}$, $0 \le x$ gegeben.

   a) Untersuchen Sie die Funktion f_k auf Nullstellen und Extrema.
   Ermitteln Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x)$ sowie für $0 \le x$ $\lim\limits_{x\to 0} f_k'(x)$.
   Skizzieren Sie den Graphen von f_4 im Intervall $0 \le x \le 9$.

   b) Stellen Sie die Gleichung für die Tangente t_1 an den Graphen der Funktion f_4 im Punkt $P_1(4 \mid y)$ auf. Stellen Sie eine Bedingung (Gleichung) für die x-Koordinate eines Berührpunktes P_2 einer weiteren Tangente t_2 an den Graphen von f_4, die zur Tangente t_1 orthogonal ist.

   c) Der Graph von f_4 und die x-Achse begrenzen eine Fläche A_1 vollständig. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei der Rotation der Fläche A_1 um die x-Achse entsteht.

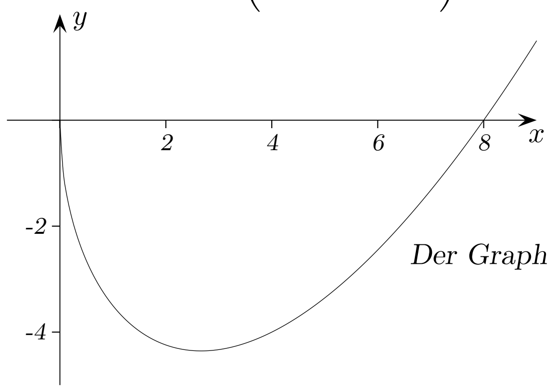
   d) Der Koordinatenursprung O, der Punkt $A(a \mid 0)$ $(0 < a < 8)$ und der Punkt $B(a \mid f_4(a))$ bestimmen ein Dreieck. Berechnen Sie den Wert von a, so dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt.

Lösungen:

1. a) $N_1(0 \mid 0))$, $N_2\left(\frac{k^2}{2} \mid 0)\right)$, $f_k'(x) = \frac{1}{16}\frac{6kx - k^3}{\sqrt{kx}} = 0 \implies x = \frac{k^2}{6}$

Es liegt ein Vorzeichenwechsel von − nach + für f' an der Stelle $x = \frac{k^2}{6}$ vor, $\implies$

$$Min\left(\frac{k^2}{6} \mid -\frac{\sqrt{6}}{72}k^3\sqrt{k}\right) \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$$



Der Graph mündet orthogonal zur x-Achse in den Punkt $N_1(0 \mid 0))$ ein.

b) $f_4'(x) = \frac{3x - 8}{4\sqrt{x}}$, $t_1: \; y = \frac{1}{2}x - 6$, $f_4'(x) = -2$, $\implies 9x^2 - 112x + 64 = 0$

c) $V = \pi \cdot \int_0^8 (f_4(x))^2 \, dx = ... = \pi\left[\frac{x^4}{16} - \frac{4}{3}x^3 + 8x^2\right]_0^8 = ... = \frac{256}{3}\pi$

d) $A = \frac{1}{2}(4a - \frac{a^2}{2})\sqrt{a}$, $A'(a) = \frac{1}{8} \cdot \frac{24a - 5a^2}{\sqrt{a}})$

Vorzeichenwechsel von + nach − für A' an der Stelle $a = \frac{24}{5}$ $\implies$ *Maximum*

$A_{Max} = \frac{192}{25} \cdot \sqrt{\frac{6}{5}} = 8{,}41 \; (FE)$

Ableitungen

2. Wie lautet die 1. Ableitung?

   a) $f(x) = 10 + 3\sqrt{2k - x}$

   b) $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + k}$

   c) $f(x) = x\,(2 - t\sqrt{2x})$

   d) $f(x) = x^2\sqrt{k - x^2}$

   e) $f(x) = \frac{a}{\sqrt{b+x}}$

   f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{t^2 - x^2}}$

3. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{bx+1} & ? < x < 4 \\ x + 5 & x \geq 4 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist. Geben Sie dann auch den maximalen Definitionsbereich an.

Lösungen

2. a) $f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{2k-x}}$

   b) $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}$

   c) $f'(x) = 2 - \frac{3t\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

   d) $f'(x) = \frac{x\,(2k-3x^2)}{\sqrt{k-x^2}}$

   e) $f'(x) = -\frac{a}{2(\sqrt{b+x})^3}$

   f) $f'(x) = \frac{t^2}{(\sqrt{t^2-x^2})^3}$

3. $a = 3$
   $b = 2$
   $\mathbb{D} = \,]-\frac{1}{2};\,\infty[$ Beachte: An der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ ist $f(x)$ nicht differenzierbar.

Wurzelgleichungen

4. Lösen Sie die Gleichungen algebraisch und mit dem GTR:

   a) $2\sqrt{x+4} = 1 + x$

   b) $\sqrt{x^2+8} = 3x$

   c) $3\sqrt{x+12} - 8 = x$

5. Der Graph von $f(x) = \sqrt{x}$ sei G.
   Eine Fläche $A(c)$ wird durch die x-Achse, zwei Kurven, wobei G um 2 Einheiten nach links, bzw. eine Einheit nach rechts verschoben wird, und der Geraden $x = c$ begrenzt. Bestimmen Sie

   a) den Inhalt von $A(c)$.

   b) das Volumen des Körpers, der entsteht, falls $A(c)$ um die x-Achse rotiert.
   Untersuchen Sie das Volumen für $c \to \infty$.

Lösungen

4. a) $x = 5$
   b) $x = 1$
   c) $x = 4$

5. a) $A(c) = \frac{2}{3}(c+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(c-1)^{\frac{3}{2}}$

   b) $V(c) = \frac{3}{2}\pi + 3\pi c$

   c) $V(c) \to \infty$ falls $c \to \infty$.

6. Gegeben ist die Funktion: $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

   a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie,
   Monotonie und Grenzverhalten, d. h. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

   b) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion samt Definitions- und Wertebereich.

   c) Wie lautet eine Stammfunktion von f (genaues Hinsehen genügt)?

7. Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktionen ($k > 0$) berühren:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{kx}}, \qquad x \geq 0$$

$$g(x) = \sqrt{2-kx}, \quad x \leq \frac{2}{k}$$

Lösungshinweise:

6. a) $f(x) = -f(-x)$, Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$$f'(x) = \frac{5}{(\sqrt{1+x^2})^3} > 0 \quad \Longrightarrow \text{ Graph ist monoton steigend.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 5$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -5 \quad \text{(Symmetrie beachten)}$$

   b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}, \qquad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \,]-5;\, 5[\,, \qquad \mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

   c) $\displaystyle\int f(x)\, dx = 5\sqrt{1+x^2}$

7. $x_0 = \frac{1}{k}, \quad f(x_0) = g(x_0) = 1, \quad f'(x_0) = g'(x_0) = -\frac{k}{2}$

Aufgaben

8. Für welches k schneiden sich die Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \dfrac{k}{x}$ rechtwinklig $(x > 0)$?

9. Gegeben ist ein Kreis um den Ursprung mit dem Radius $r = 5\ LE$. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an der Stelle $x = 3$?

Lösungshinweise:

8. $x_0 = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad g'(x_0) = -\sqrt{2}$

9. $t_1\colon \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}, \qquad t_2\colon \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$

1. Gefäß

10. Zur Modellierung eines zur x-Achse rotationssymmetrischen Gefäßes aus Glas wird für das Äußere die Strecke verwendet, die die Punkte $A(0\,|\,4)$ und $B(12\,|\,11)$ verbindet, und für das Innere des Glases
die Funktion $f(x) = a\sqrt{x-1}$ im Bereich $1 \leq x \leq 12$, LE in cm.

    a) Bestimmen Sie a so, dass das Füllvolumen $540\pi\, cm^3$ beträgt.

    Für das Weitere sei $a = 3$.

    b) Ermitteln Sie für das Glas die Mantelfläche und das Volumen des benötigten Glasmaterials.

    c) An welcher Stelle ist die Entfernung von einem äußeren zu einem inneren Punkt, parallel zur y-Achse gemessen, am geringsten?

    d) Ermitteln Sie die minimale Glasstärke.

Lösungshinweise:

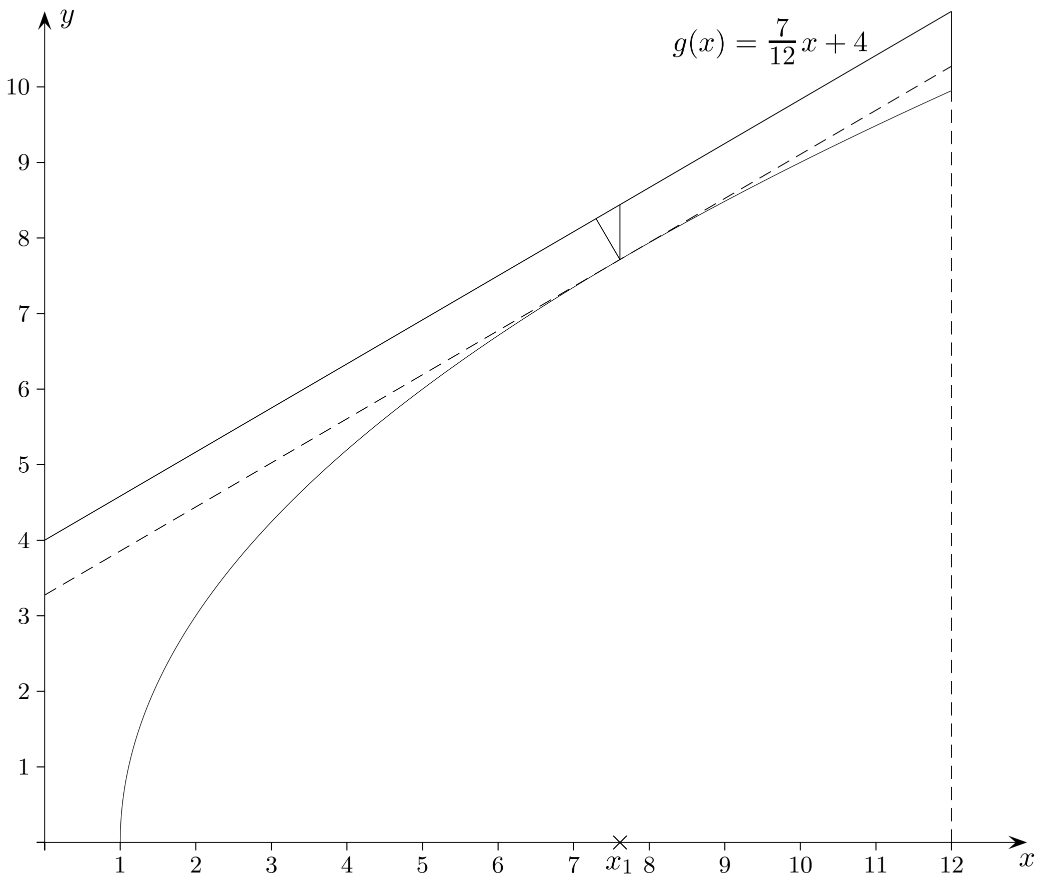
10. a) $a = 3$ (gerundet)

    b) $M = 654{,}67\, cm^2$, $V = 184\pi\, cm^3$

    c) $x_1 = 7{,}61$

    d) $d_{\min} = 0{,}63\, cm$

1. Gefäß, Lösungshinweise



x_1 ist die Stelle der minimalen Funktionsdifferenz.
x_1 ist aber auch die Stelle, an der $f(x)$ die Steigung der Geraden annimmt.
Die minimale Glasstärke kann als Minimum der Funktion

$$d(x) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (g(x) - f(x_1))^2}$$

bestimmt werden. Es liegt an der Stelle $x_2 = 7{,}30$.

Es sei an die Kegelstumpf-Formeln erinnert:

$$M = (r_1 + r_2)\,\pi\, s$$
$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

2. Gefäß

11. Zur Modellierung eines zur y-Achse rotationssymmetrischen Gefäßes wird die Funktion

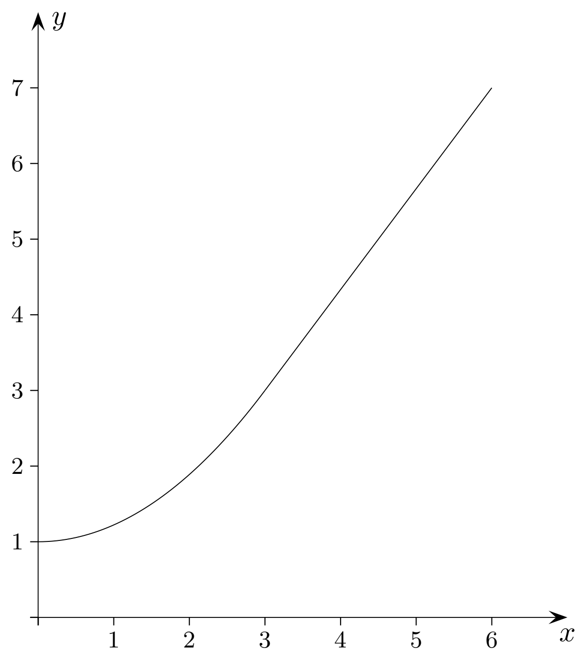
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & 0 \le x < 3 \\ mx + n & 3 \le x \le 6 \end{cases}$$

verwendet, wobei $f(3) = 3$ und $f(6) = 7$ sein soll.
Die Stärke der Gefäßwand wird nicht berücksichtigt.

a) Bestimmen Sie a, b, m und n so, dass die Funktion stetig und differenzierbar ist.

b) Ermitteln Sie das Volumen des Gefäßes.

Lösungshinweise:



a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x^2 + 1 & 0 \le x < 3 \\ \frac{4}{3}x - 1 & 3 \le x \le 6 \end{cases}$

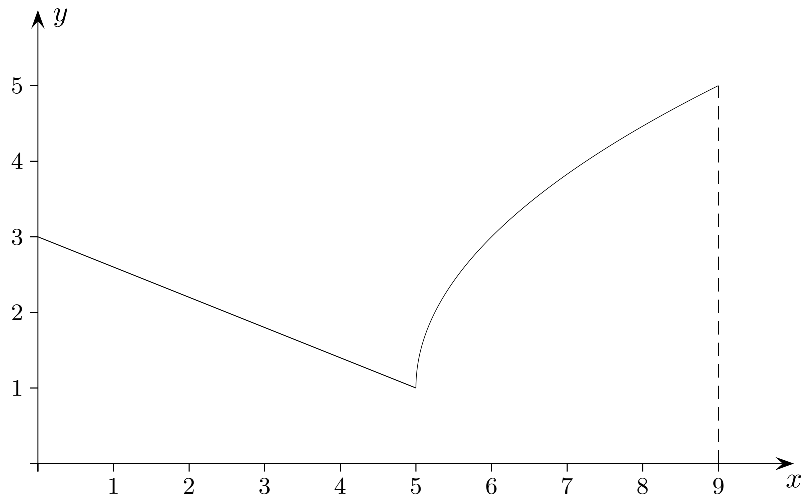
b) $V = 9\pi + 84\pi$

3. Gefäß

12. Zur Modellierung eines zur x-Achse rotationssymmetrischen Gefäßes wird die (stückweise definierte) Funktion

$$f(x) = \begin{cases} mx + n & 0 \leq x < 5 \\ a\sqrt{x - b} + c & 5 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

verwendet.
Die Stärke der Gefäßwand wird nicht berücksichtigt.



a) Bestimmen Sie m, n, a, b und c anhand der Zeichnung und erläutern Sie die Bedeutung dieser Parameter in Hinblick auf den Graphen von $g(x) = \sqrt{x}$.

b) Das Gefäß wird mit einer gleichmäßigen Zuflussrate mit Wasser gefüllt. Es dauert 40 Sekunden, bis das Gefäß randvoll ist. Welche Zeit wird dabei zum Füllen des geradlinig begrenzten unteren Teils benötigt?

c) Skizzieren Sie den Füllgraphen.

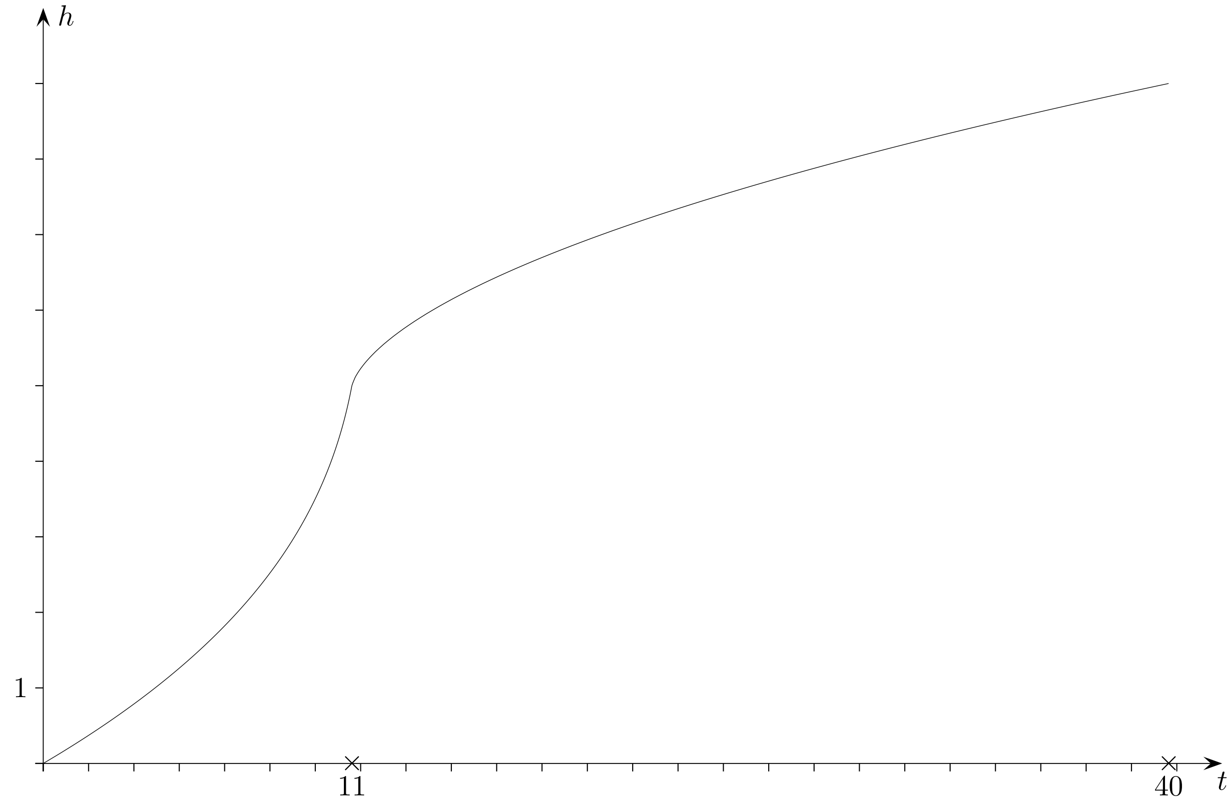
3. Gefäß

Lösungshinweise:

a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}x + 3 & 0 \leq x < 5 \\ 2\sqrt{x-5} + 1 & 5 \leq x \leq 9 \end{cases}$

b) $V_{\text{gesamt}} = \frac{65}{3}\pi + \frac{172}{3}\pi = 79\pi$,   11 Sekunden

c)



Der Graph von

$g(x) = a\sqrt{x-b} + c$

ergibt sich aus dem Graphen der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ durch

horizontale Verschiebung um b $(b > 0)$, nach links: $\sqrt{x+b}$, nach rechts: $\sqrt{x-b}$,
vertikale Verschiebung um c,
vertikale Streckung/Stauchung um den Faktor a, auch Spiegelung an der x-Achse für $a < 0$.

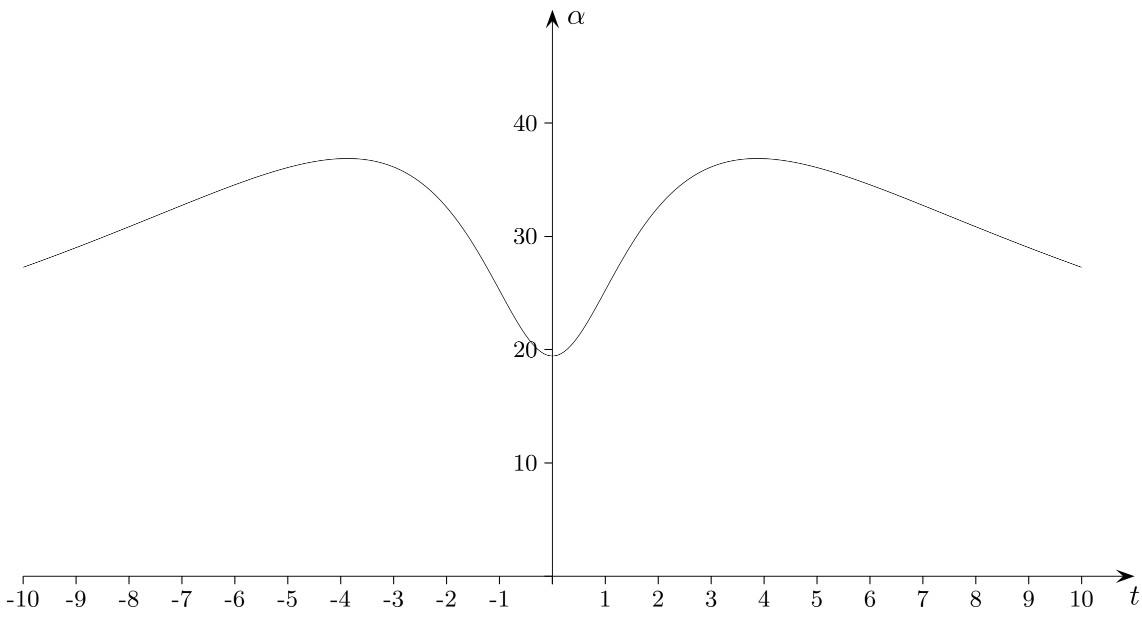
13. Die Endpunkte der Strecke $A(0\,|\,0\,|\,2)$ und $B(0\,|\,0\,|\,8)$

bilden mit einem Punkt Q auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Winkel $\alpha(t)$.

Ermitteln Sie die Extrema von $\alpha(t)$.

Lösungshinweise:

$$\alpha = \arccos \frac{17 + t^2}{\sqrt{5 + t^2} \cdot \sqrt{65 + t^2}}$$



$t_{\text{max}} = \pm 3{,}87 \qquad \alpha_{\text{max}} = 36{,}9°$

$t_{\text{min}} = 0 \qquad \alpha_{\text{min}} = 19{,}4°$

14. Die Normalen eines Kreises schneiden sich im Mittelpunkt.
(Eine Normale ist eine Gerade, die senkrecht zur Tangente verläuft.)

Gegeben sei nun die Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x\sqrt{10-x}$.

Ermitteln Sie die Normale an einer Stelle z, berechnen Sie den Schnittpunkt dieser Normalen mit der x-Achse und ermitteln Sie den Punkt M, der sich für $z \to 10$ ergibt. M ist der Mittelpunkt eines Krümmungskreises an der Stelle $x = 10$. Zeichnen Sie den Graphen von f und den Krümmungskreis.

Lösungshinweise:

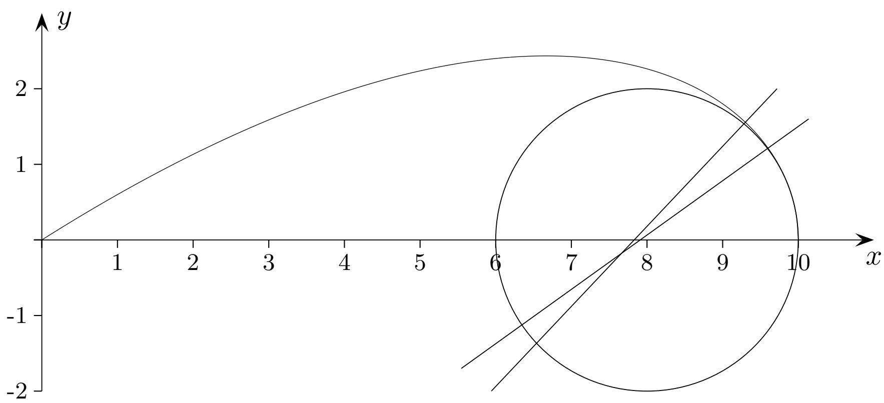
Gleichung der Normalen:

$$y = \frac{10\sqrt{10-z}}{3z-20}\,(x-z) + \frac{1}{5}z\sqrt{10-z}$$

Nullstelle:

$$x_z = \frac{7}{5}z - \frac{3}{50}z^2$$

$$\lim_{z\to 10} x_z = 8$$



15. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} + b & 0 \leq x < 8 \\ \frac{1}{4}x + 4 & x \geq 8 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist.

Lösung:

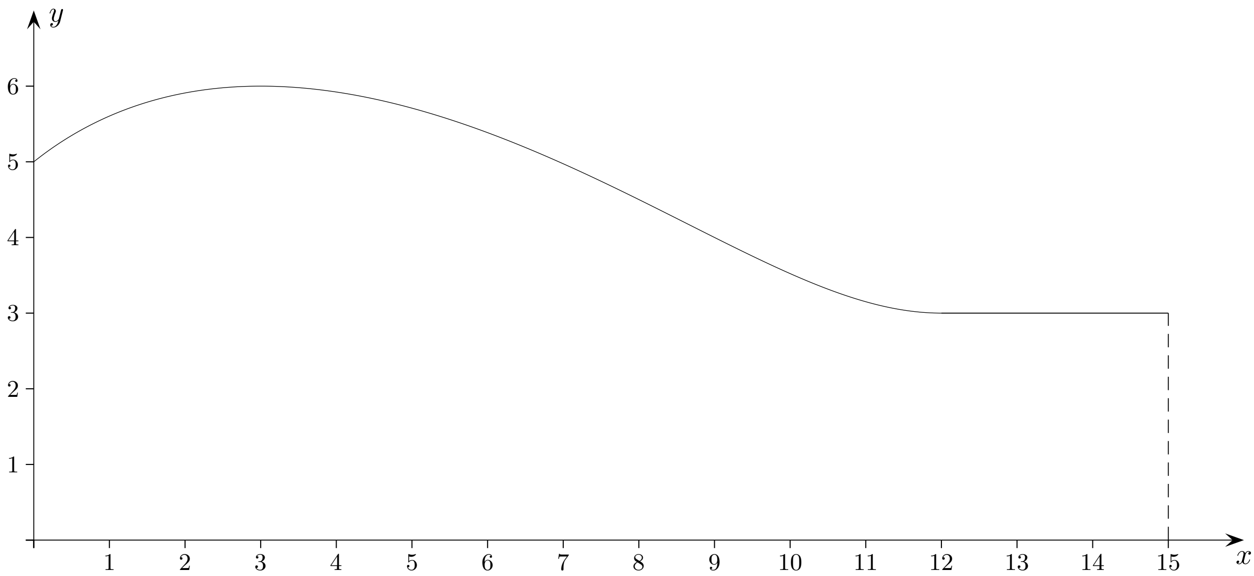
$a = b = 2$

4. Gefäß

16. Zur Modellierung eines zur x-Achse rotationssymmetrischen Gefäßes wird die (stückweise definierte) Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d} & 0 \leq x < 12 \\ n & 12 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

verwendet (Längenangaben in cm).
Die Stärke der Gefäßwand wird nicht berücksichtigt.
f soll stetig und differenzierbar sein,
in $E_1(3 \mid 6)$ und $E_2(12 \mid 3)$ sollen Extrema vorliegen.



Ermitteln Sie f und das Volumen des Gefäßes.

Ergebnisse:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{27}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 8x + 25} & 0 \leq x < 12 \\ 3 & 12 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

$V = 1027{,}30\ cm^3$

17. Für jedes k $(k > 0)$ ist die Funktion $f_k(x) = \sqrt{kx^2 - x^4}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie, Nullstellen und Extrema.

b) An welchen Stellen ist f_k nicht differenzierbar?
Ermitteln Sie auch $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

c) Skizzieren Sie den Graphen von f_4.

Lösungshinweise

a) $\mathbb{D}_{\max} = [-\sqrt{k};\ \sqrt{k}\,]$

$N_1(0\,|\,0),\quad N_{2/3}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right),$

$$f'(x) = \frac{kx - 2x^3}{\sqrt{kx^2 - x^4}}$$

$Max(\pm\sqrt{\frac{k}{2}}\ |\ \frac{k}{2}),\quad Min(0\,|\,0)$

Das notwendige Kriterium $f'(x) = 0$ gilt nur für differenzierbare Funktionen.
Hier ist in einer Umgebung von $x = 0$ der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ minimal.

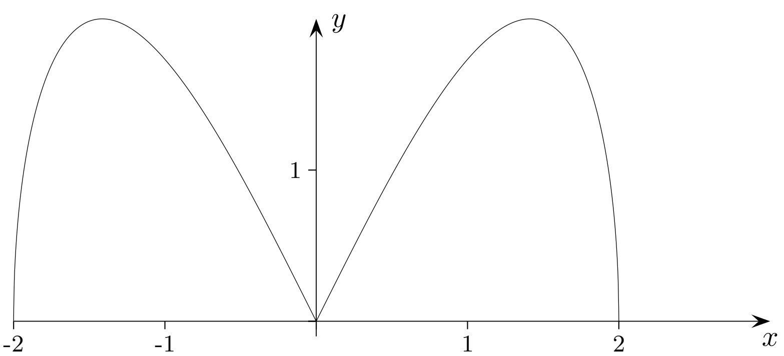
b) $x_1 = 0,\quad x_{2/3} = \pm\sqrt{k}$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{kx - 2x^3}{|\,x\,|\sqrt{k - x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{kx - 2x^3}{x\sqrt{k - x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{k - 2x^2}{\sqrt{k - x^2}} = \sqrt{k}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{kx - 2x^3}{|\,x\,|\sqrt{k - x^2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{kx - 2x^3}{-x\sqrt{k - x^2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-k + 2x^2}{\sqrt{k - x^2}} = -\sqrt{k}$$

Dies Letztere folgt auch unmittelbar aus der y-Achsensymmetrie.
f ist in allen drei Nullstellen nicht differenzierbar.

c)



18. Durch $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathbb{D} = [\,0;\, 10\,]$, ist ein zur x-Achse rotationssymmetrischer Körper gegeben. Diesem Körper soll ein Kegelstumpf mit maximalem Volumen einbeschrieben werden. Welches Volumen hat dieser Kegelstumpf?

Lösungshinweise

18. $V = \frac{\pi \cdot h}{3}\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

$V(x) = \frac{\pi}{3}\,(10 - x) \cdot (x + \sqrt{x} \cdot \sqrt{10} + 10)$

$x_{max} = 2,074$

$V_{max} = 138,015\ VE$

19. $f(x) = x\sqrt{t^2 - x^2} \qquad t > 0$

$\mathbb{D}_{\max} = [\,-t;\, t\,]$

$f'(x) = \frac{t^2 - 2x^2}{\sqrt{t^2 - x^2}}$

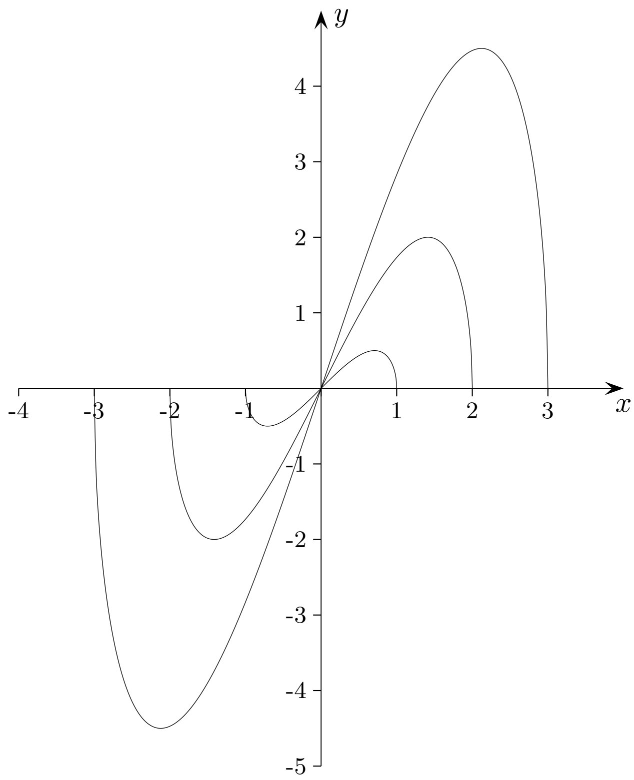
$f''(x) = \frac{2x^3 - 3xt^2}{(\sqrt{t^2 - x^2})^3}$

$N_1(0 \mid 0)), \quad N_{2/3}(\pm t \mid 0))$

$E\big(\pm \frac{t\sqrt{2}}{2} \mid \pm\frac{t^2}{2}\big)$

$W(0 \mid 0))$

Ortskurve der Extrema: $y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$



20. $f(x) = x^2\sqrt{t^2 - x^2} \qquad t > 0$

$\mathbb{D}_{\max} = [\,-t;\, t\,]$

$f'(x) = \frac{2xt^2-3x^3}{\sqrt{t^2-x^2}}$

$f''(x) = \frac{2t^4-9t^2x^2+6x^4}{(\sqrt{t^2-x^2})^3}$

$N_1(0 \mid 0)), \quad N_{2/3}(\pm t \mid 0))$

$Max\Big(\pm\frac{t\sqrt{6}}{3} \mid \frac{2}{9}t^3\sqrt{3}\Big)$

Ortskurve der Maxima: $y = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 & x \geq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x^3 & x < 0 \end{cases}$