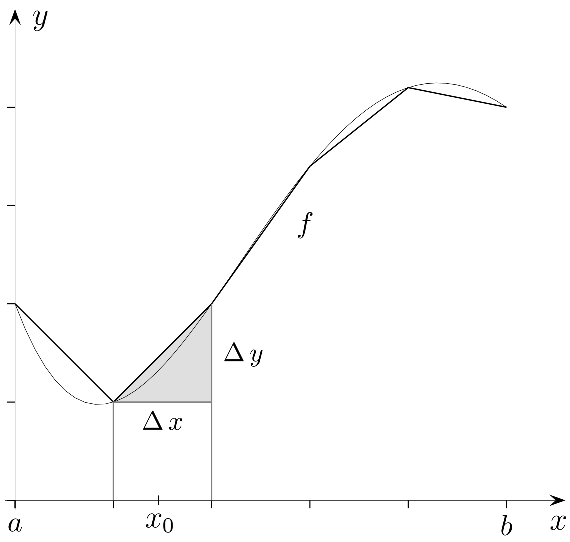
Länge einer Kurve

Um die Länge eines Bogenstückes einer Kurve zu berechnen, betrachten wir zunächst näherungsweise die Summe vieler kleiner geradliniger Streckenelemente, um anschließend durch einen Grenzübergang zur Bogenlänge zu gelangen.

Das Intervall $[a,\, b]$ sei in gleiche Abschnitte $\Delta\, x$ unterteilt. Das einem $\Delta\, x$ zugeordnete Bogenstück wird durch die Länge derjenigen Strecke approximiert, die zwei Punkte (siehe Zeichnung) auf der Kurve verbindet. Bezeichnen wir mit $\Delta\, s$ die Länge des $\Delta\, x$ zugeordneten Bogenstücks, so ergibt sich:

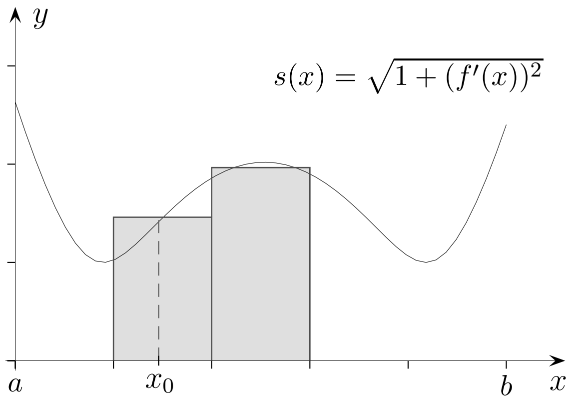
$$\Delta\, s \;\approx\; \sqrt{(\Delta\, x)^2 + (\Delta\, y)^2} \;=\; \sqrt{1 + (\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x})^2} \cdot \Delta\, x$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es eine Stelle x_0, so dass gilt: $f'(x_0) = \dfrac{\Delta\, y}{\Delta\, x}$



Damit haben wir:

$$\Delta\, s \;\approx\; \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \cdot \Delta\, x$$



Für die Länge s einer Kurve in den Grenzen a und b gilt:

$$s \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\; dx$$

Erläutere dies.

Falls eine Funktion in Parameterdarstellung $x(t)$, $y(t)$ gegeben ist, dann gilt:

$$\Delta\, s \;\approx\; \sqrt{(\Delta\, x)^2 + (\Delta\, y)^2} \;=\; \sqrt{(\frac{\Delta\, x}{\Delta\, t})^2 + (\frac{\Delta\, y}{\Delta\, t})^2} \;\cdot\; \Delta\, t \quad\Longrightarrow\quad s \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(x))^2 + (y'(x))^2}\; dt$$

Berechne die Bogenlänge

a) $f(x) = x\,\sqrt{x}\,, \qquad 0 \le x \le 4$ (Neilsche Parabel)

b) $f(x) = \dfrac{1}{4}\,x^2 - \dfrac{1}{2}\,\ln x\,, \qquad 1 \le x \le 6$

Länge einer Kurve

Berechne die Bogenlänge

a) $f(x) = x\sqrt{x}$, $\quad 0 \leq x \leq 4$ (Neilsche Parabel)

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $\quad 1 \leq x \leq 6$

c) $x(t) = r \cdot \cos t,\;\; y(t) = r \cdot \sin t$, $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

d) $x(t) = r(t - \sin t),\;\; y(t) = r(1 - \cos t)$, $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Lösungen:

a) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x},\;\; s = 9,074$

b) $\left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x\right]_1^6 = 9,646$

c) $2\pi r$

d) $8r$ (Zykloide)