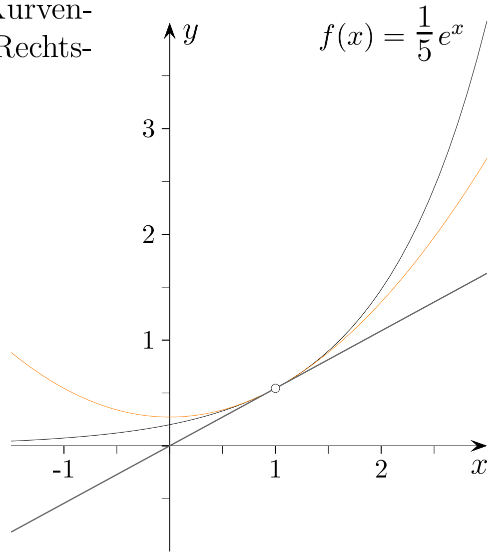
Differenzial- und Integralrechnung

Startseite

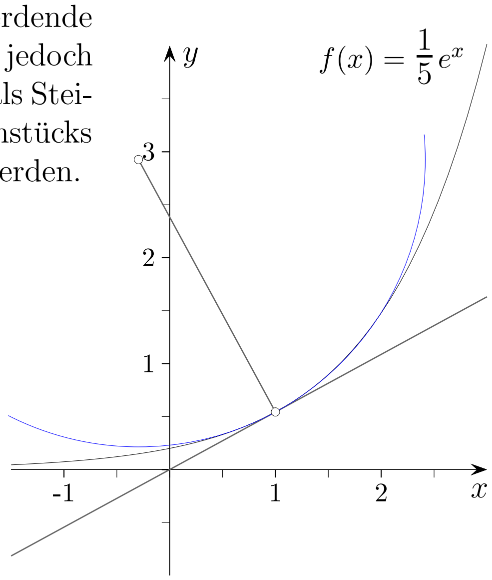
↑ Krümmung

Die lineare Näherung von Funktionen durch Geraden (Tangenten) bildet die Grundlage der Differentialrechnung. Quadratische Näherungen durch Parabeln werden bei Reihenentwicklungen betrachtet. Durch die Approximation einer Funktion (genauer des Graphen) durch einen Kreis wird die Stärke der Krümmung in einem Kurvenpunkt erfasst und nicht nur die Art der Krümmung (Links-, Rechtskurve), wie es die 2. Ableitung ermöglicht.



Ein Kreis kann als Kurve mit konstanter Krümmung angesehen werden, da er mit einem gleichbleibenden Lenkradeinschlag befahren werden kann. Bei Trassierungsproblemen (Straßenbau) sind häufig stetige Krümmungsübergänge gefragt: Das Aneinanderfügen zweier Kreisbögen oder eines Kreisbogens und einer Geraden würde Autofahrer erschrecken.

Steigungsänderungen werden mit der 2. Ableitung erfasst. Jedoch können ihre Werte allein nicht die Stärke der Krümmung beschreiben: Für $f(x) = \frac{1}{5}e^x$ nimmt die Krümmung für größer werdende x-Werte offensichtlich ab, die Werte der 2. Ableitung nehmen jedoch zu. Beim Befahren der Kurve wird die Stärke der Krümmung als Steigungsänderung in Bezug auf die Länge des befahrenen Kurvenstücks empfunden. Die Bogenlänge muss daher mit berücksichtigt werden.



↑ Krümmungsmaß

Die Krümmung von Kreisen wird umso kleiner, je mehr ihr Radius r zunimmt. Es erscheint daher sinnvoll, die Stärke der Krümmung mit $\kappa = \frac{1}{r}$ zu beschreiben, wobei der griechische Buchstabe κ an Krümmung erinnern soll. Diese Definition kann auf beliebige Kurven übertragen werden, wobei dann r der Radius des Krümmungskreises ist.

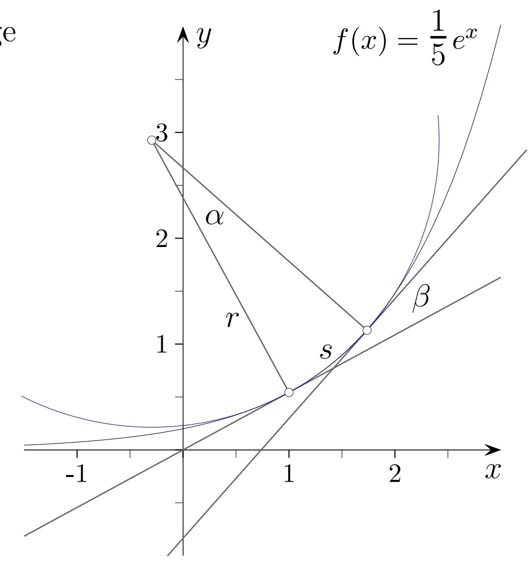
Der Quotient $\frac{1}{r}$ kann bei Kreisen anschaulich interpretiert werden.

Aufg.
Zeige, dass gilt: $\alpha = \beta$. *Tipp: Die Schenkel der Winkel stehen paarweise senkrecht aufeinander.*

Bewegt man sich längs des Kreisbogens s, so nimmt der Winkel, den die Kreistangente mit der x-Achse eingeschließt, um β zu.

Nun gilt: $s = r \cdot \alpha \iff \alpha = \frac{1}{r} s$ *(α im Bogenmaß)*

Die Zunahme des Winkels ist daher proportional zur Länge des Kreisbogens.



Auf der nächsten Seite wird der Radius des Krümmungskreises bestimmt, es gilt:

$$r = \left| \frac{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}{f''(x_0)} \right|$$

Für Extrema mit $f'(x_0) = 0$ ist die Formel besonders einfach.
κ mit $f''(x_0) = 0$ schließt Geraden mit der Krümmung null ein.

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}$$

↑ Krümmungskreis

Um den Mittelpunkt und den Radius eines Krümmungskreises zu bestimmen, betrachten wir einen Punkt $P\big(x_0 \mid f(x_0)\big)$ auf dem Graphen von f und suchen eine Funktion $k(x)$ des Halbkreises, der den Graphen von f bestmöglich approximiert. Hierbei reicht es wie sich zeigen wird aus, folgende Übereinstimmungen zu fordern:

$$k(x_0) = f(x_0), \qquad k'(x_0) = f'(x_0), \qquad k''(x_0) = f''(x_0) \tag{1}$$

Ist $M\big(x_m \mid y_m\big)$ der Mittelpunkt und r der Radius des gesuchten Kreises, so gilt:

$$(x - x_m)^2 + (k(x) - y_m)^2 = r^2 \tag{2}$$

Lösungsidee:
Zweimaliges implizites Differenzieren von (2) und Ersetzen gemäß (1) liefert M und r.

Mit der Kettenregel erhalten wir zunächst:

$$(x - x_m) + (k(x) - y_m) \cdot k'(x) = 0 \tag{3}$$

und mit der Produktregel:

$$1 + (k'(x))^2 + (k(x) - y_m) \cdot k''(x) = 0 \tag{4}$$

Beachten wir nun (1), so erhalten wir aus den letzten beiden Gleichungen:

$$(x_0 - x_m) + (f(x_0) - y_m) \cdot f'(x_0) = 0 \tag{5}$$

$$1 + (f'(x_0))^2 + (f(x_0) - y_m) \cdot f''(x_0) = 0 \tag{6}$$

(6) umgestellt ergibt:

$$y_m = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \tag{7}$$

und (7) in (5) eingesetzt:

$$x_m = x_0 - \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \tag{8}$$

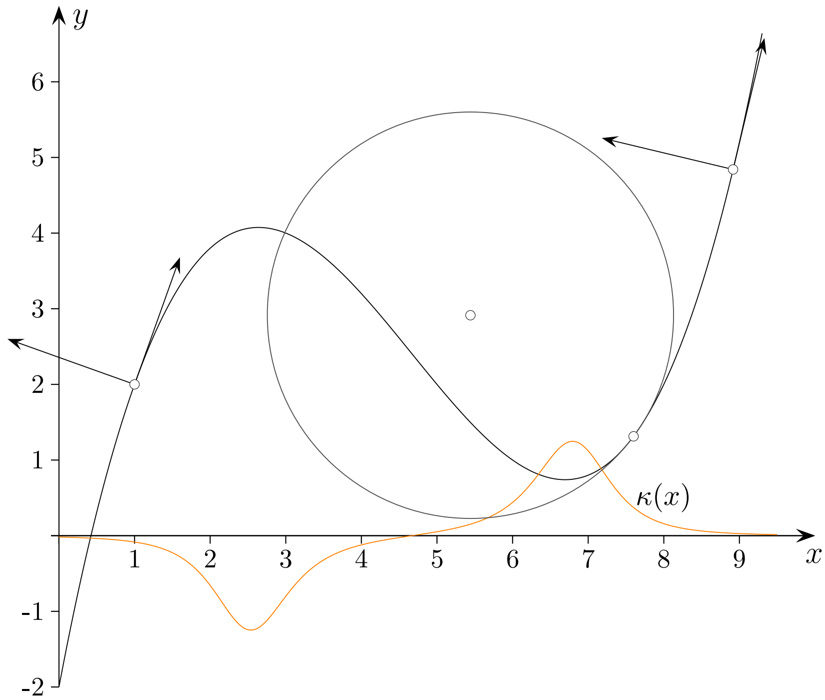
Für den Radius r gilt:

$$r^2 = (x_0 - x_m)^2 + (f(x_0) - y_m)^2 = \left(\frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0)\right)^2 + \left(\frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}\right)^2$$

$$r = \left|\frac{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{1,5}}{f''(x_0)}\right| \tag{9}$$

und damit für die Krümmung an der Stelle x_0:

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{1,5}} \qquad \text{kurz:} \qquad \kappa = \frac{y''}{\left(1 + {y'}^2\right)^{1,5}} \tag{10}$$



Die Krümmung ist negativ, wenn sich der Graph entgegengesetzt des Normalenvektors krümmt (Rechtskurve) und positiv, wenn er sich in Richtung des Normalenvektors krümmt (Linkskurve).
Die Drehung des Tangentenvektors um 90° in positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) ergibt den Normalenvektor.

↑

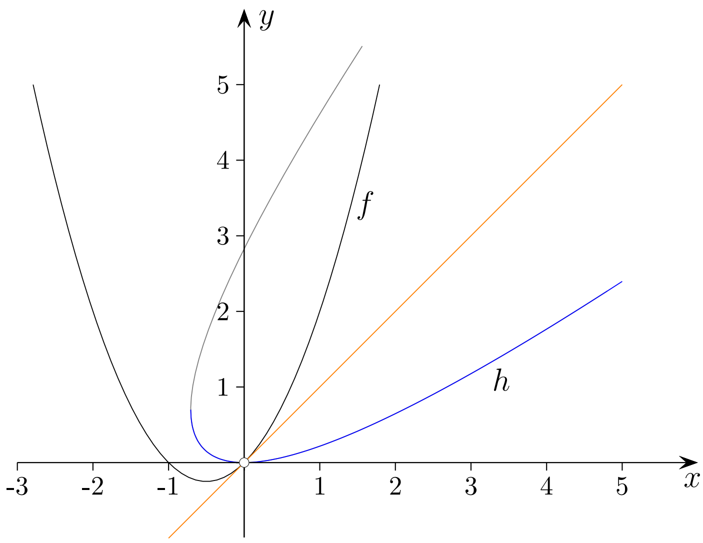
↑ Krümmung und 2. Ableitung

Krümmung an der Stelle x_0:

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}$$

Offensichtlich sind Krümmung und 2. Ableitung nicht dasselbe.
Übereinstimmung liegt jedoch vor, falls $f'(x_0) = 0$ ist, wie z. B. bei Parabeln $f(x) = ax^2$ an der Stelle $x_0 = 0$.
Um die Krümmungen zweier Graphen mithilfe der 2. Ableitung in zwei Punkten zu vergleichen, müsste man die Graphen so drehen, dass die Tangenten in den Punkten waagerecht verlaufen. Dann würde die 2. Ableitung der gedrehten Graphen genau die Krümmung ergeben. Der Drehwinkel wird durch die 1. Ableitung festgelegt. Daher ist es plausibel, dass $f'(x_0)$ in der Formel auftaucht.

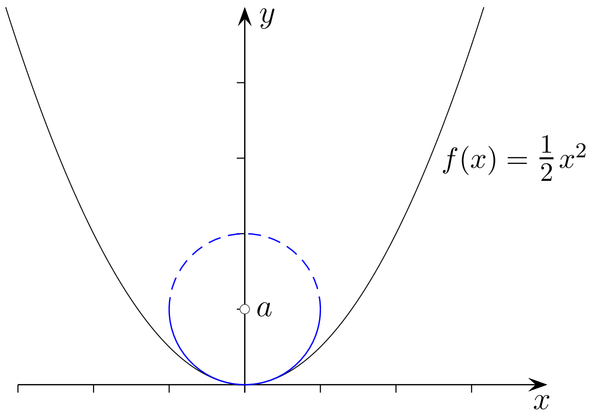
Zum Vergleich zweier Krümmungen müssen die 1. Ableitungen nicht unbedingt null sein, es reicht aus, wenn sie gleich sind. Stimmen daher Graphen an einer Stelle jeweils in den ersten beiden Ableitungen überein, so ist deren Krümmung an dieser Stelle gleich, auch wenn sie nicht direkt aus der zweiten Ableitung abgelesen werden kann.



Die Krümmung von $f(x) = x^2 + x$ an der Stelle $x = 0$ ist die 2. Ableitung von $h(x) = \sqrt{2} + x - \sqrt{2 + 2\sqrt{2}x}$ an dieser Stelle, nämlich $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2^{1,5}}$.
Die Grafik soll das Gesagte veranschaulichen.

Die Ermittlung von h liegt aber außerhalb des schulischen Bereichs.

↑ Krümmungskreis im Scheitel einer Parabel



Um den Mittelpunkt und den Radius des Krümmungskreises zu bestimmen, betrachten wir einen Punkt $P\big(0 \mid 0\big)$ auf dem Graphen von f und suchen eine Funktion $k(x)$ des Halbkreises, der den Graphen von f bestmöglich approximiert.
Hierbei reicht es wie sich zeigen wird aus, folgende Übereinstimmungen zu fordern:

$$k(0) = f(0) = 0, \qquad k'(0) = f'(0) = 0, \qquad k''(0) = f''(0) = 1 \tag{1}$$

Ist $M\big(0 \mid a\big)$ der Mittelpunkt und r der Radius des gesuchten Kreises, so gilt:

$$x^2 + (a - k(x))^2 = r^2 \tag{2}$$

Lösungsidee:
Zweimaliges Differenzieren beider Seiten von (2) und Ersetzen gemäß (1) liefert M und r.

Mit der Kettenregel erhalten wir zunächst:

$$2x - 2(a - k(x)) \cdot k'(x) = 0 \tag{3}$$

und mit der Produktregel (vorher durch 2 geteilt):

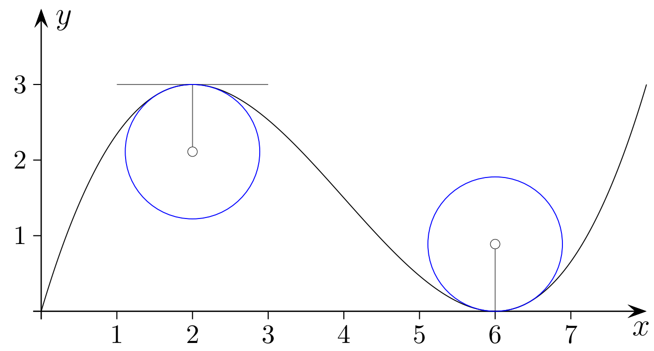
$$1 + (k'(x))^2 - (a - k(x)) \cdot k''(x) = 0 \tag{4}$$

Mit (1) erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$1 - a = 0, \quad r = 1, \quad M\big(0 \mid 1\big)$$

Für den Krümmungskreis der Parabel $f(x) = kx^2,\ k > 0,$ gilt: $r = \frac{1}{2k}$ $\ (f''(0) = 2k), \quad M\big(0 \mid r\big)$

↑ Krümmungskreis an einer Stelle mit $f'(x_0) = 0$



Um den Mittelpunkt und den Radius eines Krümmungskreises zu bestimmen, betrachten wir einen Punkt $P\big(x_0 \mid f(x_0)\big)$ auf dem Graphen von f und suchen eine Funktion $k(x)$ des Halbkreises, der den Graphen von f bestmöglich approximiert. Hierbei reicht es wie sich zeigen wird, folgende Übereinstimmungen zu fordern:

$$k(x_0) = f(x_0), \qquad k'(x_0) = f'(x_0) = 0, \qquad k''(x_0) = f''(x_0) \tag{1}$$

Ist $M\big(x_m \mid y_m\big)$ der Mittelpunkt und r der Radius des gesuchten Kreises, so gilt $(x_m = x_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (k(x) - y_m)^2 = r^2 \tag{2}$$

Lösungsidee:
Zweimaliges Differenzieren beider Seiten von (2) und Ersetzen gemäß (1) liefert M und r.

Mit der Kettenregel erhalten wir zunächst:

$$(x - x_0) + (k(x) - y_m) \cdot k'(x) = 0 \tag{3}$$

und mit der Produktregel:

$$1 + (k'(x))^2 + (k(x) - y_m) \cdot k''(x) = 0 \tag{4}$$

Mit (1) erhalten wir aus der letzten Gleichung:

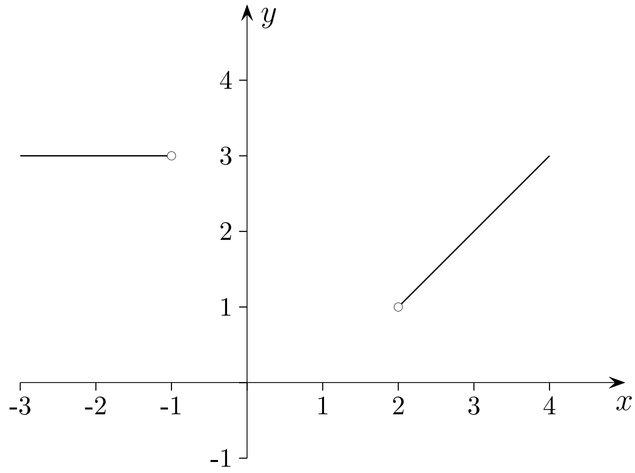
$$1 + (f(x_0) - y_m) \cdot f''(x_0) = 0 \tag{5}$$

(5) umgestellt ergibt:
$$y_m = f(x_0) + \frac{1}{f''(x_0)} \tag{7}$$

Für den Radius r gilt:
$$r^2 = (f(x_0) - y_m)^2, \qquad r = \left|\frac{1}{f''(x_0)}\right| \tag{9}$$

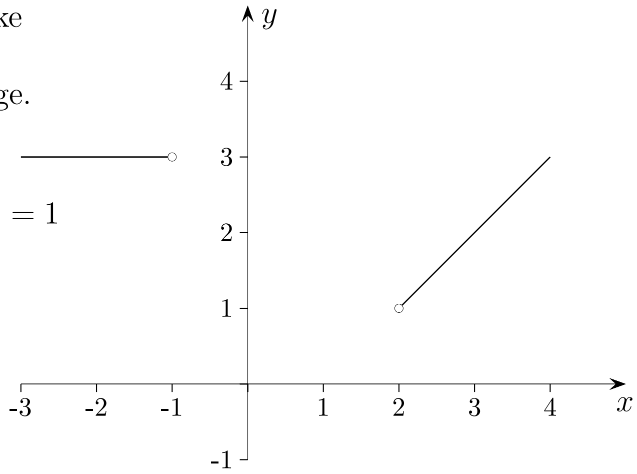
↑ Krümmung, Aufgabe

Die Strecke $A\big(-3 \mid 3\big)\ B\big(-1 \mid 3\big)$ soll mit der Strecke $B\big(2 \mid 1\big)\ C\big(4 \mid 3\big)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.



↑ Krümmung, Aufgabe

Die Strecke $A\big(-3\,|\,3\big)$ $B\big(-1\,|\,3\big)$ soll mit der Strecke $B\big(2\,|\,1\big)$ $C\big(4\,|\,3\big)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.



Die vier Bedingungen

$$f(-1) = 3,\ \ f(2) = 1,\ \ f'(-1) = 0,\ \ f'(2) = 1$$

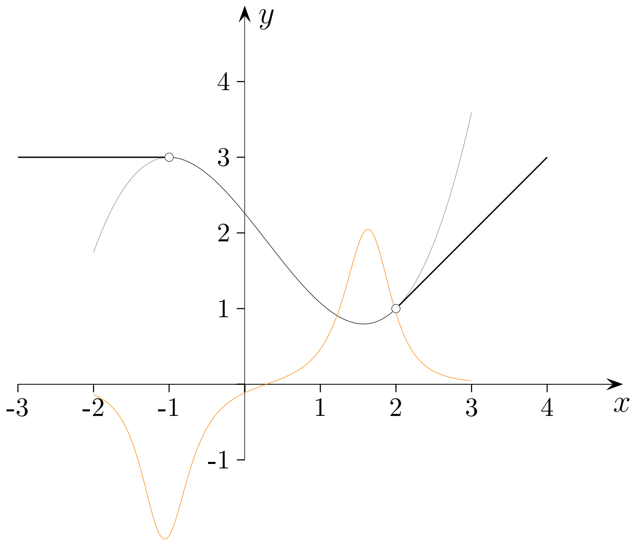
führen mit dem Ansatz:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

über ein Gleichungssystem zur Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{27}\,(7x^3 - 6x^2 - 33x + 61)$$

An der eingezeichneten Krümmungskurve sind die Krümmungssprünge an den Nahtstellen ablesbar.



Um Krümmungssprünge zu vermeiden, muss zusätzlich

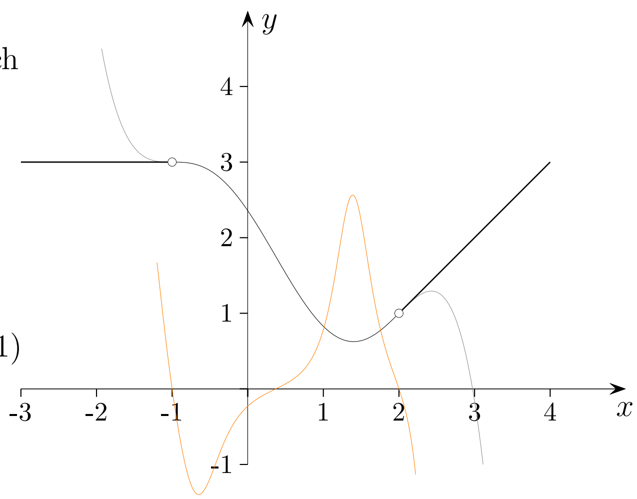
$$f''(-1) = 0,\ \ f''(2) = 0$$

gefordert werden.
Mit dem Ansatz:

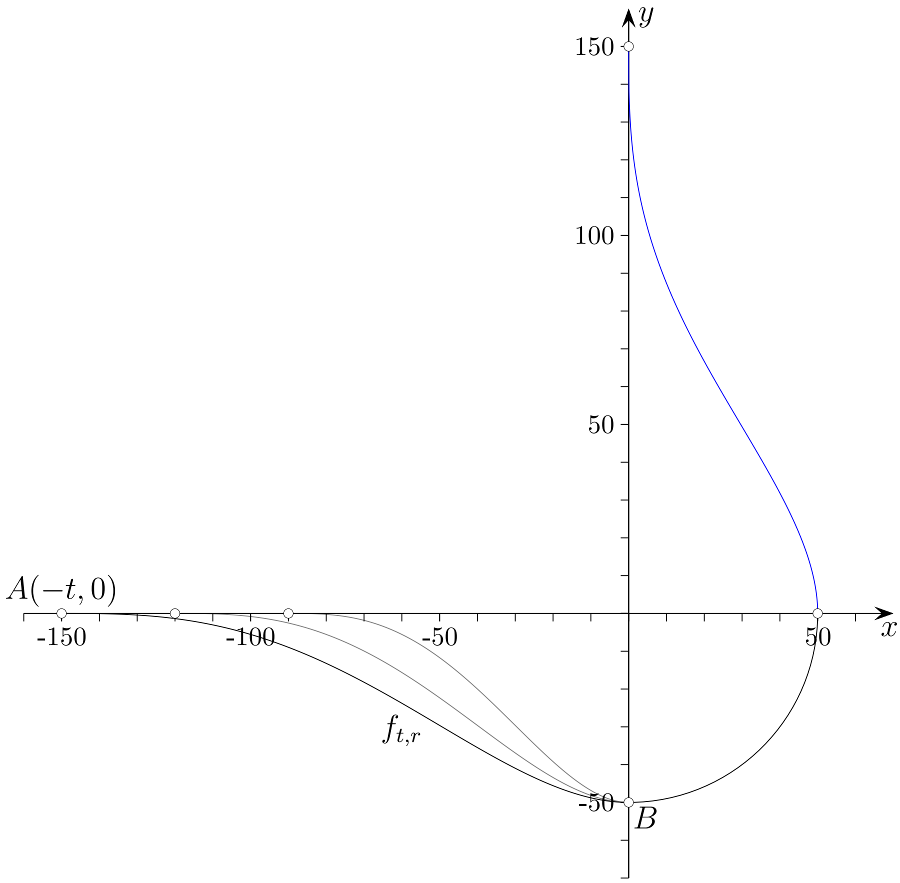
$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

erhalten wir die Lösung:

$$f(x) = -\frac{1}{81}\,(7x^5 - 16x^4 - 38x^3 + 52x^2 + 119x - 191)$$



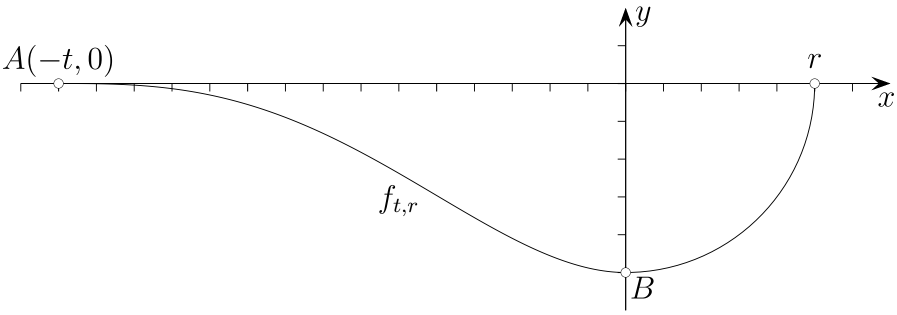
↑ Trassierung eines Autobahnkreuzes



Die Grafik beschreibt die Linksabbiegung in einem Autobahn-Kreuz.
Der mittlere Teil der Trasse ist ein Viertelkreis mit Radius r ist.

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion $f_{t,r}$ auf dem Intervall $[-t, 0]$,
deren Übergang zur x-Achse in A knick- und krümmungssprungfrei ist
und in B knickfrei an den Viertelkreis anschließt.
Das Trassenstück im 1. Quadranten ergibt sich durch Spiegelung an der Geraden $y = -x$,
es wird nicht weiter betrachtet.

↑



Modellierung: f statt $f_{t,r}$

1. $f(-t)=0$
2. $f'(-t)=0$
3. $f''(-t)=0$
4. $f(0)=-r$
5. $f'(0)=0$

Ansatz: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Dies ergibt das Gleichungssystem:

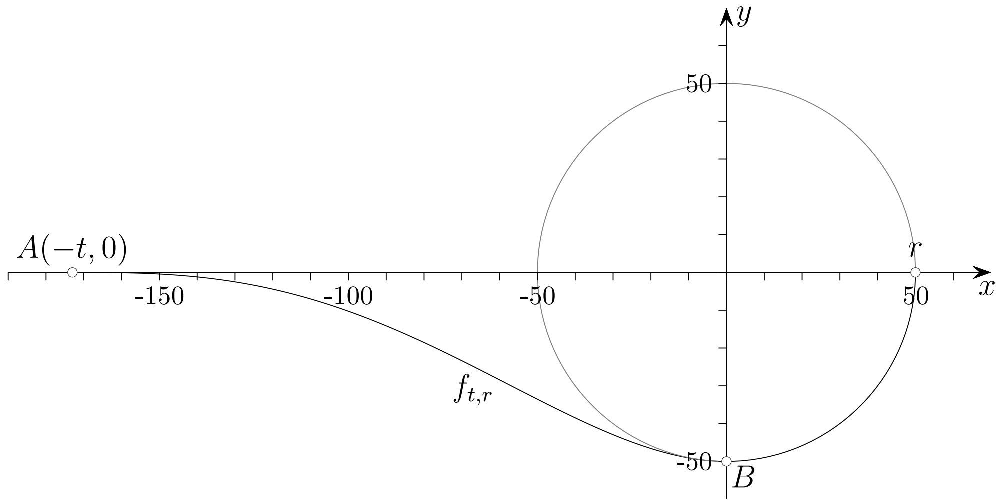
$$\begin{aligned} at^4-bt^3+ct^2-dt+e&=0\\ -4at^3+3bt^2-2ct+d&=0\\ 12at^2-6bt+2c&=0\\ e&=-r\\ d&=0 \end{aligned}$$

Die Funktion lautet (CAS):

$$f(x)=\frac{3r}{t^4}x^4+\frac{8r}{t^3}x^3+\frac{6r}{t^2}x^2-r, \quad -t\le x\le 0,\ \ r,t>0$$

Gesucht ist eine Bedingung für r und t, so dass der Übergang in B krümmungsruckfrei ist.

↑

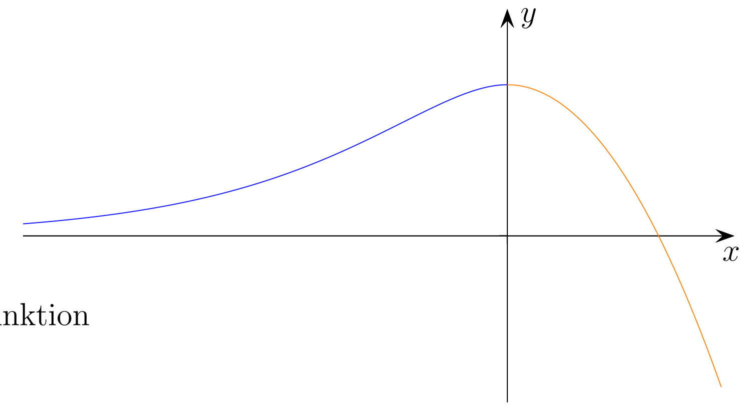


Der Viertelkreis hat die Funktionsgleichung $k(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq r$.
Die Krümmung beträgt $k''(0) = \dfrac{1}{r}$. Die Bedingung lautet:

$$f''(0) = \frac{1}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{12r}{t^2} = \frac{1}{r} \quad \overset{r,t>0}{\Longleftrightarrow} \quad t = \sqrt{12} \cdot r$$

Für $r = 50$ erhalten wir $t \approx 173$.

↑



Wie sind k und a zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - ke^{2x} & x \leq 0 \\ -ax^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$$

eine 2. Ableitung besitzt?

↑

Wie sind k und a zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - ke^{2x} & x \leq 0 \\ -ax^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$$

eine 2. Ableitung besitzt?

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \leq 0 \\ f_2(x) & x > 0 \end{cases}$$

Stetigkeit muss an der Stelle $x = 0$ vorliegen.

$$\begin{aligned} f_1(0) &= f_2(0) \\ 2 - k &= 1 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 1 \end{aligned}$$

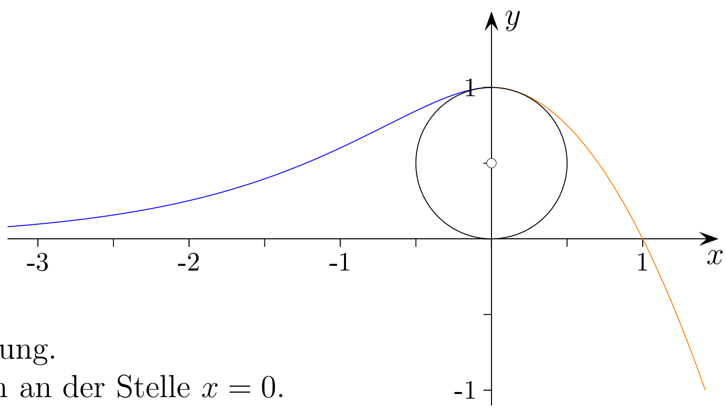
Differenzierbarkeit $(k = 1)$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 2e^x - 2e^{2x} \\ f_2'(x) &= -2ax \\ f_1'(0) &= f_2'(0) \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

f ist für $k = 1$ differenzierbar.

2. Ableitung $(k = 1)$

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= 2e^x - 4e^{2x} \\ f_2''(x) &= -2a \\ f_1''(0) &= f_2''(0) \\ -2 &= -2a \qquad \Longrightarrow \qquad a = 1 \end{aligned}$$

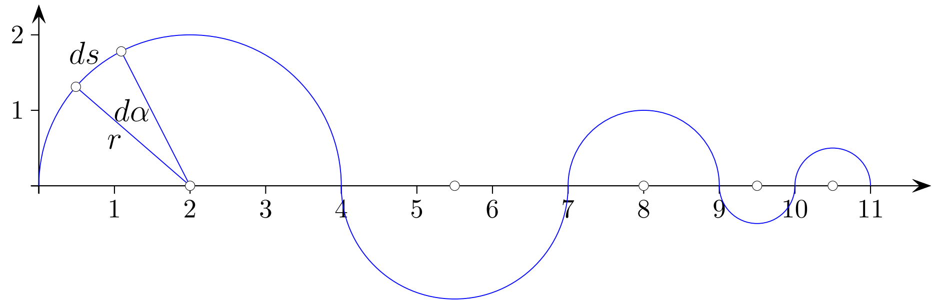


f besitzt für $k = 1$ und $a = 1$ eine 2. Ableitung.
Aus der Rechnung ergibt sich ein Maximum an der Stelle $x = 0$.

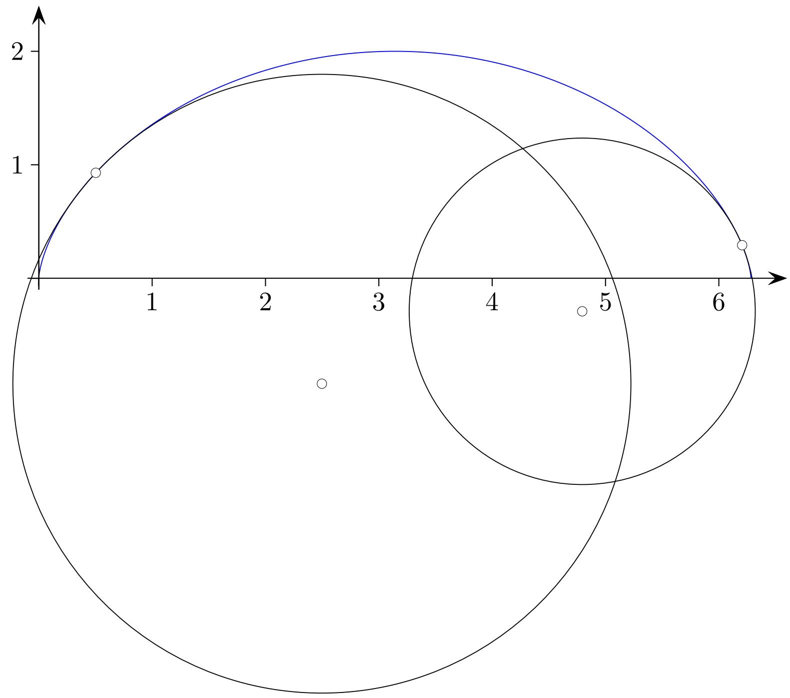
Der Krümmungskreis an dieser Stelle hat den Radius $r = |\frac{1}{f''(0)}| = \frac{1}{2}$.

Der Mittelpunkt muss $(0\,|\,\frac{1}{2})$ sein.

↑ Krümmung

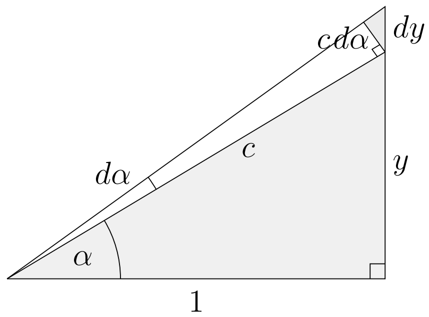


Anhand dieser Abbildungen kann der Begriff Krümmung erläutert werden.



↑

↑ Ableitung von $\tan\alpha$



$$\frac{dy}{c\,d\alpha} = \frac{c}{1}$$

Im Grenzfall $d\alpha$ gegen Null sind die grau gefärbten Dreiecke ähnlich.

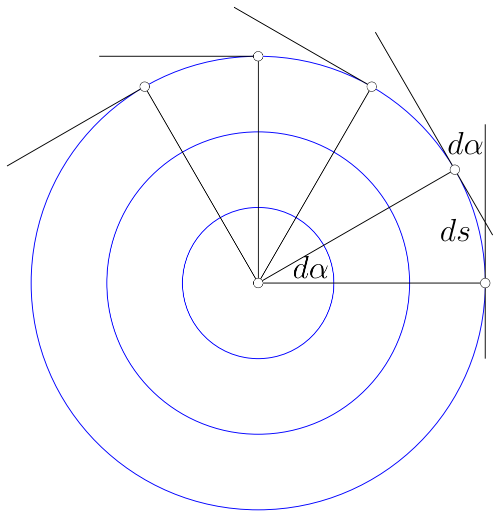
$$\frac{dy}{d\alpha} = c^2 = 1 + y^2$$

$$(\tan\alpha)' = 1 + \tan^2\alpha$$

$$\begin{aligned}
x &= \tan\alpha \\
\alpha &= \arctan x \\
\frac{d\alpha}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{d\alpha}} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

↑

↑ Krümmung Leibniz



$$r = \frac{ds}{d\alpha}$$

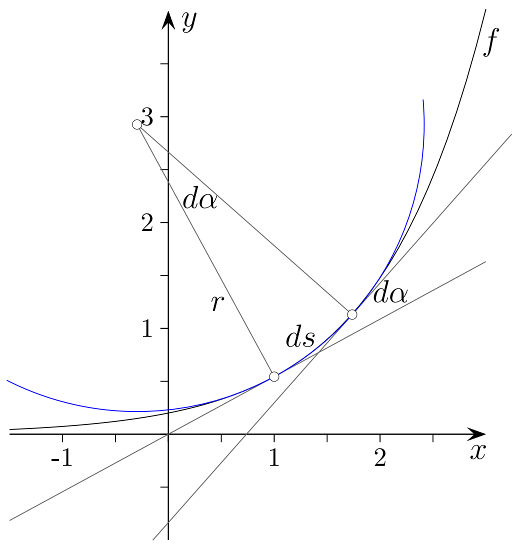
$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\alpha = \arctan f'(x)$$

$$d\alpha = \frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

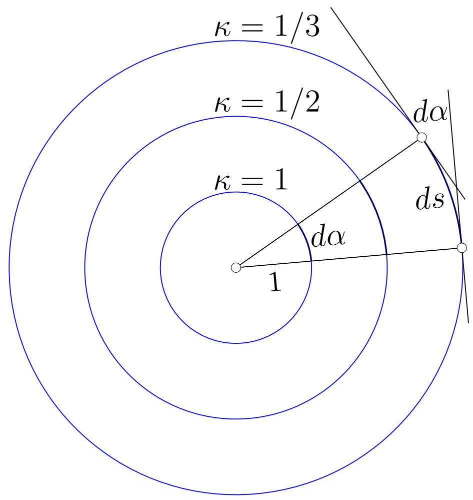
$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{1,5}}$$



Der Radius eines (Näherungs-)Kreises ist ein anschauliches Maß für die Krümmung, je größer der Radius, um so kleiner die Krümmung.
Das führt zur Definition $\kappa = \frac{1}{r}$, r ist der Radius des Krümmungskreises.
r wird mit $r = \frac{ds}{d\alpha}$, bzw. $\frac{1}{r}$ mit $\frac{d\alpha}{ds}$ berechnet, also der infinitesimalen Änderung des Tangentenwinkels bezogen auf die infinitesimale Bogenlänge.

Die Krümmung ist die Änderungsgeschwindigkeit der Tangentenrichtung, wenn die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird.

↑ Weg zur Krümmung



Der Begriff *Krümmung* ist einfach zu erfassen,
die rechn. Umsetzung erfordert jedoch einige Vorkenntnisse.

Intention: Ein Kreis mit dem Radius 1 hat die Krümmung 1.
Wird der Radius verdoppelt, halbiert sich die Krümmung.
Wird der Radius halbiert, verdoppelt sich die Krümmung.
Statt den Radius zu betrachten, kann das Verhältnis $\kappa = \dfrac{d\alpha}{ds}$ der Kreisbögen $d\alpha$ und ds zu einem beliebigen Winkel bestimmt werden. $d\alpha$ ist der Kreisbogen für $r = 1$. Mit dem Radius verdoppelt sich auch ds und damit halbiert sich κ, usw.
Zur Berechnung von $d\alpha$ ist der Kreis mit dem Radius 1 nicht erforderlich. $d\alpha$ ist auch die tangentiale Winkeländerung (Schenkel stehen paarweise senkrecht aufeinander) auf dem Bogen ds.

Für eine Funktion f schließt die Tangente an der Stelle x mit der x-Achse den Winkel $\alpha = \arctan f'(x)$ ein. Mit der Ableitung erhalten wir das Differential $d\alpha$. Zu ds siehe Länge einer Kurve. Differentiale sind (hier) infinitesimale Größen, die so klein gewählt werden, dass der Approximationsfehler vernachlässigbar ist.

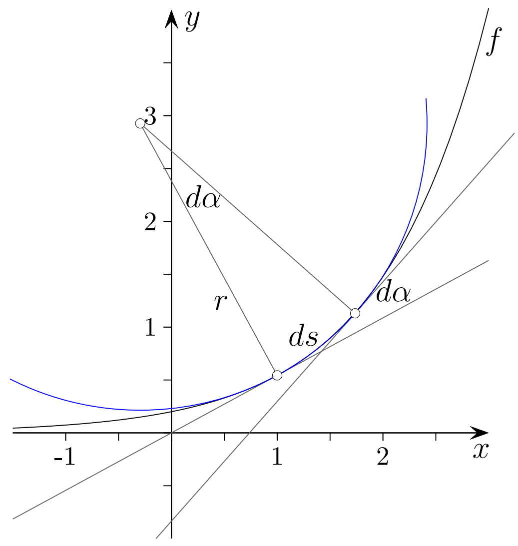
$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\alpha = \arctan f'(x)$$

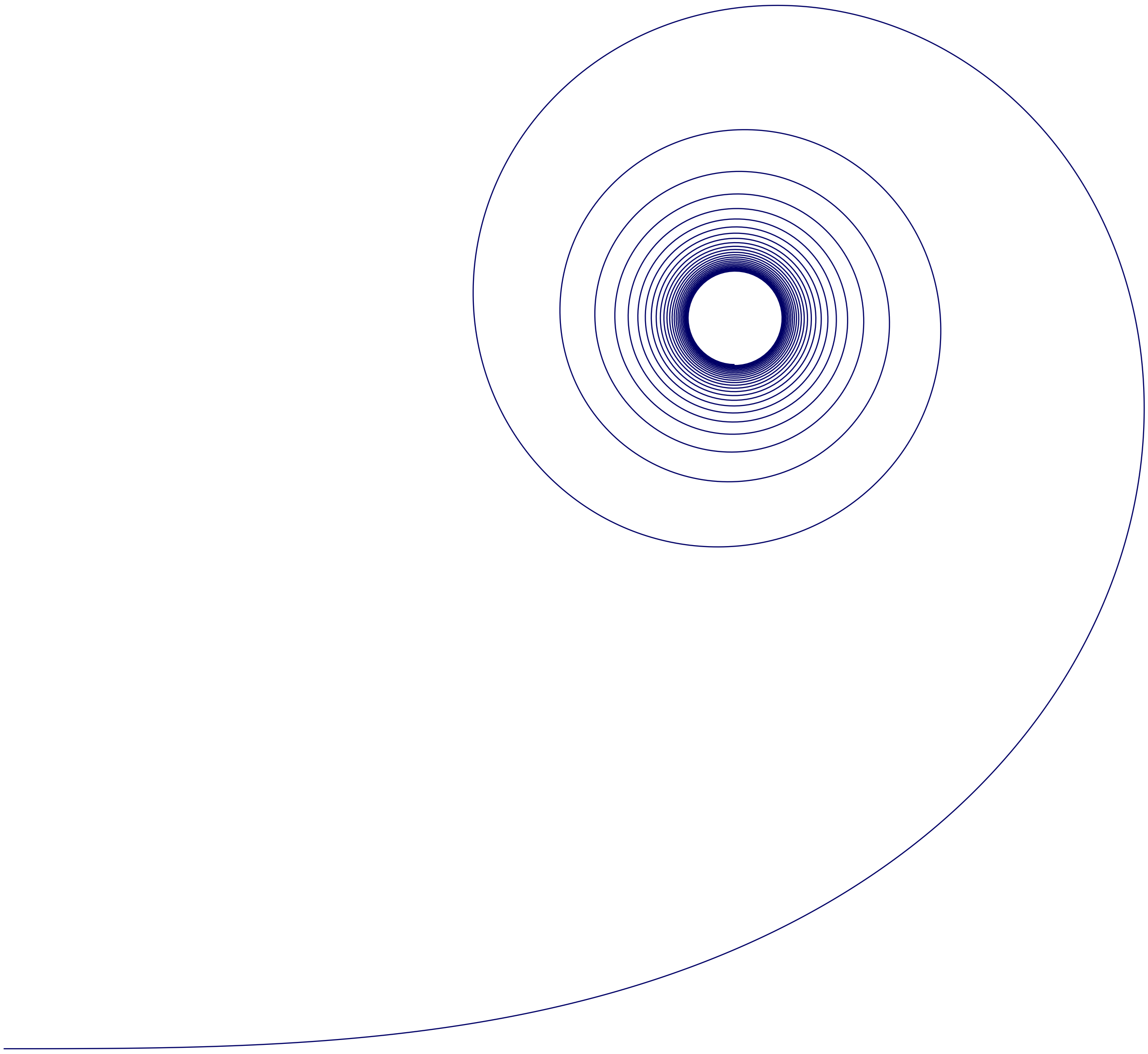
$$d\alpha = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$ds = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{1{,}5}}$$



↑ Klothoide (Cornu[1]-Spirale)



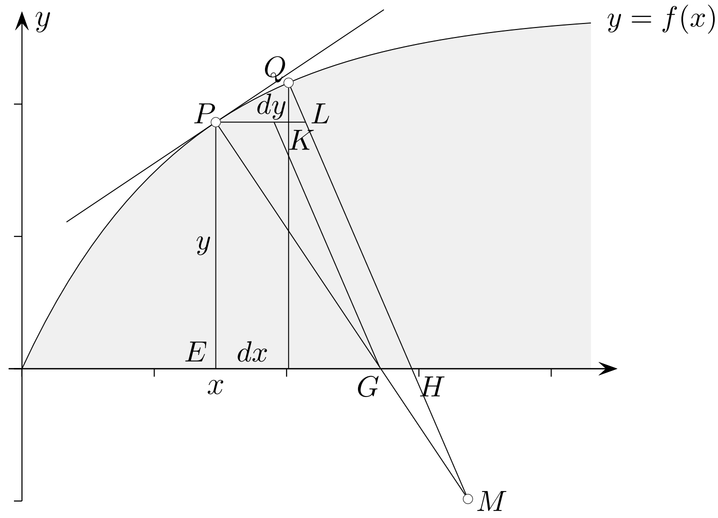
Die Klothoide wird als Übergangsbogen bei Kurven z. B. Gerade/Kreis im Straßen- und Eisenbahnbau eingesetzt. Ihr Krümmungsverlauf nimmt proportional zur Länge ihres Bogens zu, wodurch sich anstatt eines abrupten Rucks ein allmählicher Beschleunigungs-Übergang ergibt.

erste Untersuchungen
Jakob Bernoulli 1694
Leonhard Euler 1743

[1] franz. Physiker

↑ Krümmungskreis Johann Bernoulli

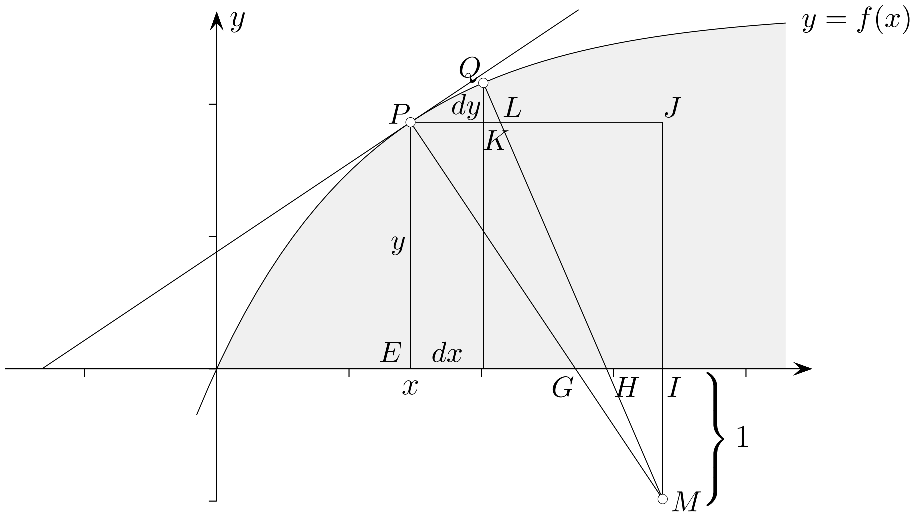
Newton berechnete 1665 den Krümmungskreis mit dem Schnitt zweier Normalen.
Gegen Ende der 17. Jh. gelang dies auch Johann Bernoulli.
Leibniz beschritt, wie wir gesehen haben, einen ganz anderen Weg.



1.	$\dfrac{PM}{PG} = \dfrac{PL}{PL - GH}$	Dreieck MLP, Strahlensatz, $r = PM$
2.	$\dfrac{PL}{PQ} = \dfrac{PQ}{PK}$	rechtwinkliges Dreieck PLQ
3.	$\Longrightarrow \quad PL = \dfrac{dx^2 + dy^2}{dx} = (1 + f'^2)\,dx$	mit dx erweitert
4.	$\dfrac{PG}{y} = \dfrac{PQ}{dx}$	ähnliche Dreiecke PEG und PKQ
5.	$\Longrightarrow \quad PG = y\,\dfrac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = y\sqrt{1 + f'^2}$	
6.	$\dfrac{EG}{y} = \dfrac{dy}{dx}$	ähnliche Dreiecke PEG und PKQ
7.	$\Longrightarrow \quad EG = \dfrac{y\,dy}{dx} = y\,f'$	
8.	$u(x) = x + EG = x + f\,f'$	$y = f, f'$ an der Stelle x, mit 7.
7.	$\Longrightarrow \quad du = (1 + f'^2 + f\,f'')\,dx = GH$	Produktregel, $GH = PL + f\,f''\,dx$
9.	$PM = -\dfrac{(1 + f'^2)\,dx\,f\sqrt{1 + f'^2}}{f\,f''\,dx}$	1., 3., 5., $\quad r = -\dfrac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''}$, $\quad$ Graph konvex $f'' < 0$

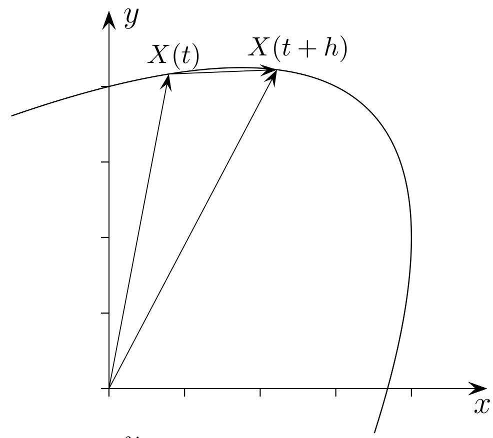
↑ Krümmungskreis Newton

Das Dreieck MJP ist rechtwinklig. Newton wählte I auf MJ so, dass die Länge von MI 1 ist. GI liegt hier zufällig auf der x-Achse. Diese Grafik enthält $f''(x)dx$.
Ich verwende anstelle Newtons Notation die Differentialschreibweise.



1.	$\frac{dy}{dx} = \frac{GI}{MI}$	ähnliche Dreiecke PKQ und MIG
2.	$\Longrightarrow \quad GI = \frac{dy}{dx} = f'(x)$	$f'(x+dx) = HI$
3.	$GH = f''(x)dx$	$GH = f'(x+dx) - f'(x)$
4.	$\frac{dy}{dx} = \frac{KL}{dy}$	rechtwinkliges Dreiecke PLQ
5.	$\Longrightarrow \quad PL = dx + KL = dx + \frac{dy^2}{dx}$	
6.	$\Longrightarrow \quad PL = \frac{dx^2 + dy^2}{dx} = (1 + f'^2)dx$	mit dx erweitert
7.	$\frac{MJ}{MI} = \frac{PL}{GH}$	
8.	$\Longrightarrow \quad MJ = \frac{(1 + f'^2)}{f''}$	mit 3., 7.
9.	$\frac{PJ}{MJ} = \frac{dy}{dx}$	$\Longrightarrow \quad PJ = MJ \cdot f' = \frac{f'(1 + f'^2)}{f''}$
10.	$r = MP = \sqrt{MJ^2 + PJ^2} = \dots$	$r = \lvert \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''} \rvert$

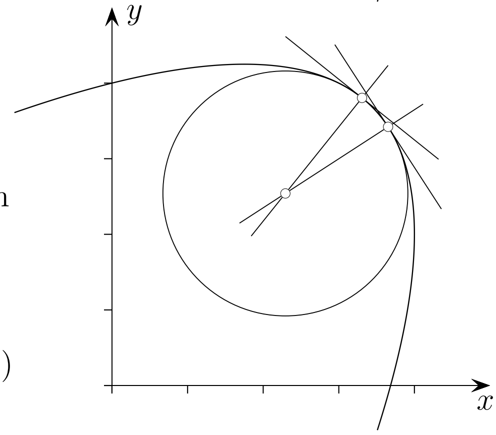
$\uparrow$ Krümmung vektoriell



Man überlegt sich leicht, dass eine Kurve $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

im Punkt $X(t)$ den Tangentenrichtungsvektor $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

hat. Die Tangentengleichung lautet: $Y = X(t) + \lambda \cdot X'(t)$



Man erhält den Krümmungskreismittelpunkt $M(t)$, indem man die Normalen zu $X(t)$ und $X(t+h)$ schneidet und im Schnittpunkt h gegen null streben lässt. Für die Schnittpunktberechnung wählen wir eine Parameter- und eine Normalenform.

$Y = X(t) + \lambda \cdot X'(t)^{\perp}$, $\qquad X'(t)^{\perp}$ senkrecht zu $X'(t)$

$X'(t+h) \cdot (\, Y - X(t+h)\,) = 0$

Die Schnittpunktsbestimmung führt auf

$$\lambda = \frac{(X(t+h) - X(t)) \cdot X'(t+h)}{X'(t)^{\perp} \cdot X'(t+h)} = \frac{\dfrac{X(t+h) - X(t)}{h} \cdot X'(t+h)}{X'(t)^{\perp} \cdot \dfrac{X'(t+h) - X'(t)}{h}} \quad \overset{h \to 0}{\Longrightarrow} \quad \lambda = \frac{X'(t) \cdot X'(t)}{X'(t)^{\perp} \cdot X''(t)}$$

Der Krümmungskreis besitzt den Mittelpunkt $M(t) = X(t) + \dfrac{X'(t) \cdot X'(t)}{X'(t)^{\perp} \cdot X''(t)} \cdot X'(t)^{\perp}$

und den Radius $r = \dfrac{|\, X'(t)\,|^3}{X'(t)^{\perp} \cdot X''(t)}$.

Die *Krümmung* eines Kurvenpunktes ist der reziproke Krümmungskreisradius $\kappa = \dfrac{X'(t)^{\perp} \cdot X''(t)}{|\, X'(t)\,|^3}$.

Für $X(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ erhalten wir $X'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$, $X'(x)^{\perp} = \begin{pmatrix} f'(x) \\ -1 \end{pmatrix}$, $X''(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(x) \end{pmatrix}$,

$|\, X'(t)\,|^3 = (1 + f'^2)^{3/2}$ und $r = -\dfrac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''}$.

Differenzial- und Integralrechnung
Trassierung
Startseite