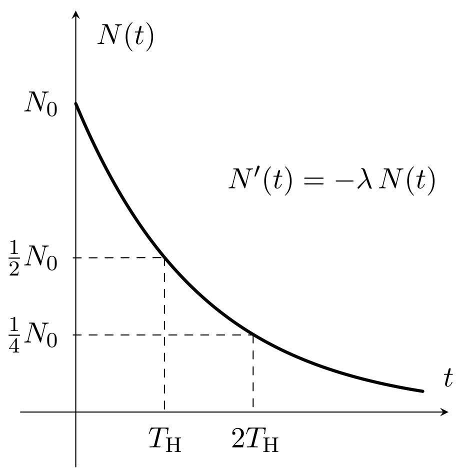
Skript zu

Wachstums- und Zerfallsprozessen



T. Glosauer

JKG Reutlingen

Schuljahr 2013/14

`gl.kepi@gmail.com`

Wir studieren hier dieselben Wachstums- und Zerfallsprozesse wie bereits in der Mittelstufe. Da wir nun allerdings die e-Funktion und ihre Ableitung kennengelernt haben, können wir dies auf eine mathematisch viel sinnvollere Art und Weise tun. Damals waren wir – insbesondere beim beschränkten und logistischen Wachstum – auf die Verwendung von *diskreten* Modellen mit lästigen Rekursionsformeln angewiesen, obwohl die beschriebenen Prozesse in der Realität oft *kontinuierlich* ablaufen (d.h. nicht in diskreten Zeitschritten von z.B. einem Jahr oder einem Monat).
Jetzt sind wir in der Lage, kontinuierliche Wachstums- und Zerfallsprozesse mit Hilfe von sogenannten *Differenzialgleichungen* viel besser modellieren zu können. Beim Lösen dieser Differenzialgleichungen wird sich die e-Funktion als unentbehrliches Hilfsmittel erweisen.

1 Exponentielles Wachstum

Im Magen eines gestressten Managers, der kurz vor einem Magengeschwür steht, befindet sich eine Population von Helicobacter pylori. Zur Zeit t seien $N(t)$ Bakterien vorhanden. Nach Ablauf der Zeitspanne Δt hat sich die Bakterienpopulation um

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$$

Mitglieder vermehrt. Gehen wir von der plausiblen Annahme aus, dass

> diese Vermehrung ΔN bei kleinen Zeitspannen Δt näherungsweise proportional zum momentan vorhandenen Bestand $N(t)$ und der Zeitspanne Δt ist,

so erhalten wir

$$\Delta N = \lambda \cdot N(t) \cdot \Delta t \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda\, N(t)$$

mit einer Konstanten $\lambda > 0$. Im Grenzübergang $\Delta t \to 0$ steht auf der linken Seite dieser Gleichung

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}\ ,$$

was nichts anderes als die Ableitung (momentane Änderungsrate) $N'(t)$ der Funktion $N(t)$ ist, welche hier die Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienpopulation beschreibt. Damit erhält das Wachstumsgesetz der Bakterienzahl die folgende Gestalt:

$$N'(t) = \lambda\, N(t).$$

Diese Beziehung beschreibt das Wachstum der Population „im Kleinen" und besagt, dass *die Wachstumsgeschwindigkeit $N'(t)$ proportional zum gerade vorhandenen Bestand $N(t)$* ist: Je mehr Bakterien vorhanden sind, desto schneller vermehren sie sich (hat sich der Bakterienbestand z.B. verdoppelt, so vermehrt sich der neue Bestand auch doppelt so schnell wie der alte). Da λ die Größe von N' mitbestimmt, heißt λ *Wachstumskonstante.*

Wir haben es hier mit einer sogenannten *Differenzialgleichung (DGL)* zu tun, weil $N'(t) = \lambda\, N(t)$ einen Zusammenhang zwischen der gesuchten Funktion $N(t)$ und ihrem Differenzialquotienten (Ableitung) $N'(t)$ herstellt. Um sie zu lösen, müssen wir eine Funktion finden, deren Ableitung die Funktion selbst ist – bis auf einen Vorfaktor λ. Weil die e-Funktion aber genau die wunderbare Eigenschaft besitzt, sich beim Ableiten zu reproduzieren, versuchen wir es mit dem Ansatz

$$N(t) = c\, e^{\lambda t}\ , \quad c \in \mathbb{R}\,,$$

und erhalten

$$N'(t) = \left(c\,e^{\lambda t}\right)' = \lambda \cdot c\,e^{\lambda t} = \lambda\,N(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

d.h. die Funktionen $N(t) = c\,e^{\lambda t}$ sind für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ Lösungsfunktionen der DGL. Die Konstante c brauchen wir, um die Anfangsbedingung einzuarbeiten: Sind zu Beobachtungsbeginn, also zum Zeitpunkt $t = 0$ (Stunden), N_0 Bakterien vorhanden, so ist

$$N_0 = N(0) = c\,e^{\lambda \cdot 0} = c.$$

In Abbildung 1 ist der Verlauf der Wachstumskurve

$$N(t) = N_0\,e^{\lambda t}$$

dargestellt. Man erkennt, dass $N(t) \to \infty$ für $t \to \infty$, d.h. eine exponentiell wachsende Population überschreitet jede obere Schranke. Deswegen ist exponentielles Wachstum für lange Zeitspannen kein realistisches Modell. Hat eine Population eine gewisse Größe erreicht, so treten stets entwicklungshemmende Faktoren auf (Nahrungs- und Platzmangel, Seuchen, Zeugungsunlust, etc.), die wir erst beim beschränkten bzw. logistischen Wachstum berücksichtigen werden.

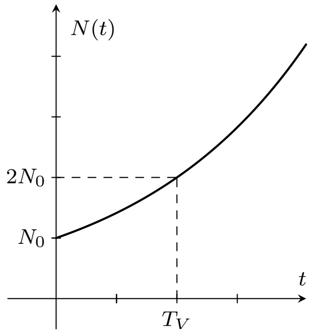


Abbildung 1

Beispiel 1.1 Eine Horde Ratten (Anfangsbestand: 6) wird einen Monat lang beobachtet. Bereits nach 23 Tagen zählt man 42 Ratten. Auf welche Zahl würde der Rattenbestand innerhalb eines Jahres ansteigen, wenn man exponentielles Wachstum zugrunde legt?

Ansatz für die Zahl der Ratten: $N(t) = N_0\,e^{\lambda t}$, wobei die Wachstumskonstante λ noch zu bestimmen ist. Nach $T = 23$ d (Tagen) ist

$$N(T) = 42 = N_0\,e^{\lambda T} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{T}\ln\frac{42}{N_0} = \frac{1}{23}\ln\frac{42}{6} \approx 0{,}085 \quad \left(\tfrac{1}{\mathrm{d}}\right)$$

Beachte: In Mathe lässt man die Einheit von λ meist weg (hier: 1/Tag), muss dann aber anmerken, in welcher Einheit die Zeit t gemessen wird!Das exponentielle Wachstumsgesetz

$$N(t) = 6 \cdot e^{0{,}085\,t} \qquad (t \text{ in Tagen})$$

und nach einem Jahr ergäbe sich

$$N(365) = 6 \cdot e^{0{,}085 \cdot 365} \approx 1{,}79 \cdot 10^{14},$$

d.h. 179 Billionen Ratten. Exponentielles Wachstum ist hier also (glücklicherweise) kein realistisches Modell.

Beispiel 1.2 Das Wachstum der Fläche einer Hefepilzkultur wird drei Stunden lang beobachtet (in Zeitschritten von $\Delta t = 0{,}5$ h). Die Messwerte sind in der folgenden Tabelle zusammengetragen. Prüfe, ob exponentielles Wachstum vorliegt.

t in h	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
A in cm^2	6,0	7,5	8,6	10,8	13,5	16,3	19,6

Zunächst berechnen wir den prozentualen Zuwachs $\frac{N(t+\Delta t)}{N(t)}$ pro Zeitschritt:

$$1{,}25 \qquad 1{,}15 \qquad 1{,}26 \qquad 1{,}25 \qquad 1{,}21 \qquad 1{,}20 \qquad \varnothing = 1{,}22$$

Durchschnittlich nimmt die Fläche also um 22 % pro halbe Stunde zu (da der Zuwachs pro Δt nicht konstant ist, kann kein perfektes exponentielles Wachstum vorliegen, weshalb wir mit einem Durchschnittswert arbeiten).
Damit ergibt sich für die Wachstumskonstante (siehe Aufgabe 1.3)

$$\lambda = \frac{\ln(1+p\%)}{T} = \frac{\ln 1{,}22}{0{,}5} \approx 0{,}4 \ \left(\tfrac{1}{\mathrm{h}}\right) .$$

Abbildung 2 zeigt, dass die Wachstumskurve

$$A(t) = A_0 e^{\lambda t} = 6 \cdot e^{0{,}4\,t}$$

die Messpunkte gut erfasst, d.h. zumindest während der ersten Stunden vermehrt sich der Hefepilz exponentiell.

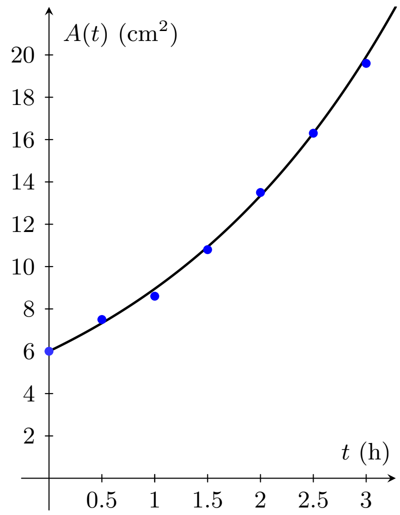


Abbildung 2

Alternative Lösung mit Hilfe *exponentieller Regression* (GTR): Man gibt unter `STAT` im `EDIT`-Menü die t- und $A(t)$-Werte als Listen `L1` bzw. `L2` ein. Dann wechselt man in den Hauptbildschirm und ruft über `STAT CALC 0:ExpReg` die exponentielle Regression auf:

```
ExpReg L1, L2, Y1
```

(Hat man außer `L1` und `L2` keine weiteren Listen gespeichert, kann man nur `ExpReg Y1` tippen.) Der Funktionseditor muss dabei *leer* sein! Dann gibt der GTR eine Regressionskurve aus, die er auch gleich als `Y1` speichert:

$$y = a \cdot b^x \qquad \text{mit} \quad a \approx 6 \quad \text{und} \quad b = 1{,}487$$

Umrechnen in eine e-Funktion ergibt:

$$y = 6 \cdot b^x = 6 \cdot \left(e^{\ln b}\right)^x = 6 \cdot e^{\ln(1{,}487)\cdot x} \approx 6 \cdot e^{0{,}4\cdot x} ,$$

in sehr guter Übereinstimmung mit unserem obigen Ergebnis. Schaltet man unter `STATPLOT` (`2nd Y=`) den `Plot1` auf `On`, so kann man sich über `GRAPH` sowohl die Messpunkte als auch die Regressionskurve anschauen und beurteilen, wie gut diese zusammenpassen (aufgrund der miesen Auflösung des GTR scheinen die Punkte fast perfekt auf der Kurve zu liegen).

Von praktischer Bedeutung ist oftmals die *Verdopplungszeit* T_V, also die Zeitspanne, in der sich die Population verdoppelt. Wir bestimmen zunächst die Zeitspanne, nach welcher der Anfangsbestand N_0 sich verdoppelt hat. Es gilt

$$N(T_V) = 2N_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad N_0 e^{\lambda T_V} = 2N_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{\lambda T_V} = 2,$$

und durch Logarithmieren folgt $\lambda T_V = \ln 2$, also

$$T_V = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Interessanterweise ist beim exponentiellen Wachstum diese Verdopplungszeit völlig unabhängig vom aktuellen Bestand $N(t)$: Nicht nur der Schritt von N_0 auf $2N_0$ wird durch T_V beschrieben, sondern für jede beliebige Zeit t gilt

$$N(t + T_V) = N_0 e^{\lambda(t+T_V)} = N_0 \left(e^{\lambda t} \cdot e^{\lambda T_V}\right) = N_0 \left(e^{\lambda t} \cdot e^{\ln 2}\right) = 2N_0 e^{\lambda t} = 2N(t).$$

Die Population braucht also, egal wie groß sie gerade ist, immer dieselbe Zeit T_V, um sich zu verdoppeln.

Beispiel 1.3 Eine Population von Fruchtfliegen (Drosophila), die zu Beginn aus 10 Fliegen besteht, vermehrt sich innerhalb der ersten zwei Wochen nahezu exponentiell mit einer Verdopplungszeit von 3,2 Tagen. Gib die zugehörige DGL an und stelle das Wachstumsgesetz auf. Wie viele Fruchtfliegen sind am Ende der zwei Wochen vorhanden?

Wir bestimmen zunächst die Wachstumskonstante:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_V} = \frac{\ln 2}{3{,}2} \approx 0{,}217\ (\tfrac{1}{\mathrm{d}}).$$

Die DGL des Fruchfliegenwachstums lautet (näherungsweise)

$$N'(t) = 0{,}217 \cdot N(t)$$

mit zugehöriger Lösung, also dem Wachstumsgesetz

$$N(t) = N_0\, e^{\lambda t} = 10\, e^{0{,}217\, t}\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant 14 \quad (t \text{ in Tagen}).$$

Nach zwei Wochen ist

$$N(14) = 10\, e^{0{,}217 \cdot 14} \approx 207{,}5,$$

d.h. es sind 207 Fruchtfliegen vorhanden (im Rahmen des exponentiellen Modells).

Anmerkung: Arbeitet man lieber mit T_V als mit λ, so kann man das Wachstumsgesetz auch als Exponentialfunktion zur Basis 2 darstellen:

$$N(t) = N_0\, e^{\lambda t} = N(t) = N_0\, e^{\frac{\ln 2}{T_V} t} = N_0\, e^{\ln 2 \cdot \frac{t}{T_V}} = N_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{t}{T_V}} = N_0\, 2^{\frac{t}{T_V}},$$

und kommt zum selben Ergebnis $N(14) = 10 \cdot 2^{\frac{14}{3{,}2}} \approx 207{,}5$.

Wir fassen nun die wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnittes noch einmal zusammen.

Merke: Beim *exponentiellen* (natürlichen) *Wachstum* ist die Wachstumsgeschwindigkeit $N'(t)$ proportional zum gerade vorhandenen Bestand $N(t)$. Die zugehörige DGL („lokales Wachstumsgesetz“) lautet

$$N'(t) = \lambda\, N(t),$$

wobei $\lambda > 0$ die *Wachstumskonstante* des Vorgangs ist. Sie hängt über

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{\mathrm{V}}}$$

mit der *Verdopplungszeit* zusammen. Die Lösung der DGL des exponentiellen Wachstums, also das „globale Wachstumsgesetz“, ist gegeben durch

$$N(t) = N_0\, e^{\lambda t}\ , \quad t \geqslant 0.$$

Aufgabe 1.1 Der böse Bazillus Pseudomonas, welcher Wundinfektionen verursacht, besitzt eine Verdopplungszeit von nur etwa 9,8 Minuten. Wie lange dauert es, bis aus hundert dieser Bazillen eine Million geworden sind?[1]

Aufgabe 1.2 Im Dickdarm befinden sich E-Kolibakterien. Bei schwacher körperlicher Verfassung können sie in eine Niere vordringen und Nierenbeckenentzündungen verursachen. Die Infektion macht sich bemerkbar, sobald etwa 10^8 Kolibakterien in der Niere sind. Kolibakterien verdoppeln ihre Anzahl etwa alle 20 Minuten. Angenommen, 100 000 Kolibakterien sind in eine Niere gelangt. Wie viele Stunden dauert es, bis die kritische Anzahl erreicht ist?

Aufgabe 1.3 Zeige allgemein: Vermehrt sich ein exponentiell wachsender Bestand in der Zeit T um $p\%$, so ist die Wachstumskonstante gegeben durch

$$\lambda = \frac{\ln(1 + p\%)}{T}\ .$$

Aufgabe 1.4 Eine Kolonie von Cholera-Bazillen wird zur Zeit $t = 0$ in eine Nährflüssigkeit gebracht. 30 Minuten später besteht sie aus 329 Mitgliedern und 60 Minuten darauf aus 2684.
Wie groß ist die Verdopplungszeit der Bazillen und wie viele Mitglieder hat die Kolonie 5 Stunden nach Beginn des Experiments?

[1] Diese und viele weitere Aufgaben sind dem schönen Buch *Gewöhnliche Differentialgleichungen* von H. Heuser entnommen.

2 Exponentieller Zerfall

Wir erläutern den exponentiellen Zerfall anhand des Klassikers „radioaktiver Zerfall“. Zur Zeit $t \geqslant 0$ seien $N(t)$ Atome einer radioaktiven Substanz vorhanden. Es ist plausibel und experimentell sehr gut bestätigt, dass die *Zerfallsgeschwindigkeit* $N'(t)$ proportional zum gerade vorhandenen Bestand ist[2] (je mehr Atome da sind, desto mehr werden pro Zeiteinheit zerfallen). Damit lautet die DGL des radioaktiven Zerfalls

$$N'(t) = -\lambda\, N(t)$$

mit einer *Zerfallskonstanten* $\lambda > 0$. Das Minuszeichen trägt der Tatsache Rechnung, dass der Bestand abnimmt, denn es ist ja $\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t) < 0$ bzw. $N'(t) < 0$ (negative Wachstumsgeschwindigkeit = Abnahmegeschwindigkeit des Bestands).
Nach den Ausführungen zum exponentiellen Wachstum ist es nun ein leichtes, die Lösung dieser DGL anzugeben: Ist $N_0 = N(0)$ der Anfangsbestand der radioaktiven Substanz, so lautet das *exponentielle Zerfallsgesetz*

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}.$$

(Bestätige durch Ableiten, dass dieses $N(t)$ tatsächlich obige DGL löst.)

In Abbildung 3 ist der Verlauf der exponentiellen Zerfallskurve dargestellt. Man erkennt, dass sich der Bestand nach Verstreichen der *Halbwertszeit* T_H jeweils halbiert. Aus dem Ansatz

$$N(T_H) = \tfrac{1}{2} N_0$$

erhält man völlig analog zum exponentiellen Wachstum die Beziehung

$$T_H = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

für die Halbwertszeit des radioaktiven Zerfallsprozesses, und erkennt auch hier, dass sie nicht vom momentanen Bestand $N(t)$ abhängt (rechne beides nach!).

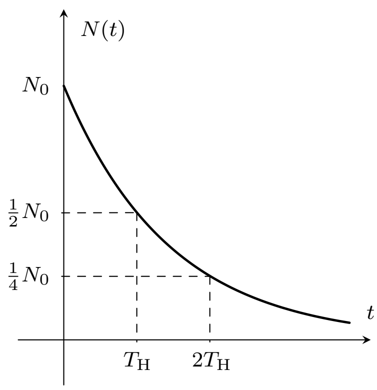


Abbildung 3

Merke: Beim *exponentiellen* (natürlichen) *Zerfall* ist die Zerfallsgeschwindigkeit $N'(t)$ proportional zum noch vorhandenen Bestand $N(t)$. Die zugehörige DGL („lokales Zerfallsgesetz“) lautet

$$N'(t) = -\lambda\, N(t).$$

wobei $\lambda > 0$ die *Zerfallskonstante* des Vorgangs ist. Sie hängt über

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_H}$$

mit der *Halbwertszeit* zusammen. Die Lösung der DGL des exponentiellen Zerfalls, also das „globale Zerfallsgesetz“, ist gegeben durch

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}; \quad t \geqslant 0.$$

Anwendungsbeispiele zum radioaktiven Zerfall finden sich in den Aufgaben.

[2] Entscheidend ist hierbei allerdings, dass es sich um eine *große Anzahl* von Atomen handelt! Für wenige Atome oder gar nur ein Atom sind keinerlei Voraussagen über die Zerfallszeitpunkte möglich.

Beispiel 2.1 Wäsche auf dem Balkon trocknet mit einer zeitlichen Rate, die proportional zu der noch vorhandenen Feuchtigkeit F ist:

$$F'(t) = -\lambda\, F(t) \qquad (\lambda > 0 \ \text{ konstant}).$$

Für Bettwäsche, die an einem warmen Sommertag aufgehängt wird, kann man eine Proportionalitätskonstante von $\lambda = 0{,}85\ \left(\frac{1}{\mathrm{h}}\right)$ annehmen. Wie lange dauert es, bis ein Laken nur noch ein Hundertstel seiner ursprünglichen Feuchtigkeit hat und wie groß ist die Halbwertszeit des Trocknens?

Da es sich um die DGL des exponentiellen Zerfalls handelt, nimmt die Feuchtigkeit des Lakens gemäß der Funktion

$$F(t) = F_0\, e^{-\lambda t}$$

ab, wobei F_0 die Feuchtigkeit zu Beginn bezeichnet. Der Ansatz $F(t) = \frac{1}{100} F_0$ führt auf

$$F_0\, e^{-\lambda t} = 0{,}01\, F_0 \quad \Longrightarrow \quad t = -\frac{\ln(0{,}01)}{\lambda} \approx 5{,}4 \text{ (h)}.$$

Die Halbwertszeit des Trocknens beträgt $T_{\mathrm{H}} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx 0{,}82$ (h), also ca. 50 min.

Aufgabe 2.1 Der Zerfall von 9,8 mg Kalium-42 ($T_{\mathrm{H}} = 12{,}45$ h) wird beobachtet.

a) Wie viel Prozent der Ausgangsmasse werden nach 10 h noch vorhanden sein?

b) Nach wie vielen Stunden werden 3 mg zerstrahlt sein?

Aufgabe 2.2 Eine Probe radioaktives Cäsium-137 verliert durch Zerstrahlung etwa 2,3 % seiner Masse pro Jahr. Leite eine allgemeine Formel für die Zerfallskonstante λ her (wie in Aufgabe 1.3) und berechne λ sowie die Halbwertszeit von Cäsium-137.

Aufgabe 2.3 Radioaktives Strontium-90 ($T_{\mathrm{H}} = 28$ Jahre) wird bei Atombombenexplosionen frei und verseucht die pflanzliche Nahrung von Mensch und Tier. Auf einer Insel ist der Strontium-90-Gehalt nach einem Atombombentest hundertmal höher als die Toleranzgrenze. Wann ist diese Insel frühestens wieder gefahrlos betretbar?

Aufgabe 2.4 *Radiocarbonmethode zur Datierung fossiler Objekte*

Das radioaktive Kohlenstoffisotop ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von $T_{\mathrm{H}} = 5730$ a. In der Atmosphäre ist das Verhältnis von ^{14}C zum stabilen Kohlenstoff ^{12}C nahezu konstant (^{14}C zerfällt zwar laufend, wird aber durch die Weltraumstrahlung auch ständig neu erzeugt). Lebende Organismen weisen dasselbe Verhältnis auf, da sie durch Stoffwechselvorgänge in ständigem Austausch mit ihrer Umwelt stehen. Stirbt ein Organismus, so hört dieser Austausch auf, ^{14}C zerfällt, ohne dass Nachschub kommt, und das Verhältnis von ^{14}C zu ^{12}C ändert sich. Dadurch lässt sich das Alter fossiler Funde recht gut bestimmen.

a) Die Untersuchung einer Probe des „Ötzi“ ergab, dass die mumifizierte Leiche nur noch 58 % des normalen ^{14}C-Gehalts eines lebenden Menschen (vergleichbarer Größe) aufweist. Wann ist Ötzi ungefähr gestorben?

b) Die berühmten Schriftrollen vom toten Meer wurden mit der ^{14}C-Methode auf die Zeit von Christi Geburt zurückdatiert. Auf wieviel Prozent ist der damalige ^{14}C-Gehalt der Schriftrollen inzwischen abgesunken? Warum ist diese Datierung mit Ungenauigkeiten behaftet?

---

3 Kleiner Exkurs über Differenzialgleichungen

Bei allen Gleichungen, die uns bisher in der Schule begegnet sind, wie z.B.

$$5x^2 + 3 = 3x + 7 \qquad \text{oder} \qquad \sin(x + \tfrac{\pi}{4}) = 1$$

war die gesuchte Größe x immer eine *Zahl*. Bei einer Differenzialgleichung (DGL) wie z.B.

$$f(x) + 3f'(x) = f(x)^2 - 4f''(x)$$

ist die gesuchte Lösung eine *Funktion* f, und die DGL stellt eine Beziehung zwischen der Funktion und ihren Ableitungen (also „Differenzialen") her. Das Lösen von DGLen ist eine hochkomplexe Angelegenheit, und wir können mit unserer sehr bescheidenen Schulmathematik nur auf einfachste Beispiele eingehen.

Beispiel 3.1 Die einfachste DGL der Welt lautet

$$f'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihre Lösungen sind alle konstanten Funktionen $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.2 Ebenso einfach zu lösen ist die DGL

$$f''(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

(eine DGL *zweiter Ordnung*, da sie die zweite Ableitung enthält). Hier sind die Lösungen einfach alle linearen Funktionen $f(x) = ax+b$ mit zwei frei wählbaren Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.3 Die DGL

$$f'(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

besitzt als Lösungen alle Funktionen, die mit ihrer ersten Ableitung übereinstimmen. Wie wir bereits wissen, hat die e-Funktion diese schöne Eigenschaft, d.h. alle Funktionen der Gestalt

$$f(x) = c \cdot e^x\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

sind Lösungen dieser DGL. Durch Einfügen eines Faktors $\lambda > 0$ erhalten wir die DGL des natürlichen Wachstums (Zerfalls):

$$f'(x) = \pm\lambda f(x) \qquad \text{mit den Lösungen} \qquad f(x) = c \cdot e^{\pm\lambda x}.$$

✎ ✎ ✎

Aufgabe 3.1 Finde Lösungen der folgenden DGL:

$$f''(x) = -f(x) \qquad \text{oder allgemeiner} \qquad f''(x) = -\omega^2 f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3.2 Weise nach, dass $f(x) = \tan(x + c)$ die folgende DGL löst:

$$f'(x) = 1 + f(x)^2, \quad x \in (-\tfrac{\pi}{2}\,, \tfrac{\pi}{2}\,).$$

Aufgabe 3.3 Im nächsten Abschnitt wird die DGL

$$f'(t) = k\,(S - f(t)), \quad t \geqslant 0,$$

(mit positiven Konstanten k und S) eine zentrale Rolle spielen. Weise nach, dass

$$f(t) = S - c\,e^{-kt}$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieser DGL ist.

Aufgabe 3.4 Rechne nach, dass (für jedes $c \in \mathbb{R}$) die Funktion

$$f(t) = \frac{cS}{c + (S-c)e^{-kSt}}$$

eine Lösung der DGL $\quad f'(t) = k\,f(t)\,\bigl(S - f(t)\bigr) \quad$ ist.

4 Beschränktes Wachstum

Bei fast allen realen Wachstumsprozessen (außer vielleicht der Expansion des Universums) ist dem Bestand f eine obere Grenze gesetzt, d.h. es gibt eine Zahl $S > 0$, so dass $f(t) < S$ für alle Zeiten t gilt. Die kleinste solche obere Schranke S heißt *Sättigungsgrenze*.
Ein vernünftiger Ansatz für eine DGL, welche „einfaches" beschränktes Wachstum[3] beschreibt, ist

$$f'(t) = k\,(S - f(t)) \tag{$\star$}$$

(mit einer positiven Konstante $k > 0$). Die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ ist nicht mehr zum Bestand $f(t)$ proportional, sondern zum Unterschied zwischen $f(t)$ und der Sättigungsgrenze S. Je näher der Bestand an S heranwächst, desto kleiner wird $S - f(t)$ und damit die Wachstumsgeschwindigkeit, d.h. das Wachstum geht immer langsamer vonstatten.
In Aufgabe 3.3 fiel bereits die Lösung $f(t)$ dieser DGL vom Himmel und du solltest nur nachrechnen, dass ($\star$) vom angegebenen $f(t)$ gelöst wird. Nun wollen wir die DGL tatsächlich lösen, d.h. wir wollen aus der DGL das Aussehen der Lösungsfunktion $f(t)$ herleiten. Dazu bedienen wir uns eines Tricks: Wir stellen zunächst eine DGL für die Hilfsfunktion

$$M(t) = S - f(t),$$

das sogenannte *Sättigungsmanko*, auf. Ableiten von M ergibt

$$M'(t) = (S - f(t))' = -f'(t) \overset{(\star)}{=} -k\,(S - f(t)) = -k\,M(t).$$

Es gilt also $M' = -k\,M$, d.h. bei einem durch die DGL ($\star$) beschriebenen Wachstumsprozess zerfällt das Sättigungsmanko $M(t)$ exponentiell! Damit ist

$$M(t) = c\,e^{-kt}\,, \qquad \text{also} \qquad f(t) = S - M(t) = S - c\,e^{-kt},$$

wobei sich c aus der Anfangsbedingung $f(0) = f_0$ ergibt:

$$f(0) = S - c\,e^{0} \overset{!}{=} f_0 \quad \text{liefert} \quad c = S - f_0.$$

[3] In Aufgabe 4.6 wird ein etwas komplizierterer beschränkter Wachstumsprozess vorgestellt.

Damit lautet die Lösungsfunktion von $(\star)$

$$f(t) = S - (S - f_0)\, e^{-kt}.$$

Ihr Verlauf ist in Abbildung 4 dargestellt: Es ist stets $f(t) < S$ und wegen

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = S - (S - f_0) \cdot \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-kt}}_{=0,\text{ da } k>0} = S$$

kommt der Bestand für zunehmende Zeit der Sättigungsgrenze S beliebig nahe.
Zudem verläuft das Wachstum streng monoton steigend und wendepunktfrei (Nachweis!).

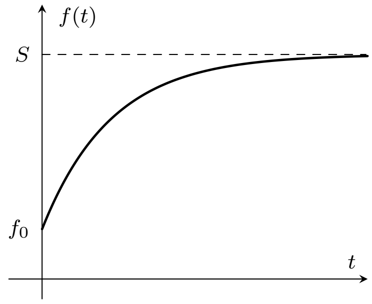


Abbildung 4

Merke: Beim (einfachen) *beschränkten Wachstum* ist die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ proportional zum *Sättigunsmanko*, d.h. dem Unterschied zwischen dem aktuellen Bestand und der *Sättigungsgrenze* S. Die zugehörige DGL lautet

$$f'(t) = k\,(S - f(t)),$$

mit einer Konstanten $k > 0$. Die Lösung der DGL des (einfachen) beschränkten Wachstums zum Anfangswert $f(0) = f_0$ ist gegeben durch

$$f(t) = S - (S - f_0)\, e^{-kt}, \quad t \geqslant 0.$$

Merken kann man sich das so: Es ist $f(t) = S - M(t)$, wobei $M(t)$ das exponentiell sinkende Sättigungsmanko $M(t) = M_0\, e^{-kt}$ mit $M_0 = S - f_0$ (Unterschied zwischen Startwert f_0 und Sättigungsgrenze S) bezeichnet.

Das qualitative Verhalten von $f(t)$ lässt sich bereits an der DGL ganz ohne Kenntnis der Lösung $f(t)$ ablesen: Zu Beginn ist die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(0) = k(S - f_0)$ maximal. Denn aufgrund von $f'(0) > 0$ wächst $f(t)$ an, folglich nimmt das Sättigungsmanko $S - f(t)$ ab, und mit ihm auch die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t) = k(S - f(t))$. Der Kurvenverlauf von $f(t)$ wird also zunehmend flacher; letztendlich strebt $f'(t) \to 0$ und der Wachstumsprozess kommt (fast) zum Erliegen.

Beispiel 4.1 *Ratten (reloaded)*

Das Paarungsverhalten von sechs Ratten, die in einem Käfig gehalten werden, der maximal 50 Ratten fasst, wird drei Monate lang in zweiwöchigen Abständen beobachtet.

t in Wochen	0	2	4	6	8	10	12
Anzahl Ratten	6	21	33	38	41	45	47

Da der Zuwachs pro Zeitschritt abnimmt, kann es sich keinesfalls um exponentielle Vermehrung handeln. Wir versuchen, die Vermehrung der Ratten als (einfachen) beschränkten Wachstumsprozess zu modellieren, d.h. wir machen für die Anzahl $R(t)$ der Ratten den Ansatz

$$R(t) = S - (S - R_0)\, e^{-kt} = 50 - 44\, e^{-kt}.$$

Die Konstante k bestimmen wir aus $R(2) = 21$:

$$R(2) = 50 - 44 \cdot e^{-2k} \overset{!}{=} 21 \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{1}{2} \ln \frac{50-21}{44} \approx 0{,}21 \quad \left(\tfrac{1}{\text{Woche}}\right).$$

Wie Abbildung 5 zeigt, beschreibt die Funktion

$$R(t) = 50 - 44 \cdot e^{-0{,}21\,t}$$

die Anzahl der Ratten während der 12 Wochen bereits recht gut.

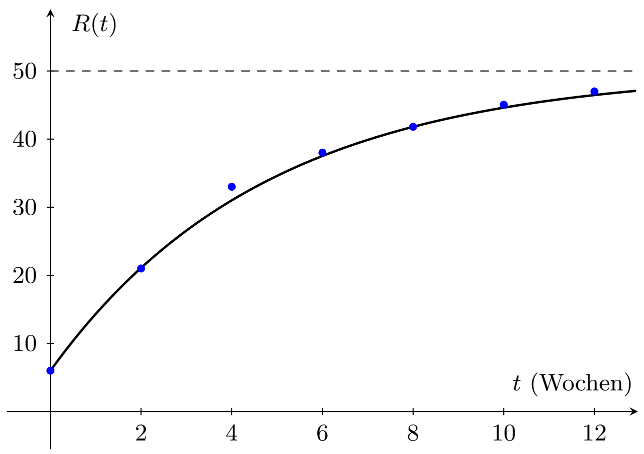


Abbildung 5

Um eine noch bessere Anpassung an die Messdaten zu erreichen, könnte man weitere Werte für k aus den übrigen Funktionswerten bestimmen und dann deren Mittelwert nehmen. Und am allerbesten führt man exponentielle Regression für das Sättigungsmanko durch: Überträgt man obige Tabelle auf die Funktion $M(t) = 50 - R(t)$, so liefert der GTR die Regressionsfunktion (überzeuge dich hiervon)

$$M(t) = 44{,}3 \cdot 0{,}804^t = 44{,}3 \cdot e^{t \ln 0{,}804} = 44{,}3 \cdot e^{-0{,}218\,t},$$

so dass sich hier $R(t) = 50 - 44{,}3 \cdot e^{-0{,}218\,t}$ ergibt. Der Kurvenverlauf ist von obigem allerdings kaum zu unterscheiden.

Beispiel 4.2 *Auflösen eines Salzes*

Kochsalz besitzt eine recht gute Wasserlöslichkeit: Die Sättigunsmenge beträgt $m_S = 357$ g pro Liter (bei 20 °C). Gibt man diese Menge unter Rühren in $1\,\ell$ destilliertes Wasser, so stellt man fest, dass die Löslichkeitsgeschwindigkeit, d.h. die Wachstumsrate der bereits gelösten Salzmenge $m(t)$ proportional zur Menge des noch lösbaren Salzes, $m_S - m(t)$, ist. Die DGL, die diesen Prozess beschreibt, lautet also

$$m'(t) = k(m_S - m(t)),$$

d.h. es handelt sich um einfaches beschränktes Wachstum. Für die gelöste Salzmenge folgt

$$m(t) = m_S - (m_S - m(0)) \cdot e^{-kt} = m_S\bigl(1 - e^{-kt}\bigr),$$

wobei wir $m(0) = 0$ verwendet haben. Wenn sich innerhalb der ersten Minute 120 g NaCl lösen, ergibt sich für die Proportionalitätskonstante $k \approx 0{,}41\ \bigl(\frac{1}{\text{min}}\bigr)$ (rechne dies nach). Für die „Halbzeit“ T_{H}, d.h. die Zeit, nach der die Hälfte des Salzes gelöst ist, ergibt sich

$$m(T_{\text{H}}) = m_S\bigl(1 - e^{-k\,T_{\text{H}}}\bigr) \overset{!}{=} \frac{1}{2}\,m_S \quad\Longrightarrow\quad T_{\text{H}} = -\frac{\ln(\frac{1}{2})}{k} = \frac{\ln 2}{k} \approx 1{,}7\ \ (\text{min}).$$

Wir bestimmen nun noch die Zeit, bis 99 % der Sättigungsmenge erreicht sind, das Salz also fast vollständig gelöst ist:

$$m(t) = m_S\bigl(1 - e^{-0{,}41\,t}\bigr) \overset{!}{=} 0{,}99\,m_S \quad\Longrightarrow\quad t = -\frac{\ln(0{,}01)}{0{,}41} \approx 11{,}2\ \ (\text{min}),$$

d.h. nach ca. 12 Minuten ist der Lösungsvorgang so gut wie beendet.

Beispiel 4.3 *Aufladen eines Kondensators*

Schließt man den Schalter S in der Schaltung aus Abbildung 6, so wird der Kondensator (Kapazität C) über den Widerstand (R) durch die Spannungsquelle (Spannung U_0) aufgeladen. Die DGL, welche diesen Ladevorgang beschreibt, lautet

$$Q'(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} \cdot Q(t),$$

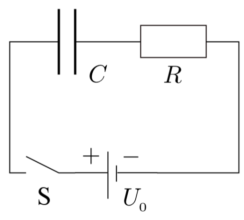


Abbildung 6

wobei $Q(t)$ die zur Zeit t auf dem Kondensator befindliche Ladung bezeichnet. Durch Ausklammern des Terms vor $Q(t)$ bringen wir diese DGL auf die gewohnte Form:

$$Q'(t) = \frac{1}{RC} \cdot \left(\frac{U_0}{R} \cdot RC - Q(t) \right) = \frac{1}{RC} \cdot (U_0 C - Q(t)).$$

Wir erkennen hier die DGL des einfachen beschränkten Wachstums wieder mit $k = \frac{1}{RC}$ und Sättigungsgrenze $S = CU_0$, was dem Physiker als $Q_{\max}$ bekannt ist (die maximale Ladung, die im Kondensator bei Ladespannung U_0 gespeichert werden kann). Die Lösung der DGL lautet

$$Q(t) = S - (S - Q(0))\, e^{-kt} = Q_{\max} - (Q_{\max} - Q(0))\, e^{-\frac{1}{RC} t},$$

und wenn der Kondensator zu Beginn vollständig entladen war, d.h. $Q(0) = 0$, dann vereinfacht sich dies zu

$$Q(t) = Q_{\max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Dabei wurde $\tau = RC$ gesetzt, was man als Zeitkonstante des Kondensators (bzw. RC-Kreises) bezeichnet. Nach Ablauf von 5 Zeitkonstanten gilt

$$Q(5\tau) = Q_{\max}\left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) \approx 99{,}3\%\, Q_{\max}$$

und man kann den Kondensator als so gut wie vollständig geladen betrachten.

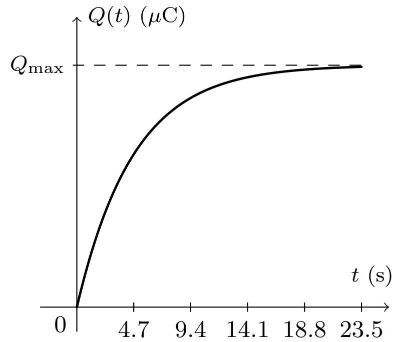


Abbildung 7

Abbildung 7 zeigt den zeitlichen Verlauf der Ladungsmenge $Q(t)$ für $C = 470\,\mu\text{F}$ und $R = 10\,\text{k}\Omega$, was einer Zeitkonstante von $\tau = RC = 4{,}7$ (s) entspricht.

Wem solche physikalischen Anwendungen nicht behagen, der behalte wenigstens Folgendes: Gelegentlich tritt die DGL des einfachen beschränkten Wachstums in der Form

$$f'(t) = a - b \cdot f(t)$$

auf. Durch Ausklammern von b bringt man sie in die Standardform

$$f'(t) = b \cdot \left(\frac{a}{b} - f(t) \right),$$

d.h. mit $k = b$ sowie $S = \frac{a}{b}$, und erhält als Lösung

$$f(t) = \frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b} - f_0 \right) e^{-bt}.$$

Beispiel 4.4 *Aufstellen der DGL eines Mischungsprozesses*

Ein Tank enthalte $1000\,\ell$ Wasser, in dem zu Beginn 50 kg Salz gelöst sind. Nun fließen pro Minute $10\,\ell$ der Lösung aus dem Tank ab; gleichzeitig werden aber auch $10\,\ell$ Wasser mit einem Salzgehalt von 2 kg zugeführt (Zufluss = Abfluss!). Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass im Tank durch gutes Umrühren stets eine sofortige und vollständige Durchmischung stattfindet. Wie werden sich Salzgehalt $m(t)$ (in kg) bzw. Salzkonzentration $c(t)$ (in $\frac{\text{kg}}{\ell}$) im Tank langfristig entwickeln?

Wir überlegen uns dazu (in Physiker-Manier), was in einer (infinitesimal) kleinen Zeitspanne $\mathrm{d}t$ passiert: Wegen Zufluss = Abfluss befinden sich zu jeder Zeit $1000\,\ell$ Salzlösung im Tank, die $1000 \cdot c(t)$ kg Salz enthalten.

- Im (kleinen) Zeitraum von t bis $t + \mathrm{d}t$ fließen $10\ \mathrm{d}t$ Liter aus ($\mathrm{d}t$ in Minuten), die dabei eine Salzmenge von $c(t) \cdot 10\ \mathrm{d}t = 10 \cdot c(t)\ \mathrm{d}t$ (in kg) aus dem Tank entfernen.
- Im selben Zeitraum fließen auch 10 Liter der Konzentration $\frac{2\text{ kg}}{10\ \ell} = 0{,}2\ \frac{\text{kg}}{\ell}$ zu, d.h. es werden $0{,}2 \cdot 10\ \mathrm{d}t = 2\ \mathrm{d}t$ (kg) Salz zugeführt.

Beides zusammen ergibt in der Zeitspanne $\mathrm{d}t$ eine Änderung $\mathrm{d}m$ der Salzmenge von

$$\mathrm{d}m = 2\ \mathrm{d}t - 10 \cdot c(t)\ \mathrm{d}t.$$

Teilen durch $\mathrm{d}t$ (an dieser Stelle verspürt der Mathematiker kräftige Magenschmerzen; dem hartgesottenen Physikermagen bereitet dies aber keinerlei Probleme) führt auf die folgende DGL

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m'(t) = 2 - 10 \cdot c(t),$$

was unter Verwendung von $m(t) = 1000 \cdot c(t)$ auf die DGL für die Salzkonzentration $c(t)$ führt:

$$1000 \cdot c'(t) = 2 - 10 \cdot c(t) \qquad \text{bzw.} \qquad c'(t) = 0{,}002 - 0{,}01 \cdot c(t).$$

Nach Ausklammern von 0,01 erkennen wir, dass es sich um nichts anderes als einfaches beschränktes Wachstum handelt:

$$c'(t) = 0{,}01 \cdot \big(0{,}2 - c(t)\big)$$

mit Lösung $c(t) = 0{,}2 - \big(0{,}2 - c(0)\big) \cdot e^{-0{,}01\,t}$. Wegen $c(0) = \frac{50\text{ kg}}{1000\ \ell} = 0{,}05\ \frac{\text{kg}}{\ell}$ ergibt sich

$$c(t) = 0{,}2 - 0{,}15 \cdot e^{-0{,}01\,t}$$

und für die Masse an Salz folgt

$$m(t) = 1000 \cdot c(t) = 200 - 150 \cdot e^{-0{,}01\,t}.$$

Für $t \to \infty$ strebt $c(t) \to 0{,}2$, d.h. die Salzkonzentration der Lösung spielt sich wie zu erwarten nach einiger Zeit auf die Salzkonzentration $0{,}2\ \frac{\text{kg}}{\ell}$ der zufließenden Lösung ein. Auf lange Sicht wird sich also ein Salzgehalt von 200 kg Salz im Tank einstellen.

Übung: Skizziere den Verlauf von $c(t)$ und berechne, wann 99 % der Sättigungskonzentration erreicht sind. (Lösung: ca. 7 h.)

✎ ✎ ✎

Aufgabe 4.1 (*Abi 2005*) Ein Teich bietet Platz für maximal 7000 Fische. In einem Modell soll angenommen werden, dass die Änderungsrate des Fischbestandes proportional zur Anzahl der noch Platz findenden Fische ist. Anfangs befinden sich 4000 Fische im Teich. Nach einem Monat sind 4400 Fische vorhanden.

a) Gib die zugehörige DGL an und bestimme eine Funktion, welche diesen Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

b) Nach wie vielen Monaten sind 5000 Fische im Teich vorhanden?

c) Wie viele Fische müssten sich am Anfang im Teich befinden, damit bei unveränderten Wachstumsbedingungen erst nach fünf Monaten 5000 Fische vorhanden sind?

Aufgabe 4.2 *Einschaltvorgang einer Spule*

Der Kondensator aus Beispiel 4.3 wird durch eine Spule der Induktivität L ersetzt. Schließt man den Schalter, so wird die Stromstärke $I(t)$ während des Einschaltvorgangs durch die DGL

$$I'(t) = \frac{U_0}{L} - \frac{R}{L} \cdot I(t)$$

beschrieben. (Selbstinduktionseffekte behindern den Strom beim Anstieg auf die Maximalstromstärke I_{max}.) Bestimme den zeitlichen Verlauf der Stromstärke während des Einschaltvorgangs und berechne, nach welcher Zeit die Stromstärke 50 % bzw. 99 % des Maximalwertes $I_{\text{max}} = \frac{U_0}{R}$ erreicht hat. Zahlenwerte: $L = 2\ \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$, $R = 470\ \Omega$.

Aufgabe 4.3 *Sinken in zähem Medium*

Sinkt eine metallische Kugel der Masse m in Öl ($v_0 = 0$), so ist die auftretende Bremskraft nach dem STOKESschen Gesetz proportional zur Geschwindigkeit v der Kugel: $F_{\text{B}} = \alpha \cdot v$, wobei α eine Konstante ist, die vom Radius der Kugel und der Viskosität des Öls abhängt. Der Sinkvorgang wird damit durch folgende DGL beschrieben (die Physiker unter euch leiten sie natürlich her!):

$$v'(t) = g - \frac{\alpha}{m} \cdot v(t) \ .$$

Löse diese DGL, skizziere den Verlauf der $v(t)$-Kurve und bestimme die Grenzgeschwindigkeit v_∞ der Kugel. Zahlenwerte: $m = 1{,}4$ g, $\alpha = 0{,}012\ \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$, $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Aufgabe 4.4 *Tropfinfusion*

Einem Patienten wird über eine Tropfinfusion ein Medikament kontinuierlich verabreicht (welches zuvor im Körper nicht enthalten war). Pro Minute gelangen dabei 5 mg ins Blut, jedoch beginnt die Niere das im Blut angereicherte Medikament wieder auszuscheiden. Die momentane Ausscheidungsrate beträgt dabei 7 % (pro Minute) der im Blut aktuell vorhandenen Menge $m(t)$ des Medikaments.

a) Stelle eine DGL für die zeitliche Entwicklung von $m(t)$ auf.

b) Löse diese DGL und zeige, dass die Tropfinfusion auf lange Sicht zu einer konstanten Menge des Medikaments im Blut führt. Wie groß ist diese maximale Menge und wann sind 90 % davon erreicht?

Aufgabe 4.5 *Smoking kills!*

In einem Zimmer, welches $V = 40\ \mathrm{m}^3$ Luft enthält, sitzen vier Skatbrüder, die beim Zocken wie die Schlote rauchen und zusammen pro Minute $Z = 1{,}5\ \ell$ Zigarrenrauch ausstoßen, der ca. 2 Volumen-% des hochgiftigen Gases CO (Kohlenmonoxid) enthält. Wir nehmen an, dass der Rauch sich sofort und vollständig mit der Zimmerluft vermischt, und dass diese Mischung mit ebenfalls $Z\ \ell/\mathrm{min}$ aus dem Zimmer abzieht.

a) Stelle eine DGL auf, die diesen Vorgang beschreibt und bestimme die CO-Konzentration $c(t)$ im Zimmer (das zu Beginn der Skatrunde frei von CO sein soll).

b) Wie lange dauert es, bis $c(t) = 0{,}08\,\%$ erreicht ist? (Dies führt zu Schwindel, Übelkeit und Gliederzucken; nach 2-stündiger Exposition tritt Bewusstlosigkeit ein!)

c) Wann wäre die lethale Konzentration von $c(t) = 0{,}16\,\%$ erreicht? (Führt zum Tod innerhalb von 2 Stunden!)

Aufgabe 4.6 *Fallschirmspringen*

Beim Fallschirmspringen ist die Luftreibungskraft, die hauptsächlich durch Wirbelbildung entsteht, proportional zum *Quadrat* der Sinkgeschwindigkeit v (und nicht zu v selbst):

$$F_{\mathrm{R}} = \kappa \cdot v^2 \quad \text{mit} \quad \kappa = 40\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\ .$$

(Dabei hängt die Größe des Proportionalitätsfaktors κ von der Form und Größe des Fallschirms sowie der Dichte der Luft ab). Die DGL des Sinkvorgangs eines Fallschirmspringers lautet

$$v'(t) = g - \frac{\kappa}{m} \cdot v(t)^2.$$

a) Weise nach, dass die Funktion

$$v(t) = \lambda \cdot \frac{e^{\varphi t} - 1}{e^{\varphi t} + 1} \qquad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt{\frac{gm}{\kappa}} \quad \text{und} \quad \varphi = 2\sqrt{\frac{g\kappa}{m}}$$

eine Lösung dieser DGL mit $v(0) = 0$ ist.

b) Zeige, dass es sich um eine Art des beschränkten Wachstums handelt, mit einer Grenzgeschwindigkeit von $v_\infty = \lambda$ und berechne diese für einen 80 kg schweren Fallschirmspringer ($g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$). Skizziere das Schaubild von $v(t)$.

c) Nach welcher Zeit hat der Fallschirmspringer 99 % von v_∞ erreicht?

5 Beschränkter „Zerfall“

Wir diskutieren *das* klassische Beispiel für einen beschränkten Abnahmeprozess.

Beispiel 5.1 *Das Newtonsche Abkühlungsgesetz*

Stellt man eine heiße Tasse Kaffee der Temperatur ϑ_0 in ein Zimmer der Temperatur $\vartheta_S < \vartheta_0$, so wird der Kaffee so lange Wärme an die Umgebung abgeben, bis ein Temperaturausgleich erreicht ist. Dieser Ausgleichsprozess gehorcht dem NEWTONschen Abkühlungsgesetz: Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist proportional zum Unterschied zwischen der Temperatur $\vartheta(t)$ des Kaffees und der Umgebungstemperatur ϑ_S (Sättigungsgrenze):

$$\vartheta'(t) = -k\left(\vartheta(t) - \vartheta_S\right), \quad k > 0.$$

Zu Beginn ist die Temperaturdifferenz $\vartheta(0) - \vartheta_S$ maximal und die Abkühlung erfolgt vergleichsweise schnell. Je mehr sich die Temperatur des Kaffees der Zimmertemperatur annähert, desto langsamer geht die Abkühlung vonstatten. Das Minuszeichen trägt der Tatsache Rechnung, dass $\vartheta(t)$ abnimmt. Multipliziert man es in die Klammer, so folgt

$$\vartheta'(t) = k\left(\vartheta_S - \vartheta(t)\right).$$

Dies ist von der Form her die altbekannte DGL des beschränkten Wachstums, nur dass diesmal eben $\vartheta'(t) < 0$ ist. Die Lösung können wir sofort hinschreiben:

$$\vartheta(t) = \vartheta_S - \left(\vartheta_S - \vartheta_0\right)e^{-kt} = \vartheta_S + \left(\vartheta_0 - \vartheta_S\right)e^{-kt}.$$

Zahlenbeispiel: $\vartheta_0 = 85$ °C, $\vartheta_S = 20$ °C, und der Kaffee brauche eine Viertelstunde, bis er sich auf 50 °C abgekühlt hat. Dann ist

$$\vartheta(t) = 20 + (85 - 20)e^{-kt} = 20 + 65\,e^{-kt},$$

und die Konstante k ergibt sich aus $\vartheta(15) = 50$ zu $k \approx 0{,}052\ \left(\frac{1}{\text{min}}\right)$ (Übung). Abbildung 8 zeigt den Verlauf der Abkühlungskurve. Nach 1,5 h ist $\vartheta(90) = 20{,}6$, der Kaffee hat also fast Zimmertemperatur.

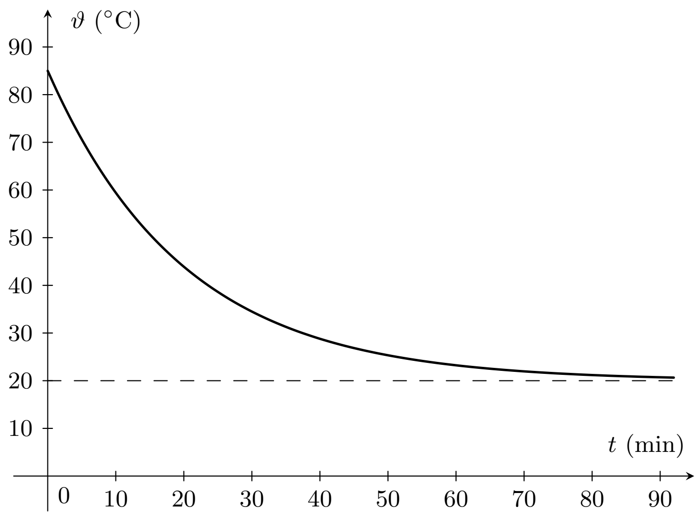


Abbildung 8

Merke: Ein (einfacher) *beschränkter Abnahmeprozess* wird durch die DGL

$$f'(t) = -k\,(f(t) - S) \qquad \text{bzw.} \qquad f'(t) = k\big(S - f(t)\big)$$

beschrieben ($k > 0$); S ist dabei die *untere Sättigungsgrenze*. Ihre Lösung zum Startwert $f(0) = f_0$ lautet

$$f(t) = S + (f_0 - S)\,e^{-kt}, \quad t \geqslant 0.$$

Der Unterschied zum beschränkten Wachstum ist lediglich das Vorzeichen von $S - f(t)$. Am besten merkt man sich die Lösung als $f(t) = S + U(t)$, wobei $U(t) = U_0\,e^{-kt}$ der exponentiell abnehmende Sättigungsüberschuss mit $U_0 = f_0 - S$ ist.
(Exponentieller Zerfall ist nur ein Spezialfall des beschränkten Zerfalls mit $S = 0$.)

Aufgabe 5.1 *Ebbinghaus-Modell des Vergessens*

Du hast dich auf das Mathe-Abi vorbereitet und befindest dich auf dem Höhepunkt deines (schulischen) Mathematikwissens. Mit der Zeit wirst du wohl leider (?) einiges davon vergessen. $f(t)$ beschreibe den Prozentsatz des Mathe-Stoffes, den du zur Zeit t nach dem Abi ($t = 0$) noch im Gedächtnis hast; es ist also $f(0) = 100$ (%). Als Optimist unterstelle ich, dass du einen gewissen Prozentsatz, sagen wir $S = 10$ (%) des Stoffes, nie vergisst.
Das Gedächtnis-Modell von EBBINGHAUS (1850–1909, deutscher Psychologe) geht nun davon aus, dass die *Vergessensrate*, d.h. die zeitliche Änderungsrate von $f(t)$, proportional zum Prozentsatz des noch zu vergessenden Stoffes ist, also

$$f'(t) = k(S - f(t)) \qquad (t \text{ in Wochen, } f(t) \text{ in Prozent})\,.$$

a) Um welche Art von „Zerfall“ handelt es sich? Gib die Lösung $f(t)$ dieser DGL an und zeige durch Einsetzen in die DGL, dass $f(t)$ tatsächlich eine Lösung ist.

b) Berechne k, wenn du nach 4 Wochen bereits 60% vergessen hast und zeichne ein Schaubild von $f(t)$. Nach wie vielen Wochen ist dein Wissen auf 15% gesunken?

c) Auf welchen Prozentsatz ist dein Wissen nach der Zeit $\tau = \frac{\ln 2}{k}$ gesunken (rechne allgemein)? Vergleiche mit der Halbwertszeit beim radioaktiven Zerfall.

d) Bei manchen Schülern erhöht sich zwei Wochen nach dem Abi die „Zerfallskonstante“ durch exzessiven Alkoholkonsum schlagartig von k auf $\tilde{k} = 0{,}5$ (ansonsten läuft der Vergessensprozess nach demselben Gesetz ab). Wie lange dauert es nun, bis nur noch 15% des Wissens im Gedächtnis sind?

Aufgabe 5.2 Vor dir auf dem Frühstückstisch steht eine kochend heiße Tasse Kaffee und ein Kännchen mit kühler Milch. Da du nicht zu spät in Mathe kommen möchtest (Tafelputzen!), soll der Kaffee möglichst schnell abkühlen. Gibst du zuerst etwas Milch zu und lässt das Gemisch dann abkühlen oder machst du es umgekehrt?

Aufgabe 5.3 (*Abi 1996*) Bei der Abkühlung von warmem Tee in einer Umgebung mit der Temperatur ϑ_S wird die Teetemperatur zum Zeitpunkt t beschrieben durch

$$\vartheta(t) = \vartheta_S + a \cdot e^{-0{,}035\,t}\,; \quad t \geqslant 0$$

(t in Minuten; ϑ in °C). Warmer Tee von 60 °C kühlt sich zunächst 15 Minuten lang bei der Zimmertemperatur 20 °C ab. Anschließend wird er in einen Kühlschrank mit 5 °C gestellt.

a) Wie lange dauert es, bis er sich von 60 °C auf 30 °C abgekühlt hat?

b) Nach welcher Zeit hätte man den Tee in den Kühlschrank stellen müssen, damit er bereits nach 25 Minuten die Temperatur 30 °C hat?

6 Ausblick: Logistisches Wachstum

Bei jeder realistischen Modellierung des Wachstums einer Population P muss auch das Sterben ihrer Mitglieder miteinbezogen werden. Bezeichnet γ die Geburtenrate und τ die Todesrate der Population, so wäre der einfachste Ansatz für ihre Entwicklung

$$P'(t) = \gamma P(t) - \tau P(t) = (\gamma - \tau)P(t),$$

was nichts anderes als exponentielles Wachstum mit der Wachstumskonstante $\lambda = \gamma - \tau$ darstellt (für $\lambda > 0$). VERHULST (1804–1849, belgischer Mathematiker) schlug vor, das „Todesglied" τP durch τP^2 zu ersetzen, um hemmenden Einflüssen bei der Entwicklung großer Populationen besser Rechnung zu tragen. So kam er auf die *logistische DGL*

$$P'(t) = \gamma P(t) - \tau P(t)^2,$$

die man durch Ausklammern von τP auch in der Form

$$P'(t) = k\,P(t)\big(S - P(t)\big) \qquad (*)$$

mit $S = \frac{\gamma}{\tau}$ und $k = \tau$ schreiben kann. (Um Verwechslungen zu vermeiden, wird τ zu k umdefiniert, denn τ stellt in der logistischen DGL wegen des quadratischen Terms nicht mehr die gewöhnliche Sterberate dar.) Wie man sieht, handelt es sich bei $(*)$ um eine Mischung aus exponentiellem und einfachem beschränkten Wachstum und in der Tat drückt sich dies auch im Verlauf der Lösungskurve aus. Die Lösung der logistischen DGL $(*)$ ist gegeben durch (Nachweis war Aufgabe 3.4)

$$P(t) = \frac{P_0 S}{P_0 + (S - P_0)e^{-kSt}}\,.$$

Abbildung 9 zeigt ihren Verlauf. Zunächst wächst die Kurve nahezu exponentiell, sobald jedoch die Hälfte des Sättigungsbestandes (auch Trägerkapazität genannt) erreicht ist, erleidet die Population einen „Vitalitätsknick" und es folgt eine Phase beschränkten Wachstums. Mit ständig sinkender Wachstumsrate nähert sich die Population jetzt ihrem Maximalbestand:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{P_0 S}{P_0 + (S - P_0)\cdot 0} = S.$$

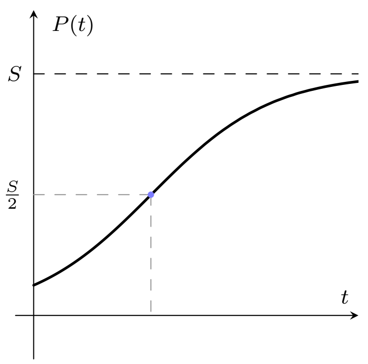


Abbildung 9

Viele Prozess lassen sich gut mit Hilfe des logistischen Wachstums erfassen, z.B. die Bevölkerungszahl der USA (allerdings nur bis 1940), das Höhen-Wachstum von Sonnenblumen und anderen Pflanzen, die Zulassungsraten von Autos in den letzten Jahrzehnten, die Gewichtszunahme bei Ratten, etc. Auch die UN verwendete bei der Prognose über die Entwicklung der Weltbevölkerung eine logistische Modellfunktion. Sie geht dabei von einer Sättigungsgrenze von $S = 11{,}6$ Mrd. Menschen aus, welche Schätzungen zufolge etwa im Jahr 2200 erreicht werden sollte.