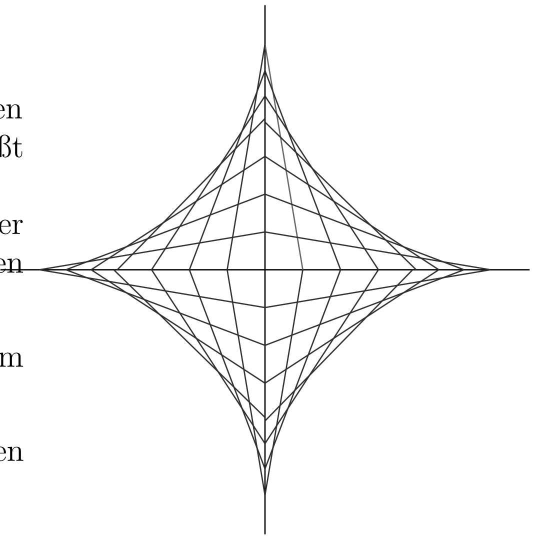
Hüllkurve

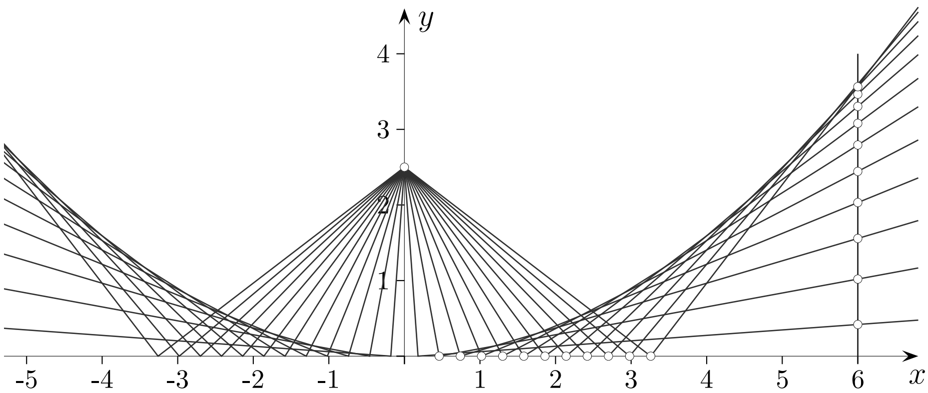


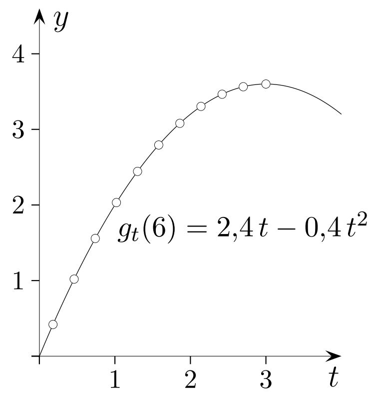
Die Enden eines Stabes gleiten auf zwei zueinander senkrechten Achsen. Die hierbei von den Strecken eingehüllte Kurve heißt Asteroide (Sternkurve).
Allgemein nennt man eine Funktion $h(x)$ eine Hüllfunktion einer Geradenschar $g_t(x)$, wenn folgende Berühreigenschaften gegeben sind:

a) Jede Gerade g_t der Schar berührt die Hüllkurve in einem Punkt.

b) Jeder Punkt der Hüllkurve ist Berührpunkt einer Geraden der Schar.

Die Hüllfunktion einer Funktionenschar wird entsprechend definiert.

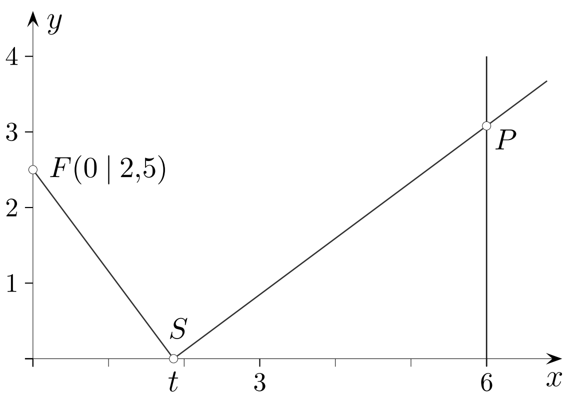




1. Die Geradenschar, die die Parabel einhüllt, lautet:
   $g_t(x) = 0{,}4\,t\,x - 0{,}4\,t^2$
   (Abschnitt auf der x-Achse als Parameter t)

2. z. B. ergibt sich $h(6)$ aus der Bedingung: $g_t'(6) = 0$
   (Ableitung nach t)
   Ergebnis: $t = 3$ und daher $h(6) = 3{,}6$

3. x allgemein ergibt $t = \dfrac{1}{2}x, \quad h(x) = 0{,}1\,x^2$



Schema zur Berechnung von Hüllfunktionen:

a) $g_t(x)$ nach t ableiten und $g_t'(x) = 0$ nach t umstellen,

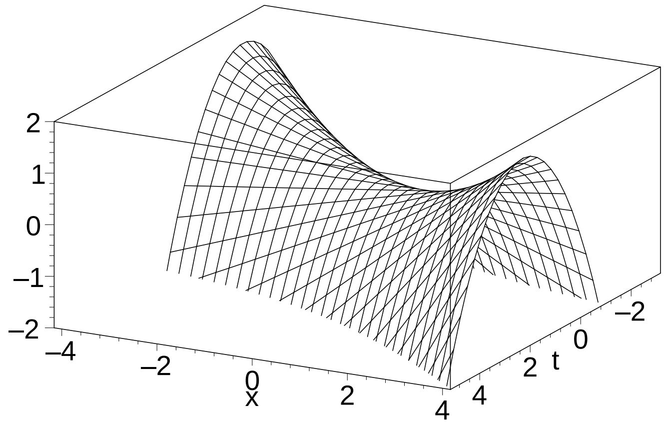
b) den erhaltenen Term für t in $g_t(x)$ einsetzen,

c) Berühreigenschaften nachprüfen.

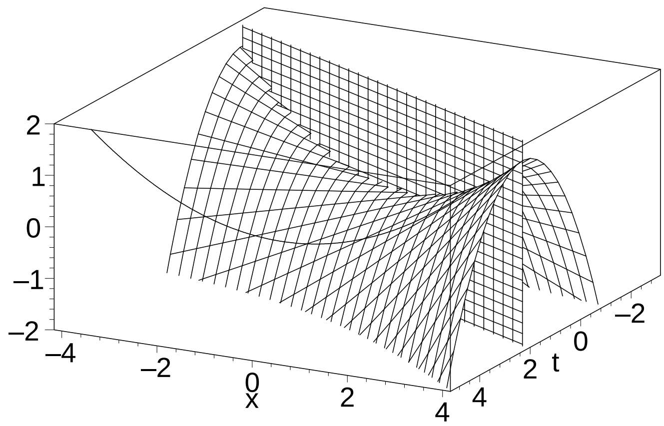
4. Wie lautet die Hüllfunktion der Funktionenschar:
   $f_t(x) = x^2 - 2tx + 2t^2$?

Hüllkurve

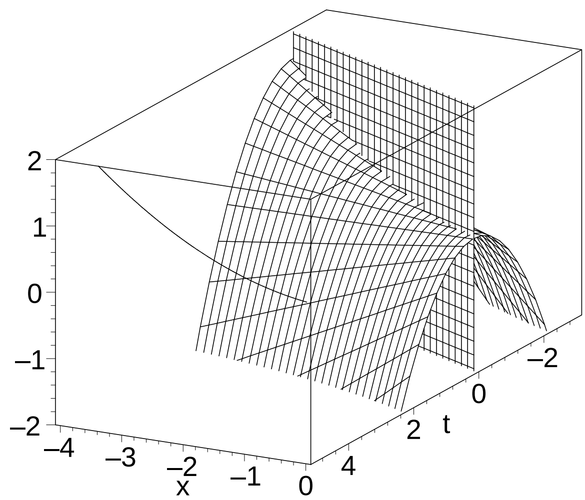
Die Vorgehensweise zur Ermittlung der Hüllkurve wird besonders einsichtig, wenn die Funktion der Geradenschar $g_t(x) = 0{,}4t\,x - 0{,}4t^2$ als Funktion mit zwei Variablen grafisch dargestellt wird.



Die Hüllkurve wird in der 2. Grafik an die vordere Quaderfläche projiziert.

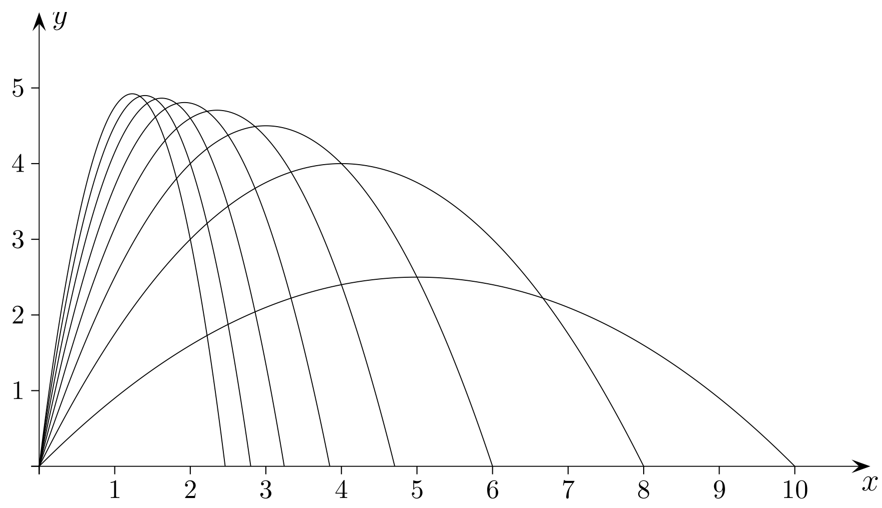


Erläutere anhand der 3. Grafik die Rechenschritte zur Ermittlung einer Hüllkurve.



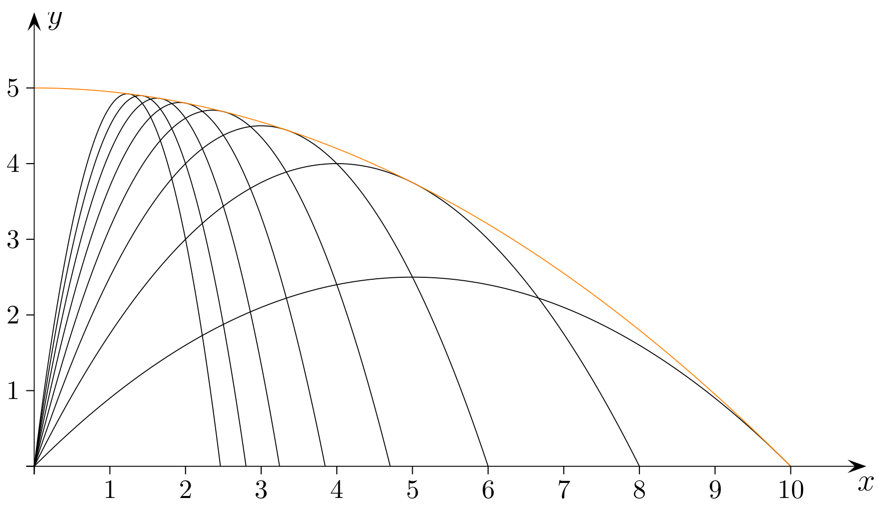
Fontänen

Zeige, dass die Funktionenschar $f_k(x) = kx - 0{,}05(1 + k^2)x^2$ eine Hüllfunktion besitzt.



Fontänen

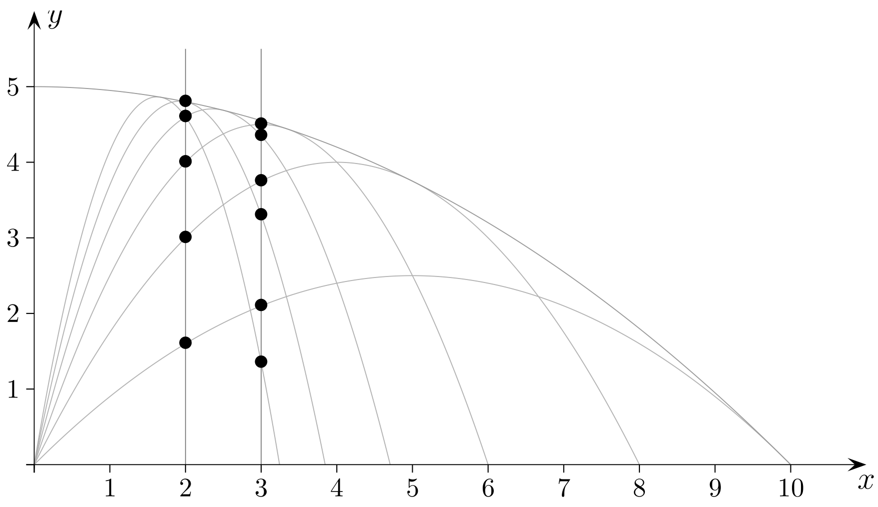
Zeige, dass die Funktionenschar $f_k(x) = kx - 0{,}05(1 + k^2)x^2$ eine Hüllfunktion besitzt.



$$k = \frac{10}{x}$$

$$h(x) = 5 - 0{,}05x^2$$

Hüllfunktion



Die Hüllkurve wird als Verdichtungslinie der Parabeln gesehen.
Die Punkte auf den vertikalen Linien verdichten sich auf der Hüllkurve,
die y-Zuwächse streben gegen null.