Wurzelfunktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{8-x}$

   a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrema. Ermitteln Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ sowie für $x \leq 8$ $\lim\limits_{x\to 8} f'(x)$.
   Skizzieren Sie den Graphen von f.

   b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse im 1. Quadranten vollständig begrenzen.

   c) Rotiert die Fläche aus b) um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper.
   Berechnen Sie sein Volumen. Welchen Radius hat eine volumengleiche Kugel?

   d) Die Tangente im Punkt $Q(4 \mid f(4))$ schneidet die Gerade $y = -\frac{3}{2}x - 6$.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts sowie den Schnittwinkel.

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{8-x}$

   a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrema. Ermitteln Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ sowie für $x \leq 8$ $\lim\limits_{x\to 8} f'(x)$. Skizzieren Sie den Graphen von f.

   b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse im 1. Quadranten vollständig begrenzen.

   c) Rotiert die Fläche aus b) um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper. Berechnen Sie sein Volumen. Welchen Radius hat eine volumengleiche Kugel?

   d) Die Tangente im Punkt $Q(4\mid f(4))$ schneidet die Gerade $y = -\frac{3}{2}x - 6$. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts sowie den Schnittwinkel.

Lösungen:

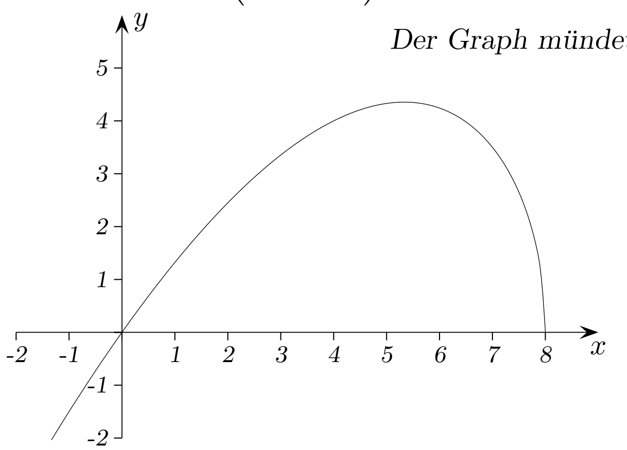
1. a) *max. Def.-Bereich:* $x \leq 8$, $\quad N_1(0\mid 0)$, $\quad N_2(8\mid 0)$

$$f'(x) = \frac{16-3x}{4\sqrt{8-x}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{16}{3}$$

Es liegt ein Vorzeichenwechsel von + nach − für f' *an der Stelle* $x = \frac{16}{3}$ *vor,* $\Longrightarrow$

$$Max\left(\frac{16}{3} \mid \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}\right), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 8} f'(x) = -\infty$$

Der Graph mündet orthogonal zur x*-Achse in den Punkt* $N_2(8\mid 0)$*) ein.*



b) $$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int x\sqrt{8-x}\,dx = \frac{1}{2}\int (8-u)\sqrt{u}\,(-1)\,du \qquad mit \quad u = 8-x$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}})\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}(8-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{8}{3}\cdot 8^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}\cdot 8^{\frac{5}{2}} = 24,136 \;\; FE$$

c) $$V = \pi \cdot \int_0^8 (f(x))^2\,dx = \ldots = \frac{256}{3}\pi\,, \qquad V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{256}{3}\pi \qquad \Longrightarrow \qquad r = 4$$

d) *Tangentengleichung* $y = \frac{1}{2}x + 2$, *Schnittpunkt* $S(-4\mid 0)$

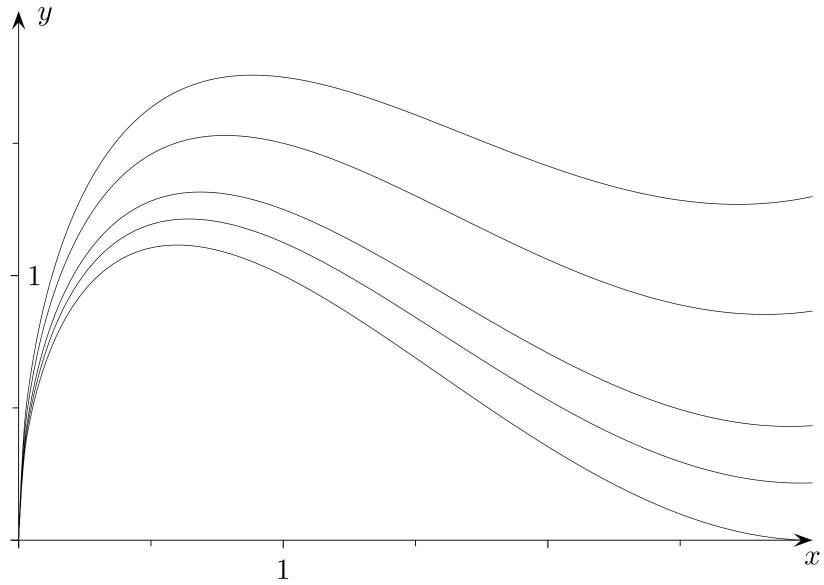
Schnittwinkel $m_1 = \frac{1}{2} = \tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 26,6°$, $\quad m_2 = -\frac{3}{2} = \tan\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = 123,7°$

$\overline{\varphi} = \beta - \alpha = 97,1°$, *Schnittwinkel der Geraden* $\varphi = 180° - \overline{\varphi} = 82,9°$

2. Für jedes t $(t > 0)$ ist die Funktion $f_t(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}\,((x-3)^2 + t)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $f_t'(x) = \dfrac{5x^2 - 18x + 9 + t}{8\sqrt{x}}$

b) Ordnen Sie den eingezeichneten Graphen von f_t die Parameter $t = 0$, $t = 1$ und $t = 2$ zu.



c) An welchen Stellen hat f_0 eine waagerechte Tangente?

d) Geben Sie eine Stammfunktion von f_t an.

Ein Graph von f_t soll zur Modellierung einer zur x-Achse rotationssymmetrischen Vase dienen, Definitionsbereich $\mathbb{D} = [\,0;\,3\,]$, *LE* $1\,dm$.

e) Wie groß ist das t zu wählen, damit der Öffnungskreisumfang der Vase $2\ dm$ beträgt?

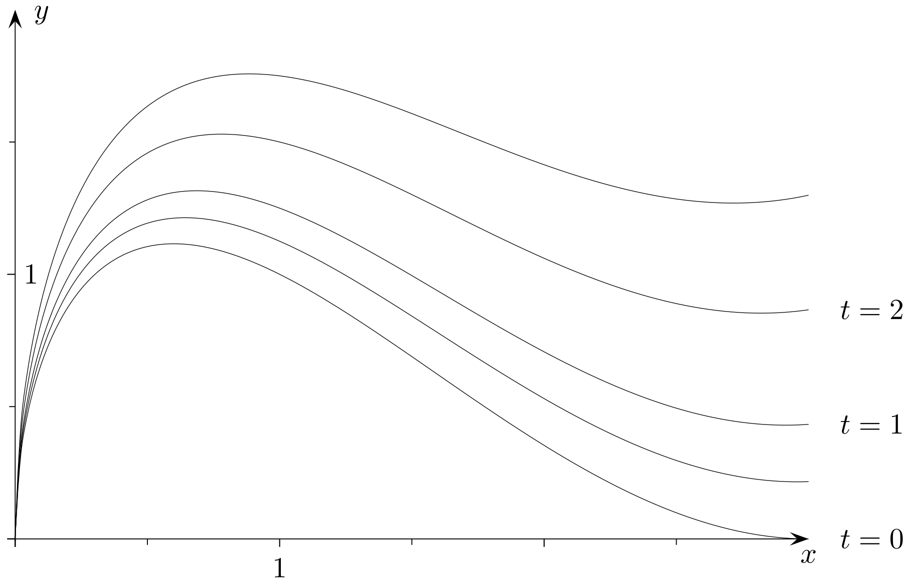
f) Welches Volumen hat die zu $f_{0{,}74}$ gehörende Vase?

g) Die zu $f_{0{,}74}$ gehörende Vase soll mit zwei Zierringen gleichen Umfangs in unterschiedlichen Höhen versehen werden. Geben Sie hierzu eine Möglichkeit an.

2. Für jedes t $(t > 0)$ ist die Funktion $f_t(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}\,((x-3)^2 + t)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $f_t'(x) = \dfrac{5x^2 - 18x + 9 + t}{8\sqrt{x}}$

b) Ordnen Sie den eingezeichneten Graphen von f_t die Parameter $t = 0$, $t = 1$ und $t = 2$ zu.



c) An welchen Stellen hat f_0 eine waagerechte Tangente? $x_1 = 3,\ x_2 = \frac{3}{5}$

d) Geben Sie eine Stammfunktion von f_t an. $\int f_t(x)\,dx = \sqrt{x^3}\left(\frac{1}{14}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{2} + \frac{1}{6}t\right) + C$

Ein Graph von f_t soll zur Modellierung einer zur x-Achse rotationssymmetrischen Vase dienen, Definitionsbereich $\mathbb{D} = [\,0;\,3\,]$, $LE\ 1\,dm$.

e) Wie groß ist das t zu wählen, damit der Öffnungskreisumfang der Vase 2 dm beträgt?

$t = \frac{4\sqrt{3}}{3\pi} = 0{,}735$

f) Welches Volumen hat die zu $f_{0,74}$ gehörende Vase? $7{,}217\ dm^3$

g) Die zu $f_{0,74}$ gehörende Vase soll mit zwei Zierringen gleichen Umfangs in unterschiedlichen Höhen versehen werden. Geben Sie hierzu eine Möglichkeit an.

Hierzu ist der Graph von $f_{0,74}$ mit einer Parallelen zur x-Achse zu schneiden.