Mathematik an der Universität

Mathematik an der Universität ist anfänglich mit einigen Frustrationen verbunden, besonders dann, wenn der Übergang unvorbereitet erfolgt. Ein LK in Mathematik reicht als Vorbereitung nicht aus. Worin ist der Grund für die Frustrationen zu suchen?
Stellen wir uns vor, wir sehen zwei Personen schweigend ein Brettspiel (vielleicht Backgammon) spielen, dessen Regeln wir nicht kennen. Wir versuchen, durch aufmerksames Beobachten die Spielregeln zu entdecken. Dies ist ziemlich nervtötend. Vielleicht entsteht bei uns sogar der Eindruck, dass die Spieler besonders intelligent spielen, obwohl das Spiel in Wirklichkeit auf niedrigem Niveau verläuft. Überdies haben die Spieler keine große Lust, die Spielregeln zu erklären.
In genau derselben Situation befindet sich ein Student in einer Anfängervorlesung in Mathematik. Er fragt sich, warum die Spielregeln, die er auf der Schule gelernt hat, nun nicht mehr gelten. Es kann doch nicht alles überflüssig gewesen sein, was in der Schule gelernt wurde. (Ist es auch nicht.)

Um die Mathematik an der Universität zu verstehen, muss man geschichtlich 250 Jahre zurückgehen. Die damaligen Mathematiker fragten sich, ob eine Rechenregel wie Minus mal Minus bewiesen werden kann. Einige Mathematiker zogen aus negativen Zahlen die Wurzel und der Erfolg ihrer Rechnungen schien ihnen Recht zu geben, obwohl niemandem dabei wohl war. Beim Rechnen mit unendlichen Reihen tauchten widersprüchliche Ergebnisse auf. Von besonderem Interesse war die Frage: Welche Eigenschaften hat eine Funktion, gegen die eine Folge von Funktionen konvergiert? Leibniz entdeckte die Rechenregeln der Differential- und Integralrechnung, ohne sie mathematisch begründen zu können. Diese und viele andere Unzulänglichkeiten führte die Mathematik in eine tiefe Krise. Aus dieser Krise konnte man sich nur befreien, indem man sich auf die Grundlagen der Mathematik besann und das mathematische Gebäude ganz neu aufbaute, und zwar Stein für Stein. Bei jedem Stein fragte man sich ängstlich und kritisch, ob er auch der richtige sei.

Was sollte nun das Fundament sein, auf dem aufgebaut werden sollte? Das Fundament müsste so tragfähig, einfach und übersichtlich sein, dass es von niemandem infrage gestellt werden könnte. Es zeigte sich, dass der elementare Begriff der Menge ausreicht, um z. B. genau zu erklären, was eine Funktion ist. Zunächst werden die Begriffe Teilmenge $A \subset B$, Schnittmenge $A \cap B$, Vereinigungsmenge $A \cup B$ und Komplement $\overline{A}$ einer Menge A definiert. Mit zwei Mengen A und B versteht man unter $A \times B$ die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$. Eine Teilmenge von $A \times B$ heißt Relation. Funktionen sind nun Relationen mit gewissen Eigenschaften. Einige Gesetze der elementaren Mengenlehre lauten:

Assoziativgesetze:	$(A \cup B) \cup C$	$=$	$A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C$	$=$	$A \cap (B \cap C)$
Absorptionsgesetze:	$A \cup (A \cap B)$	$=$	A	$A \cap (A \cup B)$	$=$	A
Distributivgesetze:	$A \cup (B \cap C)$	$=$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C)$	$=$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
de Morgan-Gesetze:	$\overline{A \cup B}$	$=$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B}$	$=$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
doppeltes Komplement:	$\overline{\overline{A}}$	$=$	A			

Innerhalb der Mengenlehre können die natürlichen Zahlen definiert werden. In der Algebra werden Verknüpfungen (Funktionen auf $M \times M$ mit gewissen Eigenschaften) auf Mengen untersucht. Nun ist man in der Lage, rationale, reelle und komplexe Zahlen zu definieren und die Rechenregeln zu beweisen.
Diesen langen mühsamen Weg sollte man am Anfang nicht vollständig gehen, man hätte keine Freude daran und es ist auch nicht nötig. Mathematiker, die ein Teilgebiet (z. B. Analysis) bearbeiten, gehen daher davon aus, dass sie den Körper der reellen Zahlen zur Verfügung haben. Wen es interessiert möge sich mit seiner Konstruktion befassen. Leider bleiben in Vorlesungen die geschichtlichen Hintergründe, das Entstehen von math. Theorien und die bewältigten Schwierigkeiten meistens unerwähnt, stattdessen wird die fertige perfekte Theorie geliefert.

Zur Vorbereitung auf mathematische Vorlesungen sei das Durcharbeiten eines Buchs über elementare Mengenlehre (keine axiomatische Mengenlehre) empfohlen. Mit so einem Buch können das Anfertigen von kleinen Beweisen, mathematische Schreibweisen und mathematische Symbolik geübt werden.
Auch sind Bücher mit Titeln wie Mathematik für Biologen, Mathematik für Chemiker, usw. für das Verständnis nützlich. In ihnen findet man Anwendungen für abstrakte mathematische Sachverhalte.

Roolfs

Cantorsche Mengenlehre

Das Fundament der Mathematik wurde in der Vergangenheit immer wieder erschüttert, wenn sich neue Widersprüche in der Mengenlehre ergaben. Besonders erwies sich das Unendliche als Problem, im Gegensatz zu uns, die wir gewohnt sind, naiv von den unendlich vielen Zahlen zu sprechen, schließlich gibt es zu jeder natürlichen Zahl n einen Nachfolger $n+1$, usw.
Georg Cantor (1845-1918) hat eine Theorie entwickelt, in der der Begriff der Anzahl für endliche Mengen durch den Begriff der Mächtigkeit für unendliche Mengen erweitert wurde, so dass fortan unendliche Mengen aufgrund ihrer Mächtigkeit unterschieden werden konnten. Dies kann bei Fragestellungen, ob zwei Mengen gleich sind, nützlich sein. Viele Mathematiker der damaligen Zeit taten sich schwer, die Cantorschen Gedanken zu übernehmen. Selbst Cantor hatte Mühe, seine eigenen Ergebnisse zu glauben. Heute werden seine Begriffsbildungen selbst in Anfängervorlesungen ohne zu zögern verwendet.

Um festzustellen, ob zwei endliche Mengen A und B gleichviele Elemente haben, kann auf das Nachzählen verzichtet werden. Es genügt, eine eineindeutige Entsprechung zwischen den Elementen der beiden Mengen zu finden. Genauer ist eine Funktion erforderlich, die jedem Element aus A genau ein Element aus B zuordnet, so dass je zwei verschiedene Elemente aus A auch zwei verschiedene Bildelemente in B haben (Funktion ist *injektiv*) und dass jedes Element aus B auch als Bild eines Element aus A auftaucht (Funktion ist *surjektiv*). Funktionen mit diesen beiden Eigenschaften heißen *bijektiv*.

Mengen, die bijektiv aufeinander abgebildet werden können, heißen *gleichmächtig*.

Zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gleichmächtige Mengen heißen *abzählbar*.

1. Was bedeutet es anschaulich, dass eine Menge abzählbar ist?
2. Zeige, dass die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.
3. Zeige, dass die Menge der geraden Zahlen abzählbar ist.

1874 bewies Cantor, dass die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ nicht gleichmächtig ist (Sprechweisen: $\mathbb{R}$ hat eine größere Mächtigkeit als $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ist überabzählbar). Bis an sein Lebensende versuchte Cantor zu beweisen, dass jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ entweder die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ oder die von $\mathbb{R}$ hat. Dies ist die sogenannte *Kontinuumshypothese*. Dieser Sachverhalt konnte erst durch die Ergebnisse von Kurt Gödel (1938) und Paul Cohen (1963) endgültig geklärt werden.

Die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bezeichnete Cantor mit $\aleph_0$ (aleph null). Wie gelangte er nun zu größeren Mächtigkeiten?

Zu $\mathbb{N}$ kann - wie zu jeder Menge - die sogenannte Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gebildet werden. Das ist diejenige Menge, deren Elemente die Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subset \mathbb{N}\}$.
Cantor bewies, dass $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sich nicht bijektiv aufeinander abbilden lassen. Ihre Mächtigkeiten sind also unterschiedlich.

Der Beweis wird indirekt geführt. Wir nehmen an, es gäbe eine solche Abbildung φ von $\mathbb{N}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Jeder natürlichen Zahl n wird durch $\varphi(n)$ eine Teilmenge T aus $\mathbb{N}$ zugeordnet. Dabei kann n in T enthalten sein oder nicht, $n \in \varphi(n) = T$ oder $n \notin \varphi(n) = T$.

Wir betrachten die Teilmenge Q von $\mathbb{N}$, die aus allen n besteht, die nicht in der ihr zugeordneten Teilmenge enthalten sind, $Q = \{n \mid n \notin \varphi(n)\}$.
Zu Q gibt es eine natürliche Zahl q, so dass Q das Bild von q ist, $\varphi(q) = Q$.

4. Was gilt nun: $q \in Q$ oder $q \notin Q$?

Abzählbarkeit bedeutet anschaulich, dass die Elemente hintereinander aufgereiht werden können. Die Elemente von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sind so strukturiert, dass dies mit ihnen nicht möglich ist. Desgleichen sind die reellen Zahlen so kompliziert strukturiert, dass sie sich nicht aufreihen lassen.

5. Was versteht man unter $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

Vorbereitung auf Analysis I

Was ich mit Vorbereitung auf die Anfänger-Vorlesung in Mathematik meine, wird durch die folgenden beiden Übungsblätter deutlich. Zu beachten ist, dass das Semester am 5. Oktober begonnen hatte. Vollständige Induktion und weitere grundlegende Beweistechniken, die verschiedenen Mengenoperationen, Umformungen von Binomialkoeffizienten und Grundlegendes über Funktionen sollten bekannt sein.
Das neue Currikulum (2009) in Niedersachsen wird den Übergang zur Universität nicht erleichtern. Das bewusste Ignorieren der jeweils anderen Seite kennzeichnet die missliche Situation. Eine verantwortungsvollere Haltung wäre wünschenswert.
Die Übungen und Materialien zur linearen Algebra dienen als Gegenbeispiel zum eingangs Gesagten. In ihnen spiegelt sich das Bemühen wider, Mathematik verständlich und motivierend zu lehren.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Analysis
Prof. Dr. B. Krötz, Dr. H. Köditz

Hannover, den 12. Oktober 2009

1. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe bis 19. 10. 2009, 13:00 in die Fächer 148/149 im Lichthof neben dem Haupteingang

Aufgaben mit (*) oder Knacki ergeben Extrapunkte.

Gruppenübungen:

1. Man zeige durch vollständige Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \sum_{k=1}^{n} k^2 \ = \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Sei n eine natürliche Zahl. Wie viele Tripel (a_1, a_2, a_3) natürlicher Zahlen gibt es, die $a_1 + a_2 + a_3 = n$ erfüllen?
3. Seien A, B und C Teilmengen einer Menge X. Man nennt

$$A \,\Delta\, B \ := \ (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

die *symmetrische Differenz* von A und B. Man zeige:

a) $(A \,\Delta\, B) \cap C \ = \ (A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C)$; b) $A \,\Delta\, B \ = \ A \,\Delta\, C \quad \Longrightarrow \quad B \ = \ C$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 *(je 5 Punkte)*

a) Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

b) Man beweise durch vollständige Induktion:

Für ganze Zahlen m, n mit $0 \le m \le n$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} \ = \ \binom{n+1}{m+1}$.

c) Mit $x_0 := 0$, $x_1 := 1$ definieren wir rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} := 4\,x_n - 3\,x_{n-1}$.
Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*

Sei n eine natürliche Zahl. Wie viele Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) natürlicher Zahlen gibt es, die $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n$ erfüllen?
Bemerkung: Fortsetzung von Gruppenübung 2.

Aufgabe 3 *(je 5 Punkte)*

a) Seien M_1, M_2, M_3 Mengen. Man zeige:

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \ = \ (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \quad \text{und} \quad (M_1 \setminus M_2) \setminus M_3 \ = \ M_1 \setminus (M_2 \cup M_3) \ .$$

b) Für Mengen A, B, C widerlege man die Behauptung

$$A \setminus (B \cap C) \ = \ (A \setminus B) \cap C$$

durch zwei geeignete (sauber skizzierte) Venn-Diagramme.

Aufgabe 4 *(2, 5 und 3 Punkte)*

a) Man zeige: Für relle Zahlen a, b mit $0 < a \leq 1 \leq b$ gilt $a + b - ab \geq 1$.

b) Es seien $x_1, x_2, \cdots, x_n$ positive reelle Zahlen mit $\prod_{k=1}^{n} x_k := x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$. Man zeige durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \;\geq\; n \;.$$

Hinweis: a) ist hier nützlich.

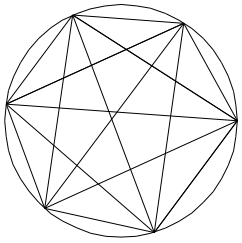
c) Es seien $y_1, y_2, \cdots, y_n$ beliebige positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (AGM-Ungleichung):

$$\sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \;\leq\; \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \;.$$

Aufgabe 5 *(5 und 10 Punkte)* *Knacki*

a) Man zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n := \dfrac{n^4 - 6\,n^3 + 23\,n^2 - 18\,n}{24} + 1 \in \mathbb{N}$.

b) Auf dem Rand einer Kreisscheibe **K** verteilen wir n paarweise verschiedene Punkte. Jeder Punkt wird mit jedem anderen Punkt geradlinig verbunden. Keine drei dieser Verbindungsstrecken mögen sich in inneren Punkten von **K** schneiden. In wie viele Flächenstücke A_n wird die Kreisscheibe auf diese Weise zerlegt?
Hinweis : $A_{n+1} = A_n +$??? -neu hinzugekommene Schnittpunkte betrachten.



Auf der Seite **http://service.ifam.uni-hannover.de/~koeditz/Ana1_09/Ana1_09.htm** finden Sie die Aufgabenblätter im pdf-Format und weitere Informationen.
Dort können und **müssen** Sie sich auch elektronisch anmelden.
Auf **http://service.ifam.uni-hannover.de/math/** wird auch hingewiesen.

Griechisches Alphabet:

Alpha	α	A	Eta	η	H	Ny	ν	N	Tau	τ	T
Beta	β	B	Theta	θ, ϑ	Θ	Xi	ξ	Ξ	Ypsilon	υ	Υ
Gamma	γ	Γ	Iota	ι	I	Omikron	o	O	Phi	ϕ, φ	Φ
Delta	δ	Δ	Kappa	κ	K	Pi	π, ϖ	Π	Chi	χ	X
Epsilon	ϵ, ε	E	Lambda	λ	Λ	Rho	ρ, ϱ	P	Psi	ψ	Ψ
Zeta	ζ	Z	My	μ	M	Sigma	σ	Σ	Omega	ω	Ω

Leibniz Universität Hannover
Institut für Analysis
Prof. Dr. B. Krötz, Dr. H. Köditz

Hannover, den 19. Oktober 2009

2. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe bis 26. 10. 2009, 13:00 in die Fächer 148/149 im Lichthof neben dem Haupteingang

Aufgaben mit (*) oder Knacki ergeben Extrapunkte.

Gruppenübungen:

1. Man zeige: Für $3 < k \leq n$ gilt $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$, und folgere $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge.
   (a) X sei eine endliche Menge [1] mit der Elementanzahl n. Man zeige, dass dann auch die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ endlich mit der Elementanzahl 2^n ist.
   (b) Man ermittle eine Injektion $f : X \to \mathcal{P}(X)$ und eine Surjektion $g : \mathcal{P}(X) \to X$.

3. Sei X eine Menge und $\mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$ die Menge aller Abbildungen der Menge X in die zweielementige Menge $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$. Man zeige, dass die Abbildung $\chi : \mathcal{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$, $\chi_A := \chi(A)$ mit $\chi_A(x) := 1$ für $x \in A$ und $\chi_A(x) := 0$ für $x \notin A$ eine Bijektion ist. Für $A, B \subset X$ ermittle man $\chi_{A\cap B}$, $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\setminus B}$, $\chi_{A\Delta B}$ und beweise damit noch einmal Aufgabe 3a) der Gruppenübung des ersten Blattes.

4. Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Man beweise oder widerlege folgende Behauptungen :
   a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.
   b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch g injektiv.
   c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.
   d) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

5. (a) Man zeige: In einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt: $\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
   für alle $x, y \in \mathbb{K}$ mit $xy \neq 0, x+y \neq 0$.
   (b) Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit $b > 0$ und $d > 0$. Man zeige:
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}\,.$$

Hausaufgaben:

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt : $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$? (beachte Gruppenübung 1)

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Man zeige die Äquivalenz folgender Eigenschaften von f:

$$(i) f \text{ ist injektiv} \;;\; (ii) \forall A, B \subset X : (A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset);\;\; (iii) \forall y \in Y : \# f^{-1}(\{y\}) \leq 1\,.$$

Hierbei steht wieder $\#M$ für die Anzahl der Elemente in M.

[1] Eine Menge X heisst endlich, wenn es eine Bijektion von X auf einen Abschnitt $\mathbb{N}_{\leq n} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$ der natürlichen Zahlen gibt. n heisst dann die Anzahl der Elemente.

Aufgabe 8 *(je 5 Punkte)*

a) Man zeige, dass $\sqrt{7}$ nicht rational ist.

b) Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) := \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Man zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ mit den in $\mathbb{R}$ definierten Verknüpfungen „+“ und „·“ ein Körper ist.

Aufgabe 9 *(3 und 7 Punkte)*

Auf dem Intervall $I = [0, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ betrachten wir die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x}{1+x}$. Man zeige:

a) Die Funktion f ist *streng monoton wachsend*, d.h. für alle $0 \leq x < y$ gilt $\dfrac{x}{1+x} = f(x) < f(y) = \dfrac{y}{1+y}$.

b) Die Funktion f ist *subadditiv* [2] , d.h. für alle $x, y \geq 0$ gilt : $\dfrac{x+y}{1+x+y} \leq \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{y}{1+y}$.

Hieraus folgere man die Richtigkeit von

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \qquad , \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \ .$$

Aufgabe 10 *(10 Punkte)* *Knacki*

Sei $A \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(A)$ ihre Potenzmenge. Man zeige, dass es keine surjektive Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$ gibt.
Hinweis: Man betrachte die Menge $X := \{a \in A : a \notin f(a)\}$. Vorsicht: Hirnverzwirnig!

Aufgabe 11 *(5 Punkte)* *(*)*

Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X betrachte man als Verknüpfung die symmetrische Differenz

$$\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) \qquad , \qquad (A, B) \ \mapsto \ A \triangle B \ .$$

Man zeige, dass diese Verknüpfung kommutativ und assoziativ ist. Gibt es auch ein neutrales Element und zu jedem $A \in \mathcal{P}(X)$ ein Inverses?
Bemerkung: Man beachte Aufgabe 2 der Gruppenübung.

[2] Eine Funktion f heisst subadditiv, falls $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ für alle zulässigen $x, y, x+y$ gilt

Leibniz Universität Hannover
Institut für Analysis
Dr. H. Köditz

Hannover, den 19. Oktober 2009

1. Übungsblatt zur Analysis I (Lösungen)

Aufgaben mit (*) oder Knacki ergeben Extrapunkte.

Aufgabe 1 *(je 5 Punkte)*

a) Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Beweis:

(IA) Für $n = 1$ ist die Beh. offensichtlich richtig.

(IS) Falls $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist (IV), folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{(IV)}{=\!=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \overset{\text{A. Riese}}{=\!=} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \quad \square\,.$$

b) Man beweise durch vollständige Induktion:

Für ganze Zahlen m, n mit $0 \le m \le n$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

Beweis: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ fest gegeben. Induktion über n mit Startwert $n = m$.

(IA) Für $n = m$: $\sum_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$, also richtig.

(IS) Falls die Beh. für n richtig ist (IV) , folgt

$$\sum_{k=m}^{n+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} + \binom{n+1}{m} \overset{(IV)}{=\!=} \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+2}{m+1} \quad \square\,.$$

c) Mit $x_0 := 0$, $x_1 := 1$ definieren wir rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} := 4\,x_n - 3\,x_{n-1}$.

Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Beweis: (vollständige Induktion)

(IA) $0 = x_0 = \frac{3^0-1}{2}$, $1 = x_1 = \frac{3^1-1}{2}$. Für x_0, x_1 ist die Beh. also richtig.

(IS) Falls $x_{n-1} = \dfrac{3^{n-1}-1}{2}$, $x_n = \dfrac{3^n-1}{2}$ richtig ist (IV), folgt

$$x_{n+1} = 4\,\frac{3^n-1}{2} - 3\,\frac{3^{n-1}-1}{2} = \frac{4\cdot 3^n - 4 - 3^n + 3}{2} = \frac{3^{n+1}-1}{2} \quad \square\,.$$

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*

Sei n eine natürliche Zahl. Wie viele Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) natürlicher Zahlen gibt es, die $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n$ erfüllen?

Bemerkung: Fortsetzung von Gruppenübung 2.

Wie schon in in der Gruppenübung sei $p_k(n) := \#\{(a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{N}^k : a_1 + \cdots + a_k = n\}$. Hier ist $n \ge k$ und # steht für Elementanzahl. In unserem Fall ist $k = 4$.

Wir sehen $p_1(n) = 1$, $p_2(n) = n - 1$ und kennen $p_3(n) = \binom{n-1}{2}$ aus der Gruppenübung. Dort haben wir auch die Rekursionsformel $p_k(n+1) = p_k(n) + p_{k-1}(n)$ kennengelernt. Es handelt sich um die bekannte

Rekusionsformel für Binomialkoeffizienten: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (Vorlesung).
Für $k = 4$ ermitteln wir $p_4(4) = 1, p_4(5) = 4, p_4(6) = 10$. Betrachten des Pascaldreiecks

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & \mathbf{1} & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & \mathbf{4} & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & \mathbf{10} & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & \mathbf{20} & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

führt nun auf:

Behauptung: $p_4(n) \;=\; \binom{n-1}{3}$, $n \geq 4$.

Beweis: (vollständige Induktion über n)
(IA) Wegen $p_4(4) = 1$ ist die Behauptung für $n = 4$ richtig.
(IS) Falls die Beh. für ein $n \geq 4$ richtig ist (IV), so folgt:

$$p_4(n+1) \;=\; p_4(n) + p_3(n) \overset{\text{Gruppenübung}}{=\!=\!=} p_4(n) + \binom{n-1}{2} \overset{(IV)}{=\!=} \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3} \;\square\;.$$

Bemerkung:
Natürlich gilt auch $p_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$, $k \geq 2$, $n \geq k$. Der Beweis ist auch nicht wesentlich komplizierter.

Aufgabe 3 *(je 5 Punkte)*

a) Seien M_1, M_2, M_3 Mengen. Man zeige:

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \;=\; (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \quad \text{und} \quad (M_1 \setminus M_2) \setminus M_3 \;=\; M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)\;.$$

Zu zeigen ist, dass ein beliebiges Element der einen Menge auch in der anderen liegt und umgekehrt.

(I) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \;=\; (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$
Beweis:
α) $A := M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \subset (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) := B$
$x \in A \Rightarrow x \in M_1$ und ($x \in M_2$ oder $x \in M_3$). o.B.d.A. $x \in M_2$, also $x \in M_1 \cap M_2 \subset B$ $\square$.

β) $A := M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \supset (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) := B$
$x \in B \Rightarrow (x \in M_1$ und $x \in M_2$ oder $x \in M_1$ und $x \in M_3) \Rightarrow x \in A$ $\square$.

(II) $(M_1 \setminus M_2) \setminus M_3 \;=\; M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)$
b) Für Mengen A, B, C widerlege man die Behauptung $A \setminus (B \cap C) \;=\; (A \setminus B) \cap C$ durch zwei geeignete (sauber skizzierte) Venn-Diagramme.

Beispiel:
$A := \{1\},\; B := \{1\},\; C := \{2\}$. Es folgt: $A \setminus (B \cap C) = A = \{1\},\; (A \setminus B) \cap C = \emptyset$.

Aufgabe 4 *(2, 5 und 3 Punkte)*

a) Man zeige: Für relle Zahlen a, b mit $0 < a \leq 1 \leq b$ gilt $a + b - ab \geq 1$.
Beweis: Seien also $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq 1 \leq b$ gegeben. Dann gilt:

$$a + b - ab \geq 1 \iff b(1-a) = b - ab \geq 1 - a \overset{a<1}{\iff} b \geq 1\;.$$

Für $a = 1$ ist nat. nichts zu zeigen. $\square$

b) Es seien $x_1, x_2, \cdots, x_n$ positive reelle Zahlen mit $\prod_{k=1}^{n} x_k := x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$.

Man zeige durch vollständige Induktion: $\sum_{k=1}^{n} x_k \;\geq\; n$.

Hinweis: a) ist hier nützlich.
Beweis: (durch vollständige Induktion)
(IA) Für $n = 1$ gilt $x_1 = 1$.
(IS) Die Ungleichung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig (IV). Z.z. ist die Richtigkeit für $n+1$. Seien also $x_1, \cdots, x_{n+1}$ positiv mit $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$. Dann gilt auf Grund der Induktionsvoraussetzung:

$$x_1 \;+\; \cdots \;+\; x_{n-1} \;+\; x_n x_{n+1} \;\geq\; n \;.$$

Es ist keine Einschränkung, $x_n \leq 1, x_{n+1} \geq 1$ vorauszusetzen (evt. umsortieren). Damit erhält man mit a):

$$\begin{aligned} x_n(x_{n+1} - 1) \leq x_{n+1} - 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_n x_{n+1} \leq x_n + x_{n+1} - 1 \\ \Rightarrow \quad x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} - 1 \geq x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} &\geq n \;, \end{aligned}$$

die Behauptung. □
Bemerkung: Sind nicht alle x_k gleich (= 1), so kann man sogar $x_n < 1, x_{n+1} > 1$ voraussetzen und erhält die strenge Ungleichung.
c) Es seien $y_1, y_2, \cdots, y_n$ beliebige positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (AGM-Ungleichung):

$$G := \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \;\leq\; \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \;.$$

Beweis: Wir setzen $x_k := \dfrac{y_k}{G}$ und erhalten $\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$. Mit (b) ergibt sich so die Behauptung □.
Das Gleichheitszeichen gilt nach (b) *Bemerkung* genau dann, wenn alle y_k gleich sind.

Aufgabe 5 *(5 und 10 Punkte)* *Knacki*

a) Man zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n := \dfrac{n^4 - 6\,n^3 + 23\,n^2 - 18\,n}{24} + 1 \in \mathbb{N}$.

Beweis: (durch vollständige Induktion)
(IA) Wegen $A_1 = 1$ ist die Beh. für $n = 1$ richtig.
(IS) Falls die Beh. für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist (IV), so folgt der (IS) unter Benutzung von
$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^3 + 4n + 1$, $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ und $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{(n+1)^4 - 6\,(n+1)^3 + 23\,(n+1)^2 - 18\,(n+1)}{24} + 1 \\ &= A_n + \frac{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 6(3n^2 + 3n + 1) + 23(2n+1) - 18}{24} \\ &= A_n + \frac{n^3 - 3n^2 + 8n}{6} \;. \end{aligned}$$

Der letzte Bruch ist offensichtlich positiv. Bleibt also $B_n := \frac{n^3 - 3n^2 + 8n}{6} \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Neuer Induktionsbeweis:

(IA) Wegen $B_1 = 1$ ist diese Beh. für $n = 1$ richtig.

(IS) Gilt $B_n \in \mathbb{N}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV), so folgt:

$$B_{n+1} = B_n + \frac{3n^2 + 3n + 1 - 3(2n+1) + 8}{6} = B_n + \frac{3n^2 - 3n + 6}{6} \;\square \;.$$

b) Auf dem Rand einer Kreisscheibe **K** verteilen wir n paarweise verschiedene Punkte. Jeder Punkt wird mit jedem anderen Punkt geradlinig verbunden. Keine drei dieser Verbindungsstrecken mögen sich in inneren Punkten von **K** schneiden. In wie viele Flächenstücke A_n wird die Kreisscheibe auf diese Weise zerlegt?
Hinweis : $A_{n+1} = A_n +???$ -neu hinzugekommene Schnittpunkte betrachten.

Die Punkte auf dem Kreisrand seien $x_1, \cdots, x_n$ und die Anzahl der Flächenstücke sei A_n. Kommt ein neuer Punkt x_{n+1} hinzu und liegen r neue Schnittpunkte auf der Verbindungsstrecke (x_{n+1}, x_k), so kommen $r+1$ neue Flächenstücke hinzu. Man erhält so die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \sum_{k=1}^{n}(k-1)(n-k) + n = A_n + n\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 - n^2 + \sum_{k=1}^{n} k + n \\ &= A_n + \frac{1}{6}\left(n^3 - 3n^2 + 8n\right) \qquad \Longrightarrow \\ A_n &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k^3 - 3k^2 + 8k) + 1 \;=\; \frac{1}{24}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n\right) + 1\ . \end{aligned}$$

Benutzt wurde Gruppenübung 1 und HA1. So erhält man die Folge $1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, \cdots$.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Analysis
Dr. H. Köditz

Hannover, den 26. Oktober 2009

2. Übungsblatt zur Analysis I (Lösungen)

Aufgaben mit (*) oder Knacki ergeben Extrapunkte.

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt : $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$?

(i) Behauptung: Die Ungleichung $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis: (Induktion)
(IA) Für $n = 1$ ist die Beh. offensichtlich richtig.
(IS) Sei sie nun für ein n richtig. Dann:
$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n 3 \geq \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$,
da $3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{(1+1/n)^n} \geq 1$ - Gruppenübung 1.

(ii) Behauptung: Die Ungleichung $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$.
Beweis: (Induktion)
(IA) Für $n = 6$ ist die Beh. wegen $6! = 720 < (6/2)^6 = 3^6 = 729$ richtig.
(IS) Ist die Beh. für ein $n \geq 6$ richtig, so folgt:
$(n+1)! = n!(n+1) < \left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n 2 \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$,
da $2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{(1+1/n)^n} \leq 1$ $\square$. (Bernoulli-Ungleichung; $(1+1/n)^n \geq 1 + n/n = 2$)

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Man zeige die Äquivalenz folgender Eigenschaften von f:

$$(i) f \text{ ist injektiv} \;\; ; \;\; (ii) \forall A, B \subset X : (A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset); \;\; (iii) \forall y \in Y : \# f^{-1}(\{y\}) \leq 1 \; .$$

Hierbei steht wieder $\#M$ für die Anzahl der Elemente in M.

Aufgabe 8 *(je 5 Punkte)*

a) Man zeige, dass $\sqrt{7}$ nicht rational ist.

Wir benutzen, dass jede natürliche Zahl eine (bis auf Reihenfolge) eindeutig bestimmte Darstellung als Produkt von Primzahlen besitzt.
Zu zeigen ist, dass für alle $\left(\frac{p}{q}\right)^2 \neq 7$ für alle $p, q \in \mathbb{N}$.
Beweis: (durch Widerspruch)
Annahme: Es gebe $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p^2 = 7q^2$. Es ist keine Einschränkung vorauszusetzen, dass p und q teilerfremd sind (sonst erst kürzen). p^2, also auch p ist deshalb durch 7 teilbar und kann in der Form $p = 7k$ mit passendem $k \in \mathbb{N}$ geschrienen werden. Es regibt sich so $q^2 = 7k^2$. Auch q ist durch 7 teilbar im Widerspruch zur vorausgesetzten Teilerfremdheit $\square$.

b) Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) := \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Man zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ mit den in $\mathbb{R}$ definierten Verknüpfungen „+“ und „·“ ein Körper ist.

Beweis: Wegen $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) \subset \mathbb{R}$ sind alle körperaxiome bis auf die Existenz des (multiplikativ) Inversen in $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ trivialerweise erfüllt.
Sei als $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{7})$, $x = a + b\sqrt{7} \neq 0$- d.h. $(a, b) \neq (0, 0)$ gegeben. Dann ist

$$x^{-1} \;=\; \frac{1}{a + b\sqrt{7}} \;=\; \frac{a - b\sqrt{7}}{a^2 - 7b^2} \;=\; \frac{a}{a^2 - 7b^2} - \frac{b}{a^2 - 7b^2}\sqrt{7} \;\in\; \mathbb{Q}(\sqrt{7})$$

ein Inverses, da $a^2 - 7b^2 \neq 0$ nach a) $\square$.

Aufgabe 9 *(3 und 7 Punkte)*
Auf dem Intervall $I = [0, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ betrachten wir die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x}{1+x}$. Man zeige:

a) Die Funktion f ist *streng monoton wachsend*, d.h. für alle $0 \leq x < y$ gilt $\dfrac{x}{1+x} = f(x) < f(y) = \dfrac{y}{1+y}$.

Beweis:

$$x < y \;\Rightarrow\; x(1+y) = x + xy < y + xy = y(1+x) \;\Rightarrow\; \frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y} \;\square\;.$$

b) Die Funktion f ist *subadditiv*, d.h. für alle $x, y \geq 0$ gilt : $\dfrac{x+y}{1+x+y} \;\leq\; \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{y}{1+y}$.

Beweis: Banal!

$$\frac{x+y}{1+x+y} \;=\; \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \;\leq\; \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \;\square\;.$$

Hieraus folgere man die Richtigkeit von

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \;\leq\; \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \qquad , \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\;.$$

Wegen $|x - y| \leq |x| + |y|$ folgt aus a):

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \;\leq\; \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \;=\; \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \;\leq\; \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}\;.$$

Aufgabe 10 *(10 Punkte)* *Knacki*
Sei $A \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(A)$ ihre Potenzmenge. Man zeige, dass es keine surjektive Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$ gibt.
Hinweis: Man betrachte die Menge $X := \{a \in A : a \notin f(a)\}$. Vorsicht: Hirnverzwirnig!

Beweis:
(Beweis durch Widerpruch - indirekter Beweis). Wir nehmen an es gäbe eine surjektive Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$ und betrachten die Menge $X := \{a \in A : a \notin f(a)\}$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = X$. Auf Grund der Def. von X folgt nun der Widerspruch $a \in X \iff a \notin X$ $\square$.

Aufgabe 11 *(5 Punkte)* *(*)*
Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X betrachte man als Verknüpfung die symmetrische Differenz

$$\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) \qquad , \qquad (A, B) \;\mapsto\; A \triangle B\;.$$

Man zeige, dass diese Verknüpfung kommutativ und assoziativ ist. Gibt es auch ein neutrales Element und zu jedem $A \in \mathcal{P}(X)$ ein Inverses?

Bemerkung: Man beachte Aufgabe 2 der Gruppenübung.

Beweis: Zunächst zur letzten Frage: Wegen $A\Delta\emptyset = A$ ist die leere Menge das neutrale Element. Wegen $A\Delta A = \emptyset$ ist jede Menge dann zu sich selbst invers.

Die Kommutativität ist klar. Nun zur Assoziativität. In der GÜ3 haben wir gezeigt:
$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$, $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cdot B}$, $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_b - 2\,\chi_A \cdot \chi_B$.
Damit:

$$\begin{aligned}
\chi_{(A\Delta B)\Delta C} &= \chi_{A\Delta B} + \chi_C - 2\,\chi_{A\Delta B}\chi_C = (\chi_A + \chi_B - 2\,\chi_A\chi_B)(\chi_X - 2\,\chi_C) + \chi_C \\
&= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\,\chi_A\chi_B - 2\,\chi_A\chi_C - 2\,\chi_B\chi_C + 4\,\chi_A\chi_B\chi_C \\
\chi_{A\Delta(B\Delta C)} &= \chi_A + \chi_{B\Delta C} - 2\,\chi_A\chi_{B\Delta C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\,\chi_B\chi_C - 2\,\chi_A(\chi_B + \chi_C - 2\,\chi_B\chi_C) \\
&= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\,\chi_A\chi_B - 2\,\chi_A\chi_C - 2\,\chi_B\chi_C + 4\,\chi_A\chi_B\chi_C \ \square\ .
\end{aligned}$$

Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. M. Erné

8. Oktober 2009

Übungen zur Linearen Algebra I
Wintersemester 2009/10
Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 15.10.2009, bis 11.00 Uhr in das Postfach „Lineare Algebra“

1. Es seien $C = \{\emptyset\}$, $A = \{C, \{\emptyset\}\}$ und $B = \{\{C\}, \emptyset\}$.

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

   (a) $\emptyset \in A$ (b) $\emptyset \subseteq A$ (c) $\emptyset \in B$ (d) $\emptyset \subseteq B$
   (e) $C \in A$ (f) $C \subseteq A$ (g) $C \in B$ (h) $C \subseteq B$.

   Wieviele Element hat $A \cap B$, wieviele $A \cup B$? Begründen Sie Ihre Ergebnisse!

2. Für jede Teilmenge A der Menge X bezeichne $A^c := X \setminus A$ das **Komplement** von A in X. Beweisen Sie für Teilmengen A und B von X:

   (a) $A \setminus B = A \cap B^c$ (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

   (c) Listen Sie alle Paarmengen $\{A, A^c\}$ mit $A \in \mathcal{P}(X)$ für $X = \underline{4} = \{1, 2, 3, 4\}$ auf!

3. Die **symmetrische Differenz** zweier Mengen A und B ist $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Begründen Sie folgende Gleichungen und zeichnen Sie je ein zugehöriges Venn-Diagramm!

   (a) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (b) $(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$.

4. Beweisen Sie für Mengen A und B die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (a) $A = A \cap B$ (b) $B = A \cup B$ (c) $A \setminus B = \emptyset$ (d) $A \subseteq B$.

Knacky 1

Meister Algebradabra verblüfft sein Publikum mit einem Kartenkunststück. Jeder Zuschauer erhält ein Kartenspiel und behält davon einen beliebigen Teil, während die restlichen Karten von sämtlichen Zuschauern zusammengeworfen, gemischt und dem Magier übergeben werden, worauf dieser den Raum verlässt. Nun vergleicht ein erster Zuschauer mit einem zweiten sein Blatt, übernimmt von diesem alle Karten, die auch in seinem eigenen Blatt vorkommen, und übergibt ihm stattdessen alle anderen Karten seines Blattes. Dann verfährt der zweite mit einem dritten Zuschauer in gleicher Weise, und so fort. Hat schließlich der vorletzte mit dem letzten Zuschauer in der selben Weise die Karten getauscht, so wird der Magier hereingerufen und verkündet dem erstaunten Publikum, welche Karten der letzte Zuschauer in der Hand hat! Wie hat er das herausgefunden?

Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. M. Erné

15. Oktober 2009

Übungen zur Linearen Algebra I
Wintersemester 2009/10
Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 22.10.2009, bis 11.00 Uhr in das Postfach „Lineare Algebra“

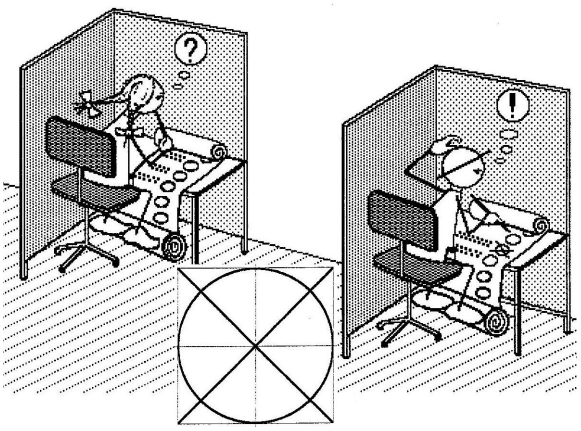
1. Welche der folgenden Abbildungen sind (i) injektiv, (ii) surjektiv, (iii) bijektiv? (Begründung!)
   (a) $F : X \to Y,\ x \mapsto x^4$, wobei
   (1) $X = Y = \mathbb{R}$, (2) $X = \mathbb{R},\ Y = [\,0)$, (3) $X = Y = [\,0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
   (b) $K : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M),\ A \mapsto A^c$, wobei M eine beliebige Menge ist.
   (c) $P : X \to Y,\ (x_1, x_2) \mapsto x_1$, wobei $I = [-1, 1]$ und
   (1) $X = I \times I,\ Y = \mathbb{R}$, (2) $X = I \times I,\ Y = I$, (3) $X = \Delta_I := id_I,\ Y = I$.

2. Beweisen Sie für Mengen A, B, C und D:
   (a) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$ (b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
   In welchen Fällen bleibt die Gleichung (b) wahr, wenn man $\cap$ durch $\cup$ ersetzt? (Begründung, Skizze!)

3. Die **Fibonacci–Folge** (F_n) ist definiert durch $F_0 := 1,\ F_1 := 1,\ F_n := F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n > 1)$.
   (a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \geq 2$ gilt $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^{n+1}$.
   (b) Deuten Sie diese Gleichung geometrisch durch einen Flächenvergleich von Rechtecken! (Skizze!)
   (c) Hat ein rechtwinkliges Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten F_{n-1} und F_{n+1} die Höhe F_n?

4. M sei eine mindestens zweielementige Menge. Welche der folgenden Relationen sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch, konnex? (Kurze Begründung!)
   (a) Die Relation $\between$ auf $\mathcal{P}(M)$ mit $A \between B :\Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$;
   (b) Die Relation $\perp\!\!\!\perp$ auf der Menge der Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$, wobei
   $G \perp\!\!\!\perp H \ :\Longleftrightarrow\ G$ ist parallel oder senkrecht zu H.

Knacky 2: Nach der Wahl ist vor der Wahl



Bei den Kommunalwahlen sind ziemlich viele Kreuzchen zu machen. Wenn wir ein für alle Mal ein „Wahlkreuz“ computergraphisch erfassen wollen, wäre es nützlich, das ganze Bild (Kreis und beide Diagonalen) durch eine einzige Gleichung zu beschreiben und die Menge der Bildpunkte in der Form

$$R = \{(x, y) \in I \times I \mid F(x) = F(y)\}$$

anzugeben, wobei F eine geeignete Funktion von $I = [-1, 1]$ nach I ist. Können Sie eine solche Funktion bestimmen? Kann dieses F (a) injektiv, (b) surjektiv gewählt werden? Wieviele Elemente haben die Äquivalenzklassen der Relation R?

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Mengen

Grundobjekte mathematischer Theorien sind *Mengen*. Zwar stellt man sich darunter Gesamtheiten von gewissen Dingen (den *Elementen* der Menge) vor, doch führt die uneingeschränkte „Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens“ (wie es der Begründer der Mengenlehre, G. Cantor, formulierte) zu Mengen auf logische Paradoxien, z. B. die sogenannte *Russellsche Antinomie*, die bei Zulassung der „Menge“ aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten, entsteht. Deshalb muss man gelegentlich zwischen Mengen und „Unmengen“, den sogenannten *echten Klassen*, unterscheiden. In elementaren mathematischen Theorien wie der linearen Algebra hat es sich jedoch als unproblematisch erwiesen, auf diese Unterscheidung zu verzichten. An derartigen mengentheoretischen Problemen Interessierte mögen das ausgezeichnete Buch „Naive Mengenlehre“ von P. Halmos zu Rate ziehen.

Zur Vereinfachung der schriftlichen Formulierung mathematischer Aussagen benutzt man

1.1.1 Logische Symbole.

$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\neg$	nicht
$\Longrightarrow$	impliziert
$\Longleftrightarrow$	ist äquivalent zu (gleichbedeutend mit)
$\forall$, $\bigwedge$	für alle
$\exists$, $\bigvee$	es gibt

Ausdrücke der Form

$$A := B \text{ bzw. } A :\Longleftrightarrow B$$

bedeuten, daß die linke Seite durch die rechte definiert wird, wobei im ersten Fall A und B *Terme* (meist Mengen) sind, im zweiten Fall hingegen *Aussagen*.

Mengen werden üblicherweise beschrieben durch Angabe ihrer Elemente, sei es durch konkrete Aufzählung oder durch Bedingungen, die diese Elemente charakterisieren:

$$A = \{x \mid E(x)\}$$

steht für „A ist die Menge aller Elemente mit der Eigenschaft E“.

1.1.2 Definition. (Element– und Teilmengenbeziehung)
Wir schreiben $x \in A$, falls x Element der Menge A ist, und $x \notin A$ sonst.
$A \subseteq B$ bedeutet, daß A eine *Teilmenge* von B ist, also jedes Element von A auch zu B gehört:

$$A \subseteq B :\Longleftrightarrow \forall x \; (x \in A \Longrightarrow x \in B).$$

Ist zusätzlich A von B verschieden, so nennen wir A eine *echte Teilmenge* von B und schreiben $A \subset B$. Definitionsgemäß gilt

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A\,.$$

1.1.3 Notation. (Spezielle Mengen)

$\emptyset$	leere Menge (enthält kein Element)
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen ab 1: $\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen: $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen (Brüche): $\{\frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{z}{n} \mid z, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen (unendlichen Dezimalbrüche)
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen: $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{N}_k$	Menge der ganzen Zahlen $\geq k$: $\{k, k+1, \ldots\}$
$\underline{k}$	Menge der ganzen Zahlen n mit $1 \leq n \leq k$: $\{1, 2, \ldots k\}$ (insbesondere $\underline{0} = \emptyset$)

Für eine beliebige Menge A bezeichne A^* die Menge $A \setminus \{0\}$.

1.1.4 Bemerkung. Es gilt

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\,.$$

Wir verzichten auf eine axiomatische Einführung dieser Mengen und der bekannten Relationen $<$ (kleiner), $\leq$ (kleiner oder gleich), $>$ (größer), $\geq$ (größer oder gleich).

1.1.5 Definition. (Reelle Intervalle)

$[\,a) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	*rechter abgeschlossener Strahl*	
$]\,a) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	*rechter offener Strahl*	
$(b\,] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	*linker abgeschlossener Strahl*	
$(b\,[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	*linker offener Strahl*	
$[\,a, b\,] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	*abgeschlossenes beschränktes Intervall*	
$]\,a, b\,[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	*offenes beschränktes Intervall*	
$[\,a, b\,[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	*rechts halboffenes beschränktes Intervall*	
$]\,a, b\,] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	*links halboffenes beschränktes Intervall*	

Oft bezeichnet man auch die ganze reelle Gerade $\mathbb{R}$ als Intervall.

1.1.6 Definition. (Mengenoperationen)

$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	*(Vereinigung von A und B)*
$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	*(Durchschnitt von A und B)*
$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	*(Komplement von B in A)*

A und B sind *disjunkt*, falls $A \cap B = \emptyset$.

1.1.7 Bemerkungen. Es seien A, B, C beliebige Mengen.

(1) *Zerlegungsgesetze:*

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

und $A \cup B$ ist die Vereinigung der disjunkten Mengen $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$.

(2) *Assoziativgesetze:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ und } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(3) *Kommutativgesetze:*

$$A \cup B = B \cup A \text{ und } A \cap B = B \cap A.$$

Hingegen ist $A \setminus B = B \setminus A$ nur für $A = B$ richtig.

(4) *Distributivgesetze:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ und } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(5) *Komplementgesetze* oder *de Morgansche Regeln:*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \text{ und } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

1.1.8 Beispiele. Durchschnitte und Vereinigungen von Intervallen

$$[\,a,b\,] = [\,a) \cap (b\,]\,,\ \ ]\,a,b\,[=]\,a) \cap (b\,[\,,\ \ [\,a,b\,[= [\,a) \cap (b\,[\,,\ \ ]\,a,b\,] =]\,a) \cap (b\,]\,,$$

$$a < b < c \implies [\,a,b\,] \cup [\,b,c\,] = [\,a,b\,[\cup [\,b,c\,] = [\,a,b\,] \cup]\,b,c\,] = [\,a,c\,].$$

Im Falle $a > b$ ist jedes der Intervalle $[\,a,b\,]$, $]\,a,b\,[$, $[\,a,b\,[$ und $]\,a,b\,]$ leer!

1.1.9 Definition. Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M besteht aus allen Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) := \{B \mid B \subseteq M\}.$$

Ein *Mengensystem* auf M ist eine Teilmenge $\mathcal{X}$ von $\mathcal{P}(M)$.

$$\bigcup \mathcal{X} := \{x \mid \text{ es gibt ein } B \in \mathcal{X} \text{ mit } x \in B\} = \{x \mid \exists\, B \in \mathcal{X}\ (x \in B)\}$$

heißt *Vereinigung* von $\mathcal{X}$, und falls $\mathcal{X} \neq \emptyset$, so heißt

$$\bigcap \mathcal{X} := \{x \mid \text{ für alle } B \in \mathcal{X} \text{ gilt } x \in B\} = \{x \mid \forall\, B \in \mathcal{X}\ (x \in B)\}$$

Durchschnitt von $\mathcal{X}$.

Konvention: Ist eine feste Grundmenge M vorgegeben, so setzt man

$$\bigcap \emptyset := M$$

(eventuell genauer $\bigcap_M \emptyset := M$).

1.1.10 Bemerkungen. Für beliebige Mengen A, M und Mengensysteme $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$ gelten:

(1) die *unendlichen Distributivgesetze:*

$$A \cap \bigcup \mathcal{X} = \bigcup \{A \cap B \mid B \in \mathcal{X}\} \text{ und } A \cup \bigcap \mathcal{X} = \bigcap \{A \cup B \mid B \in \mathcal{X}\},$$

(2) die *unendlichen Komplementgesetze* (oder *de Morganschen Regeln*):

$$A \setminus \bigcup \mathcal{X} = \bigcap \{A \setminus B \mid B \in \mathcal{X}\} \text{ und } A \setminus \bigcap \mathcal{X} = \bigcup \{A \setminus B \mid B \in \mathcal{X}\}.$$

Beachten Sie:

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} \text{ und } A \cap B = \bigcap \{A, B\}.$$

Als schreibtechnische Vereinfachung setzt man analog

$$A \cup B \cup C = \bigcup \{A, B, C\}\,, \;\; A \cap B \cap C = \bigcap \{A, B, C\} \;\; \text{etc.}$$

1.1.11 Definition. Das *geordnete Paar* (a, b) ist definiert als die Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Das *n–Tupel* $(a_1, \ldots, a_n)$ wird „induktiv“ definiert durch

$$(a_1) := a_1, \quad (a_1, \ldots, a_n) := ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n) \qquad (n > 1).$$

Für beliebige Mengen $A_1, \ldots, A_n$ heißt

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i \in \underline{n}\}$$

das *kartesische Produkt* von $A_1, \ldots, A_n$. Speziell:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

Ist $A_1 = A_2 = \ldots A_n$, so schreibt man A^n für das n-fache kartesische Produkt $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

1.1.12 Bemerkungen. (1) Die konkrete Definition von Paaren und n–Tupeln spielt im folgenden keine Rolle. Wichtig ist jedoch, daß zwei n–Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ genau dann gleich sind, wenn sie in jeder „Koordinate“ übereinstimmen, d. h. $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

(2) Interpretiert man $\mathbb{R}$ als „reelle Gerade“, so entspricht das Produkt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Ebene und das dreifache Produkt $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dem dreidimensionalen Raum.

(3) Analog kann man Produkte von Intervallen bilden und erhält dann im zweidimensionalen Fall „Rechtecke“ bzw. im dreidimensionalen Fall „Quader“.

(4) Es gilt stets

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$$

und

$$(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2) \subseteq (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cup B_2)$$

aber hier steht fast immer eine echte Inklusion!

(5) Es gilt „beinahe“ (bis auf etwas abweichende Klammerungen) das *Assoziativgesetz*

$$A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3\,,$$

aber *nicht* das *Kommutativgesetz*! Falls $\emptyset \neq A_1 \neq A_2 \neq \emptyset$, so ist

$$A_1 \times A_2 \neq A_2 \times A_1\,.$$

1.2 Relationen

1.2.1 Definition. Eine *Relation* zwischen (Elementen von) A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$. Wir schreiben $a\,R\,b$ für $(a, b) \in R$ und sagen in diesem Fall: „a steht in Relation (R) zu b“ oder „zwischen a und b besteht die Relation R“.

$$R^{-1} := \{(b, a) \mid a\,R\,b\}$$

heißt die *zu R duale Relation* oder *Umkehrrelation* zu R. Offenbar ist $(R^{-1})^{-1} = R$.
Die *Verknüpfung* zweier Relationen R und S ist gegeben durch

$$R \circ S := SR := \{(a, c) \mid \text{ Es gibt ein } b \text{ mit } aSb \text{ und } bRc\}.$$

1.2.2 Rechenregeln. (Relationenverknüpfung)

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$
$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T),\ (R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$$
$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T),\ (R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$$
$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$
$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$
$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$
$$R \subseteq S \Longrightarrow R \circ T \subseteq S \circ T,\ T \circ R \subseteq T \circ S.$$

1.2.3 Definition. Eine Relation R *auf* A ist eine Teilmenge von $A \times A$. Solch eine Relation R heißt

(r)	*reflexiv*,	falls $a\,R\,a$
(s)	*symmetrisch*,	falls $a\,R\,b \Longrightarrow b\,R\,a$
(t)	*transitiv*,	falls $a\,R\,b$ und $b\,R\,c \Longrightarrow a\,R\,c$
(a)	*antisymmetrisch*,	falls a $R\,b$ und $b\,R\,a \Longrightarrow a = b$
(k)	*konnex* oder *total*,	falls $a\,R\,b$ oder $b\,R\,a$

für alle a, b, $c \in A$ gilt.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt *Äquivalenz(relation)* und wird häufig mit $\sim$, $\approx$ oder $\simeq$ bezeichnet.

Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt *(Halb–)Ordnung* und wird meist mit $\sqsubseteq$ oder $\leq$ bezeichnet.

Ein *kleinstes Element* (bzw. *größtes Element*) einer Menge B bezüglich einer Relation R ist ein eindeutiges $a \in B$ mit $a\,R\,b$ (bzw. $b\,R\,a$) für alle $b \in B$. Eine *Wohlordnung* ist eine Relation R auf A, so daß jede nichtleere Teilmenge B von A ein kleinstes Element hat.

1.2.4 Satz. (Totale Ordnungen)
Eine Relation R ist genau dann eine totale Ordnung auf A, wenn jede nichtleere Teilmenge von A mit höchstens drei Elementen ein kleinstes Element bezüglich R hat.

Insbesondere ist jede Wohlordnung eine totale Ordnung.

1.2.5 Beispiele. $\leq$ ist eine Wohlordnung auf jeder Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, speziell also auf jeder der Mengen $\mathbb{N}_k$. Ohne axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen und der Ordnung $\leq$ können wir dies allerdings nicht beweisen. Auf $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist $\leq$ eine totale Ordnung, aber keine Wohlordnung.

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt: $m \leq n \iff \exists\, k \in \mathbb{N}_0\ (m + k = n)$.

1.2.6 Definition. Für $k, n \in \mathbb{Z}$ nennt man k einen *Teiler* von n bzw. n ein *Vielfaches* von k, in Zeichen $k \mid n$, falls ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $k \cdot z = n$ existiert. Weiterhin setzt man $m \equiv_k n$ und sagt, m sei *kongruent* n *modulo* k, falls k ein Teiler von $m - n$ ist, also m und n bei Division durch k den gleichen Rest übrig lassen. Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl $p > 1$, die nur 1 und p als positive Teiler hat.

1.2.7 Beispiele.

Relation	r	s	t	a	k	Äquivalenz	Ordnung	totale Ordnung	Wohlordnung
$=$ auf $\mathbb{N}$	+	+	+	+	−	+	+	−	−
$\neq$ auf $\mathbb{N}$	−	+	−	−	−	−	−	−	−
$\leq$ auf $\mathbb{N}$	+	−	+	+	+	−	+	+	+
$<$ auf $\mathbb{N}$	−	−	+	+	−	−	−	−	−
$\mid$ auf $\mathbb{N}$	+	−	+	+	−	−	+	−	−
$\mid$ auf $\mathbb{Z}$	+	−	+	−	−	−	−	−	−
$\equiv_k$ auf $\mathbb{Z}$	+	+	+	−	−	+	−	−	−

Die Wohlgeordnetheit der Mengen $\mathbb{N}_k$ (siehe 1.2.5) erweist sich als äquivalent zu folgendem

1.2.8 Satz. (Prinzip der vollständigen Induktion)
Sei M eine Menge und $k \in \mathbb{N}_0$ derart, daß jedes $n \in \mathbb{N}_k$ mit $m \in M$ für alle kleineren $m \in \mathbb{N}_k$ ebenfalls in M liegt. Dann ist $\mathbb{N}_k$ eine Teilmenge von M.

1.2.9 Bemerkung. (Praktische Durchführung der vollständigen Induktion)
Um eine Aussage $\mathrm{A}(m)$ für alle $n \in \mathbb{N}_k$ zu beweisen, genügt es, aus der Annahme, daß $\mathrm{A}(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}_k$ mit $m < n$ richtig ist, zu folgern, daß auch $\mathrm{A}(n)$ gilt.
Achtung: Zunächst muss $\mathrm{A}(k)$ nachgeprüft werden (*Induktionsanfang*). Meist ist $k = 0$ oder 1.

Meist benutzt man den

Schluss von n auf $n+1$:

Gilt $\mathrm{A}(k)$ und folgt aus $\mathrm{A}(n)$ stets auch $\mathrm{A}(n+1)$, so ist $\mathrm{A}(n)$ für alle n aus $\mathbb{N}_k$ richtig.

Eine Anwendung der vollständigen Induktion ist z. B. der folgende

1.2.10 Satz. (Fundamentalsatz der Zahlentheorie)
Jede von 0 und 1 verschiedene natürliche Zahl ist als Produkt von Primzahlen darstellbar, und diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

1.3 Funktionen und Abbildungen

Anschaulich werden durch eine Abbildung gewissen Elementen einer Menge solche einer anderen (oder der gleichen) Menge „zugeordnet“. Mathematisch präziser ist folgende

1.3.1 Definition. Eine *Funktion* von A nach B (oder von A in B) ist eine Relation $F \subseteq A \times B$, so daß zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $a\,F\,b$ existiert. Dieses eindeutig bestimmte b wird mit $F(a)$ bezeichnet; man sagt, *F bildet a auf b ab*, und nennt b das *Bild von a unter F*. Umgekehrt nennt man a ein (!) *Urbild von b unter F*. Schreibweise:

$$F : A \longrightarrow B,\ a \longmapsto b\,.$$

Es sind also gleichbedeutend: $(a, b) \in F$, $a\,F\,b$, $F(a) = b$, $F : a \longmapsto b$.

Das Tripel (A, F, B) bezeichnet man als *Abbildung* mit *Definitionsbereich* A und dem *Ziel* B. (Vielfach wird nicht zwischen Funktionen und Abbildungen unterschieden.) Für $X \subseteq A$ heißt

$$F^+(X) := \{F(x) \mid x \in X\}$$

Bild(menge) von X unter F. Sind keine Missverständnisse zu befürchten, schreibt man auch $F(X)$ statt $F^+(X)$. Für $Y \subseteq B$ heißt andererseits

$$F^-(Y) := \{x \in A \mid F(x) \in Y\}$$

Urbild(menge) von Y unter F. Üblich ist auch die Schreibweise $F^{-1}(Y)$, im Einklang mit der Definition der Umkehrrelation F^{-1}. Diese ist aber im allgemeinen keine Funktion!

F heißt *injektiv*, falls aus $F(a) = F(a')$ stets $a = a'$ folgt.

Im Falle $F^+(A) = B$ nennt man F eine *surjektiven* Funktion von A nach B oder kurz eine Funktion von A *auf* B. Eine zugleich injektive und surjektive Funktion heißt *bijektiv*. Entsprechend definiert man injektive, surjektive und bijektive Abbildungen. (Beachten Sie, dass man über Surjektivität nur entscheiden kann, wenn man das Ziel kennt!)

1.3.2 Lemma. *Für jede Funktion $F : A \longrightarrow B$ sowie beliebige Mengensysteme $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(B)$ gilt:*

$$F^+(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup\{F^+(X) \mid X \in \mathcal{X}\}, \quad F^-(\bigcup \mathcal{Y}) = \bigcup\{F^-(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\},$$
$$F^+(\bigcap \mathcal{X}) \subseteq \bigcap\{F^+(X) \mid X \in \mathcal{X}\}, \quad F^-(\bigcap \mathcal{Y}) = \bigcap\{F^-(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\}.$$

Für injektives F gilt in der dritten Beziehung die Gleichheit, sonst im allgemeinen nicht.

1.3.3 Lemma. *Es sei F eine Funktion von A nach B.*

(1) *F ist injektiv* $\iff$ *jedes Element von B hat höchstens ein Urbild unter F.*

(2) *F ist surjektiv* $\iff$ *jedes Element von B hat mindestens ein Urbild unter F.*

(3) *F ist bijektiv* $\iff$ *jedes Element von B hat genau ein Urbild unter F.*

(4) *F ist injektiv* $\iff$ *F^{-1} ist eine Funktion (von $F(A)$ nach A).*

(5) *F ist bijektiv* $\iff$ *F^{-1} ist eine Funktion von B nach A.*

1.3.4 Lemma. *Ist F eine Abbildung von A nach B und G eine Abbildung von B nach C, so ist die* verknüpfte *Abbildung oder* Komposition *$G \circ F : A \longrightarrow C$ gegeben durch $G \circ F(a) = G(F(a))$. Ist $F : A \longrightarrow B$ und $G : B \longrightarrow C$ injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv), so auch $G \circ F$.*

1.3.5 Bemerkung. Nach 1.2.2 gilt stets $H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$. Aber im allgemeinen ist $F \circ G \neq G \circ F$: Beispielsweise erhält man für

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x+1 \quad \text{und} \quad G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2\ :$$

$F(G(x)) = F \circ G(x) = x^2+1$, aber $G(F(x)) = G \circ F(x) = x^2+2x+1$, also $F \circ G(1) \neq G \circ F(1)$.

1.3.6 Definition. Für eine beliebige Menge A heißt die Relation

$$\mathrm{id}_A := 1_A = \{(a,a) \mid a \in A\} = \{(a,b) \in A \times A \mid a = b\}$$

Diagonale oder *Identität* oder *Gleichheitsrelation* auf A.

1.3.7 Lemma. id_A *ist eine Funktion mit* $\mathrm{id}_A(a) = a$. *Für* $F : A \longrightarrow B$ *gilt:*

$$F \circ \mathrm{id}_A = F = \mathrm{id}_B \circ F.$$

1.3.8 Definition. Ist $A : I \longrightarrow B$ eine Abbildung, so schreibt man gelegentlich A_i statt $A(i)$ und nennt A eine *(durch I indizierte) Familie*, die auch mit $(A_i \mid i \in I)$ oder $(A_i)_{i \in I}$ bezeichnet wird. In diesem Fall heißt

$$\prod_{i \in I} A_i := \{\, F : I \longrightarrow \bigcup \{A_i \mid i \in I\} \mid F_i \in A_i \text{ für jedes } i \in I\}$$

die *Menge der Auswahlfunktionen* von $(A_i \mid i \in I)$.

Ist $(A_i \mid i \in I)$ eine Familie von Mengen mit $A_i = A$ für jedes $i \in I$, so ist

$$A^I := \prod_{i \in I} A_i$$

die *Menge der Abbildungen von I nach A* (nicht umgekehrt!).
Eine Abbildung $F : \mathbb{N}_k \longrightarrow A$ (d. h. ein Element von $A^{\mathbb{N}_k}$) heißt *Folge* in A. Meist „starten“ Folgen bei 0 oder 1, haben also den Definitionsbereich $\mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{N}$.

1.3.9 Bemerkungen. (1) $A^{\underline{n}}$ ist die Menge der Abbildungen F von $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ nach A. Da eine solche Abbildung durch ihr „Bildtupel“ $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ eindeutig festgelegt ist, „identifiziert“ man F mit $(F_1, F_2, \ldots, F_n) \in A^n$. Umgekehrt bestimmt jedes solche n–Tupel genau eine Abbildung $F : \underline{n} \longrightarrow A$. Die Menge $A^{\underline{n}}$ ist also im wesentlichen das gleiche wie A^n.

(2) Eine Folge $(F_n \mid n \in \mathbb{N})$ ist eindeutig festgelegt, wenn die „Anfangswerte“ $F_0, \ldots, F_{k-1}$ bekannt sind und jedes F_n mit $n \in \mathbb{N}_k$ mit Hilfe der F_m für $m < n$ definiert bzw. berechenbar ist („*rekursive Definition*“ oder „*Definition mittels vollständiger Induktion*“).

1.3.10 Beispiele.

(1) Die *Fakultät* $n!$ ist definiert durch

$$0! := 1, \quad n! := (n-1)! \cdot n \quad (n > 0).$$

(2) Die *Fibonacci–Folge* (F_n) ist definiert durch

$$F_0 := 1, \quad F_1 := 1, \quad F_n := F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n > 1).$$

Für viele mathematische Beweise benötigt man das anschaulich einleuchtende

1.3.11 Auswahlaxiom. Zu jeder Familie nichtleerer Mengen gibt es eine Auswahlfunktion:

$$A_i \neq \emptyset \text{ für alle } i \in I \Longrightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

1.3.12 Satz. *Sei A eine nichtleere Menge. Eine Funktion $F : A \longrightarrow B$ ist*

(1) *injektiv* $\iff$ *es existiert eine Funktion $G : B \longrightarrow A$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_A$*
$\iff$ $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_A$,

(2) *surjektiv* $\iff$ *es existiert eine Funktion $G : B \longrightarrow A$ mit $F \circ G = \mathrm{id}_B$*
$\iff$ $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_B$,

(3) *bijektiv* $\iff$ *es existiert eine Funktion $G : B \longrightarrow A$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_A$, $F \circ G = \mathrm{id}_B$*
$\iff$ $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_A$ *und* $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_B$.

1.3.13 Definition.

Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, falls eine Bijektion zwischen ihnen existiert.

Eine Menge heißt *endlich*, wenn sie zu einem $\underline{n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gleichmächtig ist.

Zu $\mathbb{N}_0$ gleichmächtige Mengen heißen *abzählbar unendlich*.

Eine Menge A heißt *abzählbar*, wenn eine Surjektion von $\mathbb{N}_0$ auf A existiert.

1.3.14 Bemerkungen. (1) Mit $\sharp A$ oder *card* A oder $|A|$ bezeichnet man die Anzahl der Elemente einer Menge A, genannt *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* der Menge. Für endliche Mengen ist die Mächtigkeit ein wohlbekannter Begriff.

(2) $\sharp A = \infty$ bedeutet „A ist *unendlich*“, d. h. zu keinem $\underline{n}$ gleichmächtig.

(3) Genaueres über Mächtigkeiten unendlicher Mengen lernt man in der *Mengenlehre*, z. B. ist

$$\sharp\mathbb{N} = \sharp\mathbb{Z} = \sharp\mathbb{Q} \neq \sharp\mathbb{R} = \sharp\mathbb{C}.$$

1.3.15 Satz. (Mächtigkeitsformeln)
Für endliche Mengen A, B gilt:

(1) *A und B sind gleichmächtig* $\iff$ $\sharp A = \sharp B$.

(2) $\sharp A + \sharp B = \sharp(A \cup B) + \sharp(A \cap B)$.

(3) $\sharp(A \times B) = \sharp A \cdot \sharp B$.

(4) $\sharp(A^B) = \sharp A^{\sharp B}$.

1.3.16 Satz. (Selbstabbildungen endlicher Mengen)
Für jede Abbildung $F : E \longrightarrow E$ einer endlichen Menge E in sich gilt:

$$F \text{ injektiv} \iff F \text{ surjektiv} \iff F \text{ bijektiv}.$$

1.3.17 Definition. Eine *Partition* oder *Zerlegung* einer Menge A ist ein Mengensystem $\mathcal{Z}$ nichtleerer Teilmengen von A, so daß jedes Element von A zu genau einer der Mengen aus $\mathcal{Z}$ gehört.
Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so bezeichnet

$$\sim a := [a]_\sim := \{b \in A \mid a \sim b\}$$

die *Äquivalenzklasse* von a (bzgl. $\sim$). $A/\sim$ bezeichnet die Menge all dieser Äquivalenzklassen.

1.3.18 Satz. (Äquivalenzrelationen und Partitionen)

(1) *Für jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf A ist $A/\sim$ eine Partition $\mathcal{Z}$.*

(2) *Für eine Partition $\mathcal{Z}$ von A sei $F(a)$ derjenige „Block“ $Z \in \mathcal{Z}$, der a enthält. Dann ist $F : A \longrightarrow \mathcal{Z}$ eine surjektive Abbildung mit $\mathcal{Z} = \{F^-(\{Z\}) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$.*

(3) *Für jede surjektive Abbildung $F : A \longrightarrow B$ definiert*

$$a \sim a' :\Longleftrightarrow F(a) = F(a')$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A mit $A/\sim = \{F^-(\{b\}) \mid b \in B\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Äquivalenzrelation} \arrow[dr, "(a)"] & \\
\text{Abbildung} \arrow[ur, "(c)"] & & \text{Partition} \arrow[ll, "(b)"]
\end{tikzcd}$$

1.3.19 Folgerung. *Folgende Aussagen über ein Mengensystem $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(A)$ sind äquivalent:*

(a) *$\mathcal{Z}$ ist eine Partition von A, d. h. $\bigcup \mathcal{Z} = A$ und für $X, Y \in \mathcal{Z}$ gilt $X \cap Y \neq \emptyset \Longleftrightarrow X = Y$.*

(b) *Es gibt (genau) eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A mit $\mathcal{Z} = A/\sim$.*

(c) *Es gibt eine surjektive Abbildung $F : A \longrightarrow B$ mit $\mathcal{Z} = \{F^{-1}[\{b\}] \mid b \in B\}$.*

1.3.20 Definition. Ist $\sqsubseteq$ eine (totale) Ordnung auf A, so bezeichnet man das Paar $(A, \sqsubseteq)$ als *(total) geordnete Menge*. Ein Element $b \in A$ heißt *minimales Element* (bzw. *maximales Element*) von A, falls es kein von b verschiedenes $a \in A$ mit $a \sqsupseteq b$ (bzw. $b \sqsubseteq a$) gibt.

1.3.21 Bemerkungen. (1) Ein größtes Element ist stets maximal, aber nicht umgekehrt. Beispielsweise ist jede Menge A größtes Element der durch $\subseteq$ geordneten Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$, und für $a \in A$ ist $A \setminus \{a\}$ maximales, aber kein größtes Element von $\mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$, falls A mehr als ein Element hat.

(2) Bei totalen Ordnungen ist jedoch ein maximales Element bereits das größte Element.

(3) Größte bzw. kleinste Elemente sind im Gegensatz zu maximalen bzw. minimalen Elementen eindeutig bestimmt.

(4) $\mathbb{N}$ hat genau ein minimales, aber kein maximales Element.

1.3.22 Satz. *Jede nichtleere endliche geordnete Menge hat mindestens ein maximales Element und ein minimales Element. Insbesondere hat jede nichtleere endliche total geordnete Menge ein größtes Element und ein kleinstes Element.*

Im Unendlichen braucht man für einige Existenzaussagen der linearen Algebra und andere Bereiche der Mathematik das folgende „Maximalprinzip“, das sich mit Hilfe des Auswahlaxioms beweisen läßt:

1.3.23 Satz. (Maximalprinzip oder Zornsches Lemma)
Ist $\mathcal{X}$ ein Mengensystem, so daß zu jedem durch die Teilmengenrelation $\subseteq$ total geordneten Mengensystem $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ ein $X \in \mathcal{X}$ mit $\bigcup \mathcal{Y} \subseteq X$ existiert, so besitzt $\mathcal{X}$ mindestens ein bezüglich der Relation $\subseteq$ maximales Element.

Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. M. Erné

15. Oktober 2009

Übungen zur Linearen Algebra I
Wintersemester 2009/10
Lösungsvorschläge zu Blatt 1

1. (Je 1 Punkt)
Es seien $C = \{\emptyset\}$, $A = \{C, \{\emptyset\}\}$ und $B = \{\{C\}, \emptyset\}$.
Also gelten $A = \{C\} = \{\{\emptyset\}\}$ und $B = \{\{C\}, \emptyset\} = \{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset\}$.
(a) $\emptyset \in A$ ist falsch; A besitzt genau ein Element, nämlich: $C = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.
(b) $\emptyset \subseteq A$ ist wahr. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.
(c) $\emptyset \in B$ ist wahr nach Definition von B.
(d) $\emptyset \subseteq B$ ist wahr. (Vgl. (b))
(e) $C \in A$ ist wahr nach Definition von A.
(f) $C \subseteq A$ ist falsch, da $\emptyset \in C$, jedoch $\emptyset \notin A$.
(g) $C \in B$ ist falsch, da die Elemente von B genau $\emptyset$ und $\{C\}$ sind, jedoch $\emptyset \neq C \neq \{C\}$.
(h) $C \subseteq B$ ist wahr: C besitzt genau ein Element, nämlich $\emptyset$, und $\emptyset \in B$.
(i) $A \cap B = \emptyset$, da $\emptyset \neq C \neq \{C\}$. Daher hat $A \cap B$ 0 Elemente.
(j) $A \cup B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. Daher hat $A \cup B$ genau 3 Elemente.

2.(a) (3 Punkte)

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x : \ x \in A \text{ und } x \notin B\} \\ &= \{x : \ x \in A \text{ und } x \in B^c\} \quad = \quad A \cap B^c. \end{aligned}$$

2.(b) (3 Punkte)

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &= \{x : \ x \notin (A \cap B)\} \\ &= \{x : \ x \notin A \text{ oder } x \notin B\} \ = \ A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

2.(c) (4 Punkte)

$\{\emptyset, \{1,2,3,4\}\}$,

$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $\{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $\{\{3\},\{1,2,4\}\}$, $\{\{4\},\{1,2,3\}\}$,

$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$.

Es gibt 8 verschiedene Paarmengen.

3.(a) (4 Punkte)

$$\begin{aligned} A \Delta B &\overset{2.a}{=} (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \\ &\overset{2.b}{=} (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = \\ &\overset{Distr.}{=} ((A \cup B) \cap A^c) \cup ((A \cup B) \cap B^c) = \\ &\overset{Distr.}{=} (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) = \\ &= \emptyset \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup \emptyset = \\ &\overset{Komm.}{=} (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \\ &\overset{2.a}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

3.(b) (6 Punkte)

$$
\begin{aligned}
(A \setminus C)\Delta(B \setminus C) &= ((A \setminus C) \cup (B \setminus C)) \setminus ((A \setminus C) \cap (B \setminus C)) \\
&\overset{2.a}{=} ((A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)) \setminus ((A \cap C^c) \cap (B \cap C^c)) \\
&\overset{Distr.}{=} ((A \cup B) \cap C^c) \setminus (A \cap B \cap C^c) \\
&\overset{2.a}{=} (A \cup B) \cap C^c \cap (A \cap B \cap C^c)^c \\
&\overset{2.b}{=} (A \cup B) \cap C^c \cap (A^c \cup B^c \cup C) \\
&\overset{Distr.}{=} (A \cup B) \cap ((C^c \cap A^c) \cup (C^c \cap B^c) \cup (C^c \cap C)) \\
&= (A \cup B) \cap ((C^c \cap A^c) \cup (C^c \cap B^c)) \\
&\overset{Distr.}{=} (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \cap C^c \\
&\overset{2.b}{=} ((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) \cap C^c \\
&\overset{2.a}{=} ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C^c \\
&= (A\Delta B) \cap C^c \\
&\overset{2.a}{=} (A\Delta B) \setminus C.
\end{aligned}
$$

4. (10 Punkte)

(a) $\Longleftrightarrow$ (d):

$$
\begin{aligned}
A = A \cap B &\iff A \subseteq A \cap B \ \wedge \ A \cap B \subseteq A \\
&\iff A \subseteq A \cap B \\
&\iff A \subseteq A \ \wedge \ A \subseteq B \\
&\iff A \subseteq B.
\end{aligned}
$$

(b) $\Longleftrightarrow$ (d): $B = A \cup B \iff A \cup B \subseteq B \iff A \subseteq B.$

(c) $\Longleftrightarrow$ (d):

$$
\begin{aligned}
A \setminus B = \emptyset &\iff \{x : \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\} = \emptyset \\
&\iff (x \in A \ \Rightarrow x \notin B^c) \\
&\iff (x \in A \ \Rightarrow x \in B) \\
&\iff A \subseteq B.
\end{aligned}
$$

Knacky 1.

Wir bezeichnen mit A_i die Menge der Karten, die der i-te Zuschauer seinem Kartenspiel entnimmt, und mit B_i den Rest dieses Kartenspiels. Setzen wir $K_1 = A_1$, so hat (unter Verwendung der symmetrischen Differenz $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$) der zweite Zuschauer nach dem Tausch mit dem ersten die Kartenmenge $K_2 = K_1 \triangle A_2$ in der Hand, der dritte nach dem Tausch mit dem zweiten die Kartenmenge $K_3 = K_2 \triangle A_3$ usw., bis schließlich der n-te und letzte Zuschauer die Kartenmenge $K_n = K_{n-1} \triangle A_n$ in der Hand hält. Per Induktion folgt, dass K_n genau diejenigen Karten enthält, die in einer ungeraden Anzahl der Mengen A_i auftreten: Für $n = 1$ ist diese Anzahl definitionsgemäß gleich 1, und ist sie für $n - 1$ Mengen ungerade, so auch für n Mengen, denn in der n-ten Hand befinden sich genau diejenigen Karten, die zu K_{n-1}, aber nicht zu A_n gehören (also nach Induktionsannahme zu eine ungeraden Zahl von Mengen A_i), oder zu A_n, aber nicht zu K_{n-1} (also zu A_n oder einer geraden Anzahl der Mengen $A_1, \ldots, A_{n-1}$, d. h. ebenfalls einer ungeraden Zahl von Mengen A_i). Enthält nun die Restmenge $B_1 \cup \cdots \cup B_n$, die dem Magier übergeben wurde, die Karte k genau r_k mal, so muss er lediglich wissen, ob die Zahl $n - r_k$ ungerade oder gerade ist, um festzustellen, ob diese Karte in K_n vorkommt oder nicht. Dazu braucht er nur ein gutes Gedächtnis, aber keine übersinnlichen Kräfte.

Übrigens folgt aus dieser Überlegung sofort das Assoziativgesetz für die symmetrische Differenz: $A_1 \triangle (A_2 \triangle A_3) = (A_2 \triangle A_3) \triangle A_1 = (A_1 \triangle A_2) \triangle A_3$ enthält diejenigen Elemente, die in genau einer der Mengen A_1, A_2, A_3 oder in allen dreien vorkommen.

Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. M. Erné

22. Oktober 2009

Übungen zur Linearen Algebra I
Wintersemester 2009/10
Lösungsvorschläge zu Blatt 2

1. (a.1) F ist weder injektiv (denn für $x \neq 0$ ist $x \neq -x$ aber $F(x) = x^4 = (-x)^4 = F(-x)$) noch surjektiv (denn negative reelle Zahlen sind keine Funktionswerte von F), und somit auch nicht bijektiv.

(a.2) Für Zahlen $y > 0$ ist die Urbildmenge $F^-(\{y\}) = \{\sqrt[4]{y}, -\sqrt[4]{y}\}$ zweielementig, also ist F zwar surjektiv, aber weder injektiv noch bijektiv.

(a.3) F ist bijektiv (also injektiv und surjektiv): Für jedes Element $y \in Y = [0)$ ist die Urbildmenge $F^-(\{y\}) = \{\sqrt[4]{y}\} \subset X = [0)$ einelementig.

(b) Die Abbildung K ist ihre eigene Umkehrabbildung und damit bijektiv: Für $A \subseteq M$ gilt

$$(K \circ K)(A) = K(K(A)) = K(A^c) = (A^c)^c = A\,.$$

(c.1) Die Abbildung P ist weder surjektiv (da $P^+(X) = I \subset Y$) noch injektiv (da $P^-(\{y\}) = \{y\} \times I$ für $y \in I$ unendlich viele Elemente hat).

(c.2) Durch die Einschränkung des Zielbereichs ist P in diesem Fall surjektiv, aber immer noch nicht injektiv; die Urbildmengen sind dieselben wie unter (c.1).

(c.3) P ist bijektiv: Für jedes $y \in Y = I$ ist $P^-(\{y\}) = \{(y, y)\} \subset \Delta_I$ einelementig.

2. (a)

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \cup B) \times C \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \cup B \ \wedge\ y \in C \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in A \vee x \in B) \ \wedge\ y \in C \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge y \in C) \ \vee\ (x \in B \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) \in A \times C \ \vee\ (x,y) \in B \times C \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \quad &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in A \times B \ \wedge\ (x,y) \in C \times D \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge y \in B) \ \wedge\ (x \in C \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \in C) \ \wedge\ (y \in B \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in A \cap C \ \wedge\ y \in B \cap D \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)\,.
\end{aligned}$$

Wegen $A \subseteq A \cup C$, $C \subseteq A \cup C$, $B \subseteq B \cup D$ und $D \subseteq B \cup D$ gilt immer:

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).$$

Für die umgekehrte Inklusion zerlegen wir die Vereinigungen in disjunkte Mengen als

$$A \cup C = (A \setminus C) \cup (A \cap C) \cup (C \setminus A) \qquad \text{bzw.} \qquad B \cup D = (B \setminus D) \cup (B \cap D) \cup (D \setminus B)\,.$$

Damit erhalten wir eine disjunkte Zerlegung des kartesischen Produkts:

$$\begin{aligned}(A\cup C)\times(B\cup D) \;=\; & (A\setminus C)\times(B\setminus D) \;\cup\; (A\setminus C)\times(B\cap D) \;\cup\; (A\setminus C)\times(D\setminus B) \;\cup \\ & (A\cap C)\times(B\setminus D) \;\cup\; (A\cap C)\times(B\cap D) \;\cup\; (A\cap C)\times(D\setminus B) \;\cup \\ & (C\setminus A)\times(B\setminus D) \;\cup\; (C\setminus A)\times(B\cap D) \;\cup\; (C\setminus A)\times(D\setminus B)\,.\end{aligned}$$

Von den neun Mengen auf der rechten Seite sind höchstens $(A\setminus C)\times(D\setminus B)$ bzw. $(C\setminus A)\times(B\setminus D)$ weder in $A\times B$ noch in $C\times D$ enthalten. Damit ergibt sich unter Anwendung der De Morganschen Regeln und der Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}&(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)\\ &\quad\Leftrightarrow\quad \neg(A\setminus C\neq\emptyset\,\wedge\,D\setminus B\neq\emptyset)\;\wedge\;\neg(C\setminus A\neq\emptyset\,\wedge\,B\setminus D\neq\emptyset)\\ &\quad\Leftrightarrow\quad (A\setminus C=\emptyset\,\vee\,D\setminus B=\emptyset)\;\wedge\;(C\setminus A=\emptyset\,\vee\,B\setminus D=\emptyset)\\ &\quad\Leftrightarrow\quad (A\subseteq C\,\vee\,D\subseteq B)\;\wedge\;(C\subseteq A\,\vee\,B\subseteq D)\\ &\quad\Leftrightarrow\quad (A=C)\,\vee\,(A\subseteq C\,\wedge\,B\subseteq D)\,\vee\,(C\subseteq A\,\wedge\,D\subseteq B)\,\vee\,(B=D)\,.\end{aligned}$$

3. (a) Die ersten Glieder der Fibonacci–Folge sind $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$
Für $n=2$ ist $F_3\cdot F_1-F_2^2=3\cdot 1-2^2=-1=(-1)^{2+1}$ (Induktionsanfang).
Ist die Gleichung für $n\geq 2$ gültig, so auch für $n+1$ (Induktionsschritt):

$$\begin{aligned}F_{n+2}\cdot F_n-F_{n+1}^2 &\overset{\text{Def.Fib.}}{=} (F_{n+1}+F_n)F_n-F_{n+1}^2\\ &\overset{\text{umklammern}}{=} F_{n+1}(F_n-F_{n+1})+F_n^2\\ &\overset{\text{Ind.voraus.}}{=} F_{n+1}(F_n-F_{n+1})+F_{n+1}F_{n-1}-(-1)^{n+1}\\ &= F_{n+1}\underbrace{(F_n-F_{n+1}+F_{n-1})}_{=0}-(-1)^{n+1}\\ &\overset{\text{Def.Fib.}}{=} -(-1)^{n+1}=(-1)^{n+2}\,.\end{aligned}$$

(b) Die Flächeninhalte eines Quadrats mit Seitenlänge F_n und eines Rechtecks mit Seitenlängen F_{n-1} und F_{n+1} unterscheiden sich immer um eine Einheit.

(c) Wäre die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenusenabschnitten F_{n+1} und F_{n-1} gerade F_n, so wäre nach dem Höhensatz $F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2=0$, im Widerspruch zur Aussage in der Teilaufgabe 3 (a).

4. (a) Für verschiedene Elemente x und y von M setzen wir $X:=\{x\}$, $Y:=\{y\}$, $Z:=\{x,y\}$.
Die Relation $\between$ auf $\mathcal{P}(M)$ ist ...
... nicht reflexiv, da $\emptyset\between\emptyset$ falsch ist ($\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$);
... symmetrisch, denn $A\cap B=B\cap A$ für beliebige $A,B\subseteq M$;
... nicht transitiv, denn $X\between Z$ und $Z\between Y$, aber nicht $X\between Y$;
... nicht antisymmetrisch, denn $X\between Z$ und $Z\between X$, aber $X\neq Z$;
... nicht konnex, denn es gilt weder $X\between Y$ noch $Y\between X$.

(b) Geraden G und H in der Ebene sind genau dann parallel, wenn sie entweder gleich sind oder sich nicht schneiden. In diesem Falle schreiben wir $G\parallel H$. Stehen die Geraden G und H senkrecht zueinander, so schreiben wir $G\perp H$. Durch $\parallel$ und $\perp$ sind auch Relationen auf der Menge der Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$ erklärt! Es gilt:

$$G\perp\!\!\!\perp H\;:\Longleftrightarrow\;G\parallel H\;\vee\;G\perp H\,.$$

Die Relation $\perp\!\!\!\perp$ ist ...

...reflexiv, denn $\parallel$ ist reflexiv;

...symmetrisch, denn sowohl $\parallel$ als auch $\perp$ sind symmetrisch;

...transitiv (siehe unten);

...nicht antisymmetrisch, wie jedes Paar paralleler oder orthogonaler Geraden zeigt;

...nicht konnex, wie jedes Paar von Geraden, die einen spitzen Winkel einschließen, zeigt.

Nur der Nachweis der Transitivität von $\perp\!\!\!\perp$ ist nachzutragen. Seien G, H und I Geraden mit $G \perp\!\!\!\perp H$ und $H \perp\!\!\!\perp I$. Wir unterscheiden vier Fälle:

- Ist $G \parallel H$ und $H \parallel I$, so auch $G \parallel I$.
- Ist $G \parallel H$ und $H \perp I$, so ist $G \perp I$.
- Ist $G \perp H$ und $H \parallel I$, so ist $G \perp I$.
- Ist $G \perp H$ und $H \perp I$, so ist $G \parallel I$.

In jedem dieser Fälle ist $G \perp\!\!\!\perp I$, was zu zeigen war.

Unsere Überlegungen können in der folgenden Tabelle festgehalten werden:

	(r)	(s)	(t)	(a)	(k)
$\not\parallel$	$\neg$	$\surd$	$\neg$	$\neg$	$\neg$
$\perp\!\!\!\perp$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\neg$	$\neg$

Knacky 2.

Der Einheitskreis wird beschrieben durch

$$S = \{(x,y) \in I \times I \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

und das "Wahlkreuz", d.h. die Vereinigung der beiden Diagonalen, durch

$$K = \{(x,y) \in I \times I \mid x^2 - y^2 = 0\}.$$

Da ein Produkt genau dann 0 wird, wenn einer der beiden Faktoren verschwindet, folgt für $F(x) = x^4 - x^2$:

$$\begin{aligned} R = S \cup K &= \{(x,y) \in I \times I \mid (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2) = 0\} \\ &= \{(x,y) \in I \times I \mid x^4 - x^2 - y^4 + y^2 = 0\} \\ &= \{(x,y) \in I \times I \mid F(x) = F(y)\}. \end{aligned}$$

Mit einem injektiven F kann es nicht gehen, sonst wäre $S \cup K$ nur die Diagonale Δ_I.

Durch eine senkrechte Verzerrung können wir F allerdings surjektiv machen:

Für $G(x) = 8(x^4 - x^2) + 1$ gilt $F(x) = F(y) \iff G(x) = G(y)$, also

$$R = S \cup K = \{(x,y) \in I \times I \mid G(x) = G(y)\},$$

wobei $G : I \longrightarrow I$ nun surjektiv ist: zu vorgegebenem $y \in I = [-1,1]$ lösen wir die Gleichung

$$8(x^4 - x^2) + 1 = y, \text{ d.h. } x^4 - x^2 = \frac{y-1}{8}$$

und bekommen die Lösungen

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2 + 2y}} \in [-1,1].$$

Dass $G(x)$ für $x \in I$ tatsächlich wieder in I liegt, sieht man so: Die Parabel $H(z) = z^2 - z$ ist auf I nie positiv und nimmt das Minimum $-\frac{1}{4}$ an. Also gilt $G(x) = 8H(x^2) + 1 \in [-1,1]$.

Die Äquivalenzklasse von x bezüglich R ist $\{x, -x, \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}\}$ und hat 2 Elemente für $x \in \{-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\}$, 3 Elemente für $x \in \{0, 1, -1\}$ und 4 Elemente in allen anderen Fällen.

Ergebnisse

Wie es zur Zeit (Stand 2010) um die Zusammenarbeit Schule/Universität steht, belegen die folgenden Klausurergebnisse. Sie sollten auch unter didaktischen, sozialen und ökonomischen Aspekten betrachtet werden.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Analysis 1 - Klausur vom 30. 1. 2010**						
2	Ergebnis	Stand	**02.02.2010**				
3							
4			**#MN**	**#KP**		**#Note**	
5			1986974	0		**5,0**	
6			2201146	10		**5,0**	
7			2232410	9		**5,0**	
8			2267940	0		**5,0**	
9			2523800	1		**5,0**	
10			2551760	11		**5,0**	
11			2552760	0		**5,0**	
12			2575860	2		**5,0**	
13			2587910	34		**2,7**	
14			2590790	8		**5,0**	
15			2593190	35		**2,3**	
16			2610620	14		**5,0**	
17			2617300	14		**5,0**	
18			2638440	13		**5,0**	
19			2645170	12		**5,0**	
20			2652570	3		**5,0**	
21			2660590	17		**5,0**	
22			2665960	25		**3,7**	
23			2667230	25		**3,7**	
24			2667350	13		**5,0**	
25			2667450	8		**5,0**	
26			2669010	14		**5,0**	
27			2669780	26		**3,7**	
28			2669910	14		**5,0**	
29			2670200	10		**5,0**	
30			2670240	46		**1,0**	
31			2670280	42		**1,3**	
32			2670620	10		**5,0**	
33			2671940	2		**5,0**	
34			2672290	31		**3,0**	
35			2672750	15		**5,0**	
36			2690780	14		**5,0**	
37			2691380	2		**5,0**	
38			2691390	17		**5,0**	

	A	B	C	D	E	F	G
39			2691710	4		**5,0**	
40			2705490	5		**5,0**	
41			2722470	7		**5,0**	
42			2722490	25		**3,7**	
43			2722500	33		**2,7**	
44			2723160	3		**5,0**	
45			2723320	11		**5,0**	
46			2723450	13		**5,0**	
47			2723780	0		**5,0**	
48			2723840	16		**5,0**	
49			2723980	10		**5,0**	
50			2724010	5		**5,0**	
51			2724020	17		**5,0**	
52			2724050	11		**5,0**	
53			2724150	10		**5,0**	
54			2724180	7		**5,0**	
55			2724320	6		**5,0**	
56			2724350	12		**5,0**	
57			2724670	8		**5,0**	
58			2724980	11		**5,0**	
59			2725020	10		**5,0**	
60			2725100	11		**5,0**	
61			2725170	5		**5,0**	
62			2725260	20		**5,0**	
63			2725400	2		**5,0**	
64			2725460	12		**5,0**	
65			2725540	3		**5,0**	
66			2726550	25		**3,7**	
67			2726970	4		**5,0**	
68			2727340	13		**5,0**	
69			2727370	6		**5,0**	
70			2727480	14		**5,0**	
71			2727550	25		**3,7**	
72			2727610	12		**5,0**	
73			2727760	13		**5,0**	
74			2727790	19		**5,0**	
75			2727800	24		**4,0**	
76			2727970	3		**5,0**	
77			2737600	25		**3,7**	

	A	B	C	D	E	F	G
78			2737680	27		**3,3**	
79			2737700	9		**5,0**	
80			2737740	14		**5,0**	
81			2737930	26		**3,7**	
82			2737990	14		**5,0**	
83			2738000	20		**5,0**	
84			2738030	10		**5,0**	
85			2738110	8		**5,0**	
86			2738140	35		**2,3**	
87			2738150	26		**3,7**	
88			2738200	28		**3,3**	
89			2738370	16		**5,0**	
90			2738590	25		**3,7**	
91			2738690	33		**2,7**	
92			2738730	9		**5,0**	
93			2739000	13		**5,0**	
94			2739020	17		**5,0**	
95			2739130	26		**3,7**	
96			2739460	23		**4,0**	
97			2739520	25		**3,7**	
98			2739730	12		**5,0**	
99			2739760	33		**2,7**	
100			2739820	1		**5,0**	
101			2739870	43		**1,3**	
102			2739940	20		**5,0**	
103			2739960	25		**3,7**	
104			2740170	47		**1,0**	
105			2740330	27		**3,3**	
106			2740340	8		**5,0**	
107			2743280	8		**5,0**	
108			2743930	1		**5,0**	
109			2743970	5		**5,0**	
110			2744100	17		**5,0**	
111			2744140	25		**3,7**	
112			2744250	11		**5,0**	
113			2744430	16		**5,0**	
114							
115			**#Durchschnitt:**			**4,0**	

Analysis 1 - WS 2009/2010 - 2. Klausur - Stand 12. 4. 2010

Bewertung : 24-26 : 4,0 | 27 - 29 : 3,7 | dann in Zweierschritten

#MN	#Pkt	#Note
1986974	3	**5,0**
2201146	19	**5,0**
2232410	0	**5,0**
2287980	25	**4,0**
2528380	3	**5,0**
2550350	14	**5,0**
2551760	13	**5,0**
2575860	9	**5,0**
2576130	13	**5,0**
2590790	18	**5,0**
2610620	25	**4,0**
2616660	5	**5,0**
2617300	15	**5,0**
2618160	12	**5,0**
2625890	1	**5,0**
2626010	11	**5,0**
2626040	2	**5,0**
2633240	25	**4,0**
2652570	11	**5,0**
2660590	25	**4,0**
2665680	7	**5,0**
2668800	5	**5,0**
2669010	20	**5,0**
2669050	12	**5,0**
2669810	13	**5,0**
2669910	24	**4,0**
2670200	27	**3,7**
2670210	19	**5,0**
2670570	28	**3,7**
2670600	24	**4,0**
2672750	18	**5,0**
2690430	1	**5,0**
2690780	26	**4,0**
2691200	14	**5,0**
2691440	25	**4,0**
2691450	7	**5,0**
2691840	13	**5,0**
2695630	29	**3,7**
2722550	5	**5,0**
2723060	24	**4,0**
2723320	21	**5,0**
2723330	32	**3,0**
2723450	18	**5,0**
2723780	2	**5,0**
2723820	5	**5,0**
2723840	20	**5,0**
2724020	26	**4,0**
2724050	24	**4,0**
2724150	8	**5,0**
2724320	25	**4,0**
2724350	9	**5,0**
2724510	12	**5,0**
2724910	35	**2,7**
2725020	15	**5,0**
2725100	21	**5,0**
2725170	23	**4,0**
2725260	32	**3,0**
2725400	8	**5,0**

2725460	29	**3,7**			
2725540	10	**5,0**			
2726970	4	**5,0**			
2727340	26	**4,0**			
2727370	15	**5,0**			
2727480	18	**5,0**			
2727610	31	**3,3**			
2727730	19	**5,0**			
2727760	16	**5,0**			
2727780	25	**4,0**			
2727870	29	**3,7**			
2727960	12	**5,0**			
2737700	13	**5,0**			
2737740	14	**5,0**			
2737990	32	**3,0**			
2738000	34	**2,7**			
2738030	35	**2,7**			
2738110	16	**5,0**			
2738370	33	**3,0**			
2738890	34	**2,7**			
2739000	30	**3,3**			
2739020	26	**4,0**			
2739950	11	**5,0**			
2743340	11	**5,0**			
2743590	0	**5,0**			
2744100	13	**5,0**			
2744170	11	**5,0**			
2744250	7	**5,0**			
2744430	37	**2,3**			
2745440	24	**4,0**			
#Durchschnitt:		**4,5**			