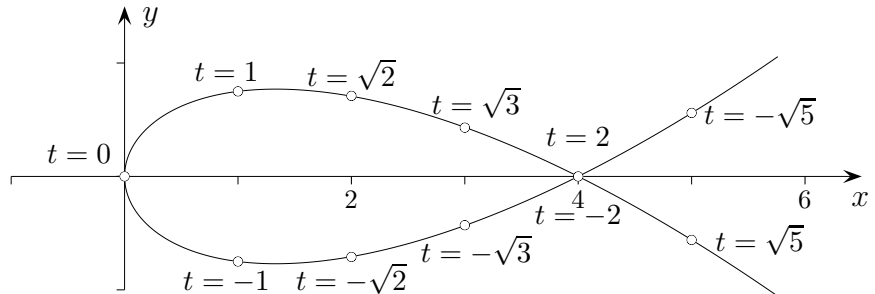


Kurven in Parameterdarstellung

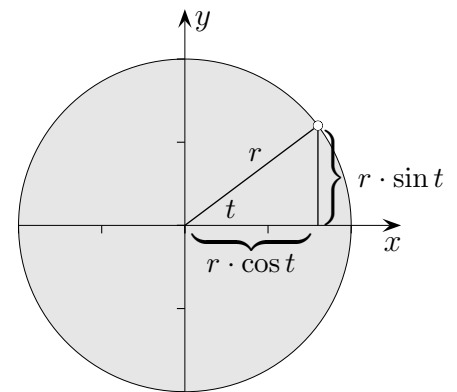
1. Gegeben ist die Kurve $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{t}{4}(4 - t^2)$, $-\infty < t < \infty$ (Parabola nodata)



2. Parameterdarstellung des Kreises mit dem Radius r :

$$x(t) = r \cdot \cos t, \quad y(t) = r \cdot \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

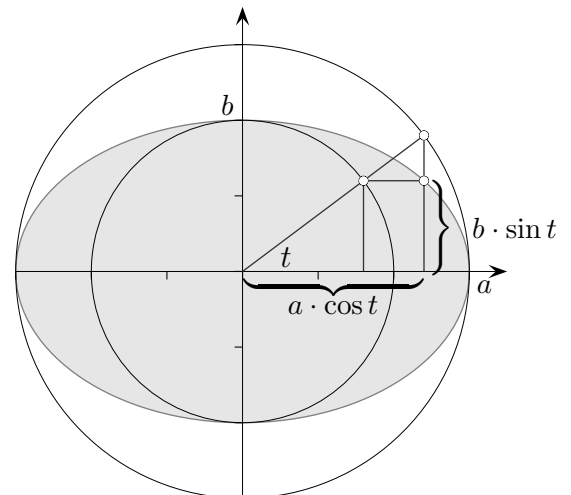
Durch Quadrieren kann der Parameter t eliminiert werden, wir erhalten die Relation: $x^2 + y^2 = r^2$



3. Parameterdarstellung einer Ellipse mit den Halbachsen

$$a \text{ und } b: \quad x(t) = a \cdot \cos t, \quad y(t) = b \cdot \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Durch Quadrieren kann der Parameter t eliminiert werden, wir erhalten die Relation: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Maple: `plot([3*sin(t), 2*cos(t), t = 0 .. 6]);`

dreidimensional:

`with(plots):`

`spacecurve([sin(3*t), cos(5*t), t], t = 0 .. 10, numpoints = 500, axes = boxed);`

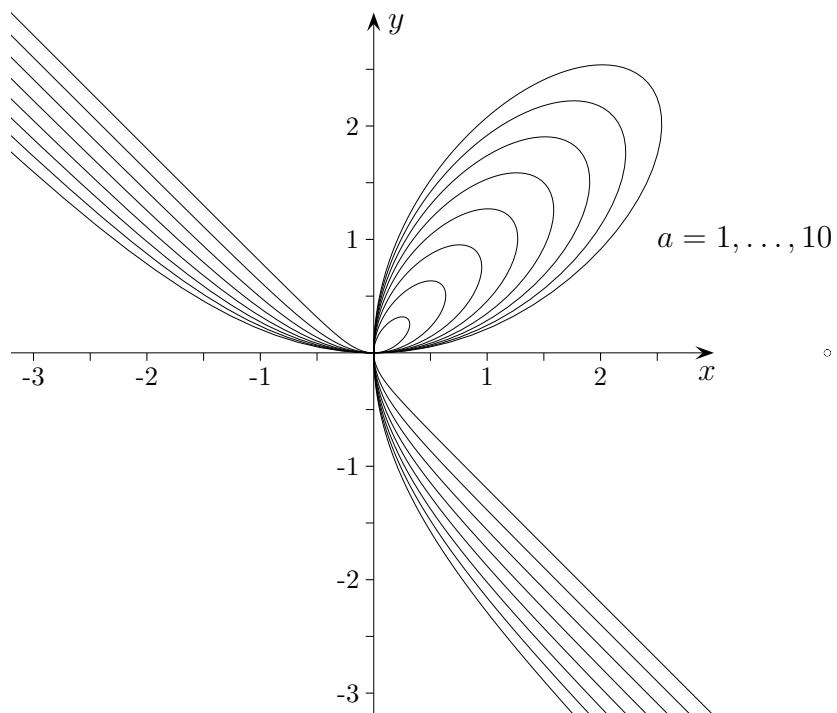
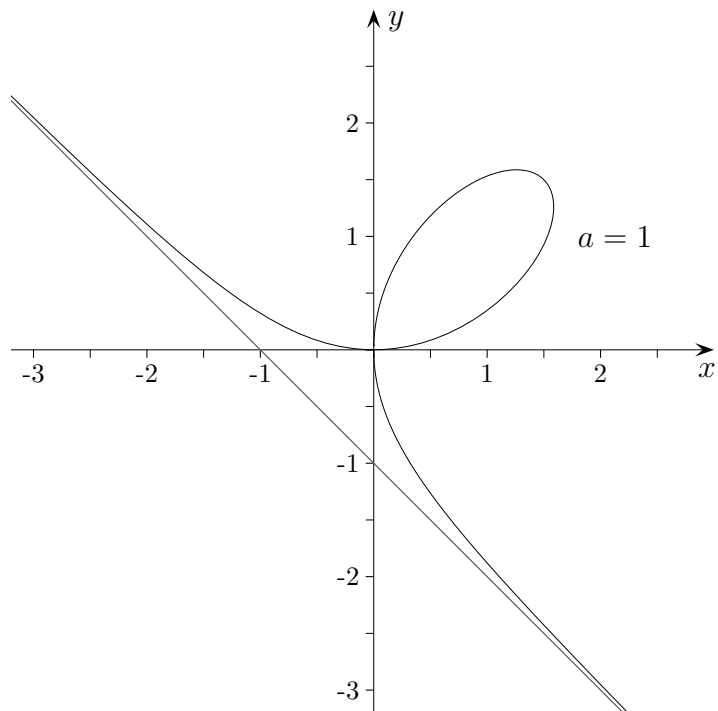
(Siehe dir diese Kurve auch von oben an.)

4. Suche eine Parameterdarstellung für eine Spirale, auch in Schneckenform, und einer dreidimensionalen Schraubenlinie.

Kartesisches Blatt

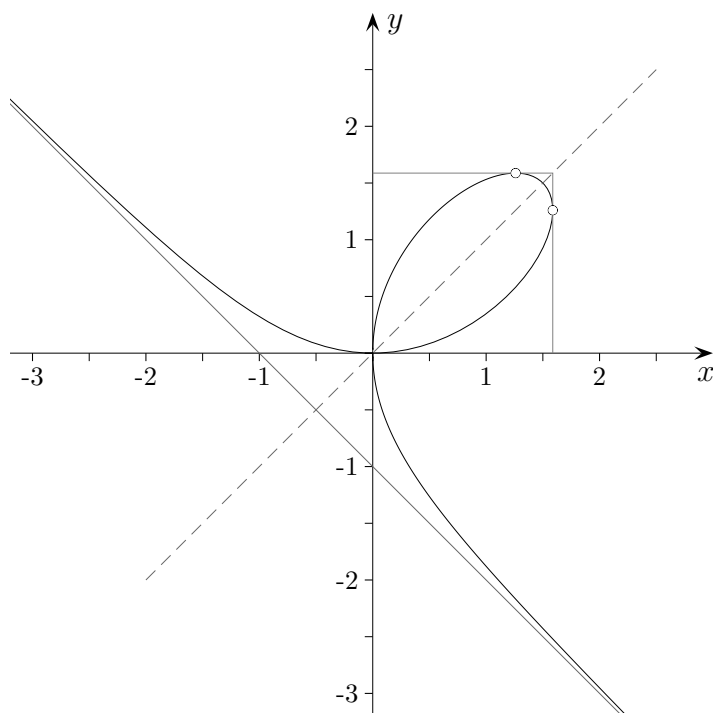
$x^3 + y^3 = 3axy$ beschreibt für $a > 0$ die Gleichung einer Kurve.

Eine Parameterdarstellung lautet (überprüfe dies): $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$



Blatt des Descartes

Wenn die Variablen x und y miteinander vertauscht werden, geht die Gleichung $x^3 + y^3 = 3xy$ in sich über. Die Kurve ist daher zur Geraden $y = x$ symmetrisch.



Um den Kurvenpunkt mit waagerechte Tangente zu ermitteln, stellen wir uns vor, wir hätten eine Auflösung der Form $y = f(x)$, also $x^3 + (f(x))^3 = 3xf(x)$.

Der Punkt mit senkrechter Tangente ergibt sich aus der Symmetrie.

Alternativ wäre von $x = g(y)$ auszugehen.

Beide Seiten können nach der Produkt- und Kettenregel abgeleitet werden:

$$3x^2 + 3(f(x))^2(f(x))' = 3f(x) + 3x(f(x))', \quad \text{kürzer: } 3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$$

$$\text{Daraus folgt: } y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Wir setzen $y = x^2$ in die Kurvengleichung $x^3 + y^3 = 3xy$ ein und erhalten $x^3(x^3 - 2) = 0$.

Unter Berücksichtigung von $y^2 - x \neq 0$ (dies wäre für $O(0 | 0)$ nicht erfüllt)

ergibt das den Punkt $P(\sqrt[3]{2} | \sqrt[3]{4})$.

Mit der Parameterdarstellung kann die Asymptote $y = -x - 1$ bestätigt werden.

Zu zeigen ist hierzu (l'Hospital):

$$\lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{3t^2}{1+t^3} - \left[-\frac{3t}{1+t^3} - 1 \right] \right) = 0$$

Blatt des Descartes

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

