Warum ist die Analysis so schwierig?

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016\ldots$$

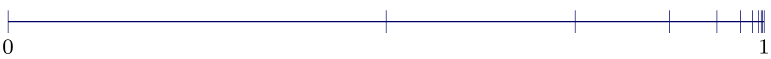
Neben den präzisen Begriffen und streng logischen Beweisen, die für die Mathematik insgesamt charakteristisch sind, stellt in der Analysis vor allem der Umgang mit den reellen Zahlen die eigentliche Herausforderung dar. Bei Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder π denkt man nicht mehr in Näherungen, drei-, vier- oder fünfstellig, sondern in unendlichen Dezimalfolgen. Die auf diese Unendlichkeit zugeschnittenen Begriffsbildungen sind völlig ungewohnt. Die Gleichheit zweier durch Folgen definierter Zahlen kann z. B. mit:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - b_n| < \varepsilon$

nachgewiesen werden, d. h. dass die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

In der Schule kann und muss vieles ausspart bleiben, die auftretenden Funktionen sind in der Regel mindestens stückweise glatt, die zugrunde liegenden Ideen sollten zumindest plausibel erscheinen.
Das (böse) Erwachen erfolgt beim Kontakt mit der Analysis auf der Universität.
Die Epsilontik ermöglicht ein vertieftes Verständnis, ist jedoch anfangs ohne didaktische Einbettung nur schwer zugänglich. Ein Blick auf die historische Entwicklung erweist sich dabei als hilfreich.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} &= 1 \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} &= 1 \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} &= 1 \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots &= 1 \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= 1 \qquad \text{zwei der unendlich vielen Darstellungen der 1}
\end{aligned}$$



Reelle Zahlen

Startseite

Lineare Algebra

In der Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ stehen geometrische Anwendungen (Geraden, Ebenen, Abstände) im Vordergrund. In der linearen Algebra fasst man einige Eigenschaften von Vektoren zu einem Axiomensystem zusammen und leitet daraus Weiteres her. Alle Strukturen mit diesen Eigenschaften bilden einen Vektorenraum, Steinitz 1910. Alle Folgerungen aus dem Axiomensystem sind dann für lineare Strukturen (z. B. Polynome, Matrizen, Folgen, Funktionen) gültig, wenn sie die Regeln eines Vektorraums erfüllen. Dieses abstrakte Vorgehen ist für die Mathematik typisch.
Auch wenn die Begriffsbildung in der linearen Algebra geometrisch motiviert ist, wird in der Beweisführung auf die Anschauung verzichtet.

Ursprungsgeraden und -ebenen werden in der linearen Algebra zum Begriff Untervektorraum verallgemeinert. Im $\mathbb{R}^3$ sind drei Vektoren linear unabhängig, wenn sie nicht in einer Ebene liegen.

In der linearen Algebra sind n Vektoren linear unabhängig, wenn aus $\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ (einer Linearkombination des Nullvektors) $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ folgt.

Es ist beeindruckend, was sich hieraus alles ableiten lässt:

Alle Basen eines endlichdimensionalen Vektorraums haben dieselbe Anzahl von Vektoren.
Somit kann die Dimension definiert werden.

Die lineare Algebra befasst sich weiter mit linearen Abbildungen und deren Matrizen, Eigenwerten und Eigenvektoren, Determinanten und linearen Gleichungssystemen und abstrakten Strukturen wie Dualräume, Skalarprodukte und Normen.

Die schulische Vektorrechnung, historisch der Ausgangspunkt, bildet eine gute Grundlage.

Vektorrechnung

Bei der Beschäftigung mit Mathematik sind jedoch Irrwege, Fehlschläge und Frustrationen nicht seltene Begleiterscheinungen. Ein gewisses Durchhaltevermögen ist ratsam.
Die KI und eine Lerngruppe können dich unterstützen.