

Rotationsvolumen Ausstellungshalle

In einem Entwurf für eine Ausstellungshalle soll das Profil der Querschnittsfläche (siehe Zeichnung) im Intervall $[10, 15]$ durch die Funktion $f(x) = \sqrt{75 - 5x}$ beschrieben werden. Im Bereich $[0, 10]$ soll die Begrenzung geradlinig sein, sodass an der Stelle $x = 10$ kein Knick auftritt. Die Halle wird rotationssymmetrisch zur y -Achse geplant.

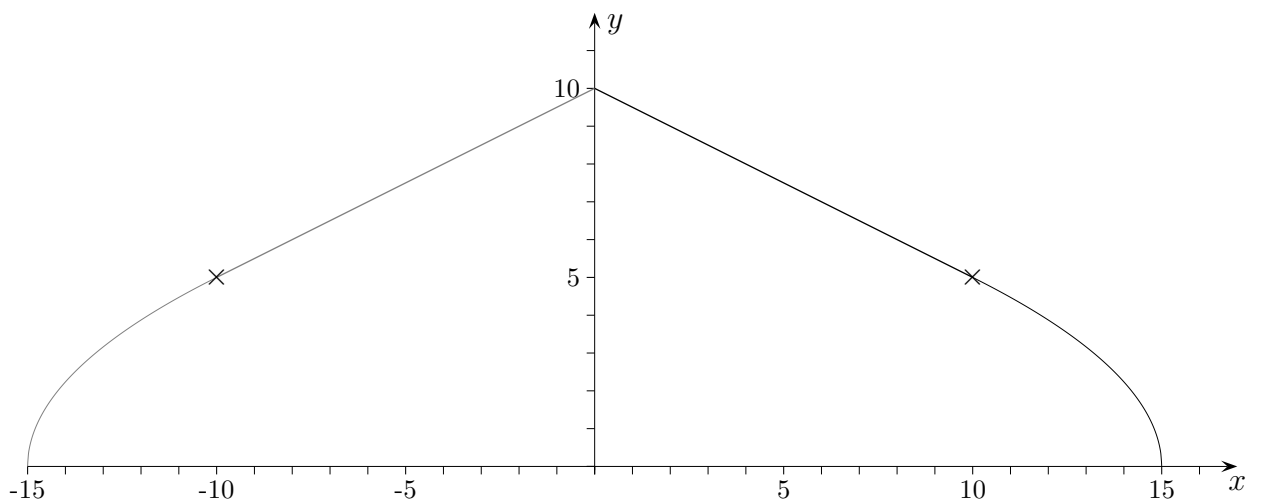
- Zeigen Sie, dass die Höhe der Ausstellungshalle 10 m beträgt.
- Ermitteln Sie eine Funktion, die das Profil auf dem Intervall $[-15, -10]$ beschreibt.
Berechnen Sie
- die Länge der gestrichelten Mantellinie,
- das Hallen-Volumen,
- die Größe der Hallenwandfläche.

$$\text{Bogenlänge: } s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Für zur x -Achse drehymmetrische Körper gilt:

$$\text{Volumen: } V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$\text{Oberfläche: } A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



Ausstellungshalle Ergebnisse

In einem Entwurf für eine Ausstellungshalle soll das Profil der Querschnittsfläche (siehe Zeichnung) im Intervall $[10, 15]$ durch die Funktion $f(x) = \sqrt{75 - 5x}$ beschrieben werden. Im Bereich $[0, 10]$ soll die Begrenzung geradlinig sein, sodass an der Stelle $x = 10$ kein Knick auftritt. Die Halle wird rotationssymmetrisch zur y -Achse geplant.

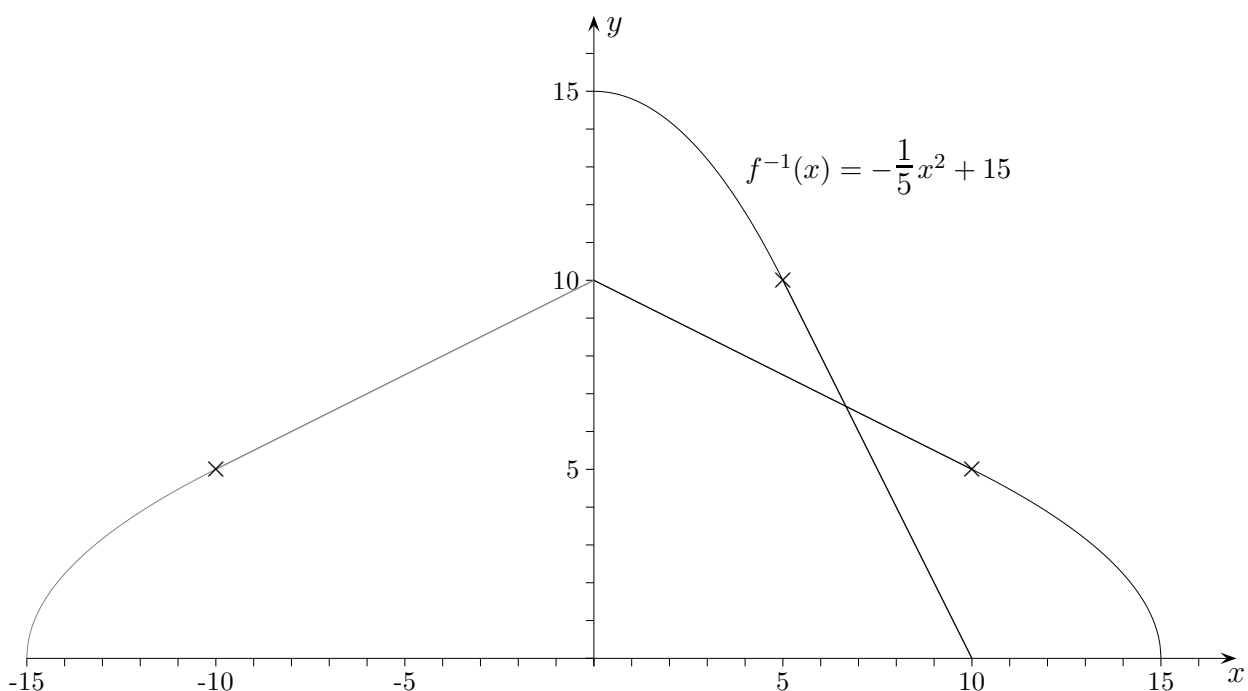
- | | |
|--|---|
| a) Zeigen Sie, dass die Höhe der Ausstellungshalle 10 m beträgt. | $y = -\frac{1}{2}x + 10$ |
| b) Ermitteln Sie eine Funktion, die das Profil auf dem Intervall $[-15, -10]$ beschreibt.
Berechnen Sie | $f^*(x) = \sqrt{75 + 5x}$ |
| c) die Länge der gestrichelten Mantellinie, | $7,395 + 11,180 = 18,575 \text{ (m)}$
beachte: $f'(15)$ existiert nicht. |
| d) das Hallen-Volumen, | $2827,433 + 523,704 = 3351,137 \text{ (m}^3\text{)}$ |
| e) die Größe der Hallenwandfläche. | $601,692 + 351,241 = 952,933 \text{ (m}^2\text{)}$ |

Bogenlänge: $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Für zur x -Achse drehsymmetrische Körper gilt:
(beachte auch die Formeln für den Kegel)

Volumen: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

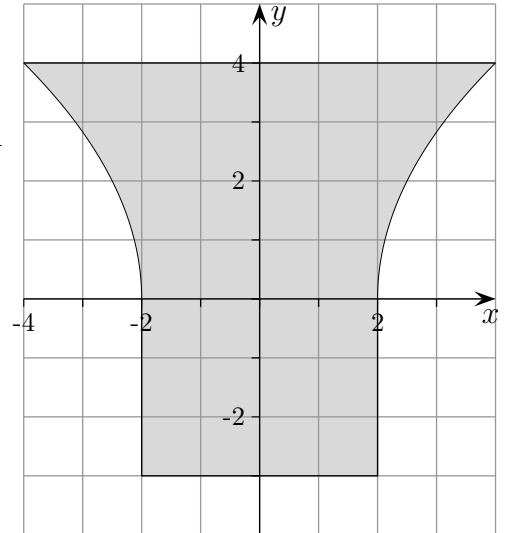
Oberfläche: $A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$



Rotationskörper Aufgaben

1. In der nebenstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer bzgl. der y -Achse rotationssymmetrischen Vase dargestellt. Der im 1. Quadranten liegende rechte Rand wird durch die Funktion $f(x) = a\sqrt{x+b}$ beschrieben.

- a) Ermitteln Sie a und b so, dass man den dargestellten Graphen erhält.
- b) Begründen Sie, dass mit Hilfe dieser Wurzelfunktion der Übergang zum zylindrischen Teil der Vase ohne Knick, wie es in der Abbildung dargestellt ist, beschrieben wird.
- c) Berechnen Sie das Volumen der Vase für $a = 2\sqrt{2}$ und $b = -2$.



2. Durch Rotation der Geraden $g(x) = -kx + 1$ ($k > 0$) um die x -Achse auf dem Intervall $[0; 3]$ entsteht ein Körper, der je nach Wahl von k aus einem oder zwei zusammenhängenden Teilen besteht.

- a) Welche Rotationskörper können in Abhängigkeit von k entstehen?
- b) Welcher der Rotationskörper hat das kleinste Volumen?

3. Für jedes k ($k > 0$) ist die Funktion $f_k(x) = (k - x)\sqrt{x}$ gegeben.

- a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_k und wählen Sie das k so, dass an der Stelle $x = 1$ ein Punkt mit waagerechter Tangente vorliegt.

Durch Rotation der Kurve f_3 um die x -Achse entsteht ein tropfenförmiger Körper.

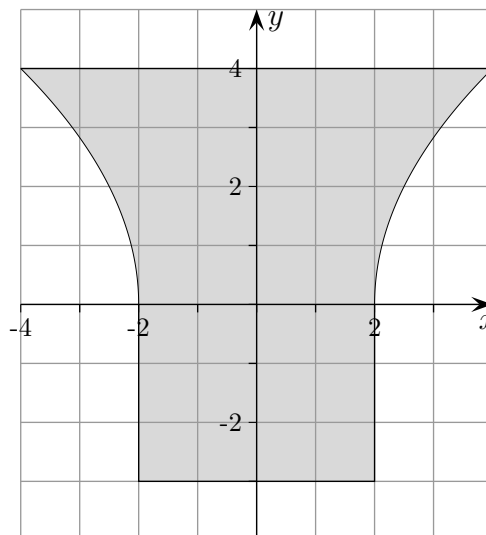
Ab hier sei $k = 3$.

- b) Berechnen Sie die größte ebene Schnittfläche senkrecht zur Drehachse.
- c) Berechnen Sie die Fläche eines ebenen Schnitts längs der Drehachse (die Drehachse liegt in der Schnittfläche).
- d) Eine zur Drehachse senkrechte Schnittfläche durch $x = a$ halbiert das Volumen des Körpers. Geben Sie eine Gleichung (ohne Integralzeichen) für a an.

Rotationskörper Aufgaben Ergebnisse

1. In der nebenstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer bzgl. der y -Achse rotationssymmetrischen Vase dargestellt. Der im 1. Quadranten liegende rechte Rand wird durch die Funktion $f(x) = a\sqrt{x+b}$ beschrieben.

- a) Ermitteln Sie a und b so, dass man den dargestellten Graphen erhält. siehe c)
- b) Begründen Sie, dass mit Hilfe dieser Wurzelfunktion der Übergang zum zylindrischen Teil der Vase ohne Knick, wie es in der Abbildung dargestellt ist, beschrieben wird.
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \infty$
- c) Berechnen Sie das Volumen der Vase für $a = 2\sqrt{2}$ und $b = -2$. 131,53 VE



2. Durch Rotation der Geraden $g(x) = -kx + 1$ ($k > 0$) um die x -Achse auf dem Intervall $[0; 3]$ entsteht ein Körper, der je nach Wahl von k aus einem oder zwei zusammenhängenden Teilen besteht.

- a) Welche Rotationskörper können in Abhängigkeit von k entstehen?
- $k < \frac{1}{3}$ Kegelstumpf
 $k = \frac{1}{3}$ Kegel
 $k > \frac{1}{3}$ Doppelkegel
- b) Welcher der Rotationskörper hat das kleinste Volumen?
- $V(x) = \pi \int_0^3 (-kx + 1)^2 dx \quad k_{\min} = \frac{1}{2}$

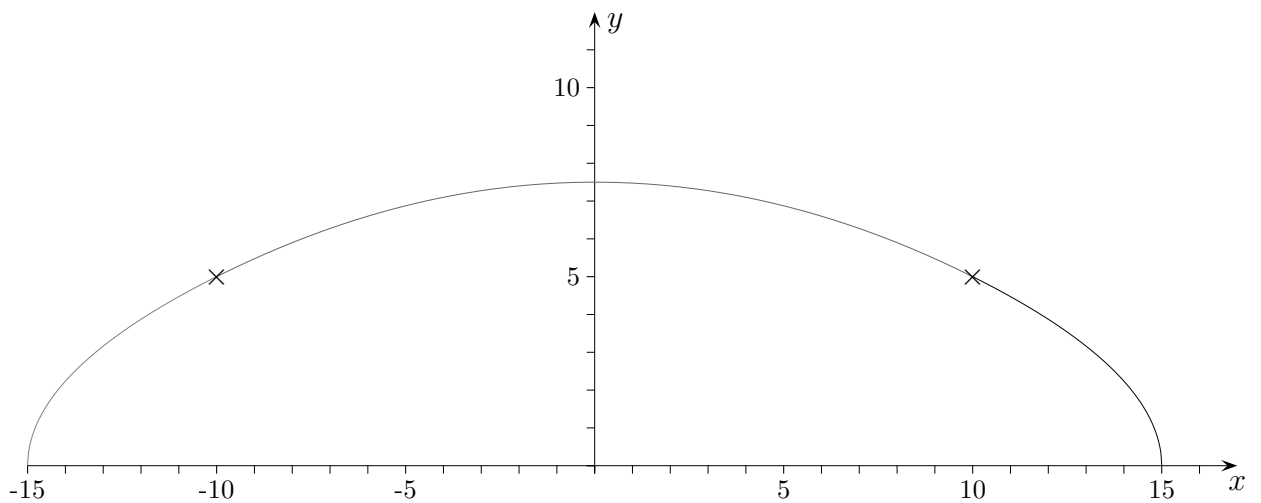
3. Für jedes k ($k > 0$) ist die Funktion $f_k(x) = (k-x)\sqrt{x}$ gegeben.

- a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_k und wählen Sie das k so, dass an der Stelle $x = 1$ ein Punkt mit waagerechter Tangente vorliegt. $k = 3$
- Durch Rotation der Kurve f_3 um die x -Achse entsteht ein tropfenförmiger Körper.
Ab hier sei $k = 3$.
- b) Berechnen Sie die größte ebene Schnittfläche senkrecht zur Drehachse. 4 π FE
- c) Berechnen Sie die Fläche eines ebenen Schnitts längs der Drehachse (die Drehachse liegt in der Schnittfläche). $\frac{24}{5}\sqrt{3}$ FE
- d) Eine zur Drehachse senkrechte Schnittfläche durch $x = a$ halbiert das Volumen des Körpers. Geben Sie eine Gleichung (ohne Integralzeichen) für a an.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{27}{4} \pi = \pi \left(\frac{1}{4} a^4 - 2a^3 + \frac{9}{2} a^2 \right)$$

Ausstellungshalle 2. Aufgabe

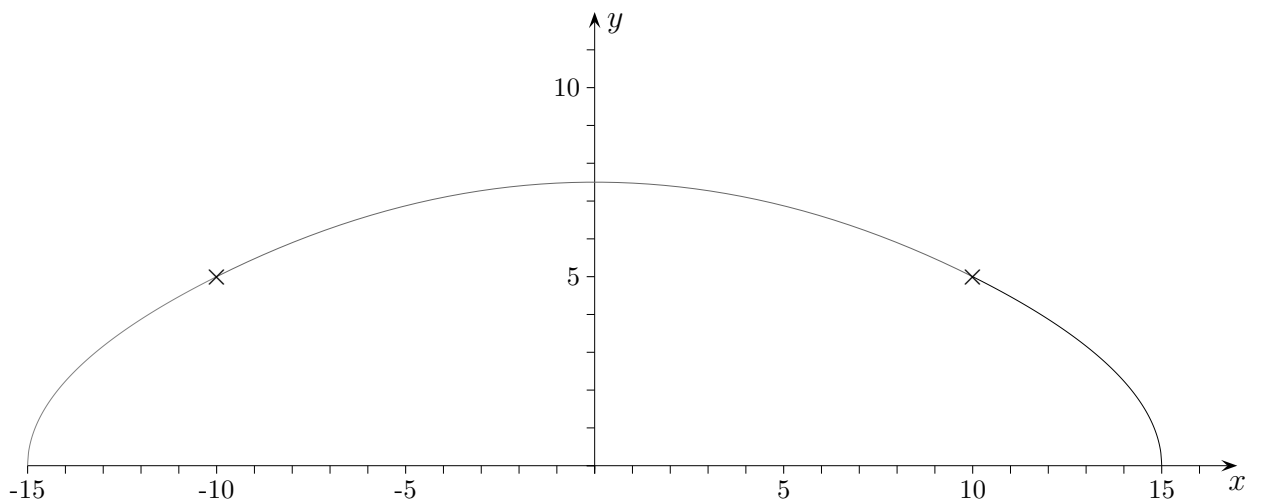
In einem Entwurf für eine Ausstellungshalle soll das Profil der Querschnittsfläche im Intervall $[10, 15]$ durch die Funktion $f(x) = \sqrt{75 - 5x}$ beschrieben werden, im Bereich $[0, 10]$ durch $g(x) = -ax^2 + b$, so dass an der Stelle $x = 10$ kein Knick auftritt. Die Halle wird rotations-symmetrisch zur y -Achse geplant.



- Bestimmen Sie a und b .
- Berechnen Sie das Volumen.

Ausstellungshalle 2. Aufgabe

In einem Entwurf für eine Ausstellungshalle soll das Profil der Querschnittsfläche im Intervall $[10, 15]$ durch die Funktion $f(x) = \sqrt{75 - 5x}$ beschrieben werden, im Bereich $[0, 10]$ durch $g(x) = -ax^2 + b$, so dass an der Stelle $x = 10$ kein Knick auftritt. Die Halle wird rotationssymmetrisch zur y -Achse geplant.



- Bestimmen Sie a und b .
- Berechnen Sie das Volumen.

Ergebnisse:

a) $f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{15}{2}$

b) $V = \pi \int_0^5 \left(15 - \frac{x^2}{5}\right)^2 dx + \pi \int_5^{7,5} (300 - 40x) dx = 3220,132 \text{ VE}$ oder

$$V = 2\pi \int_0^{10} x \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{15}{2}\right) dx + 2\pi \int_{10}^{15} x\sqrt{75 - 5x} dx = 3220,132 \text{ VE} \quad \text{Schalenmethode}$$