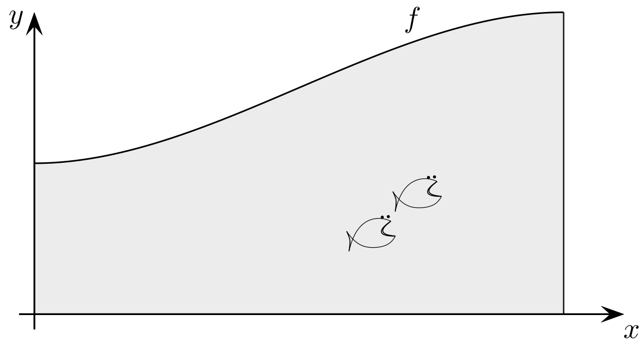
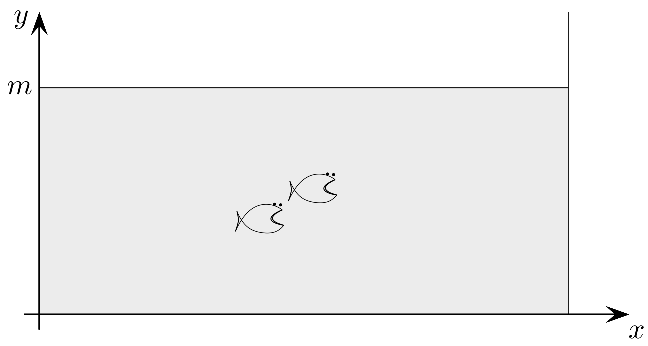
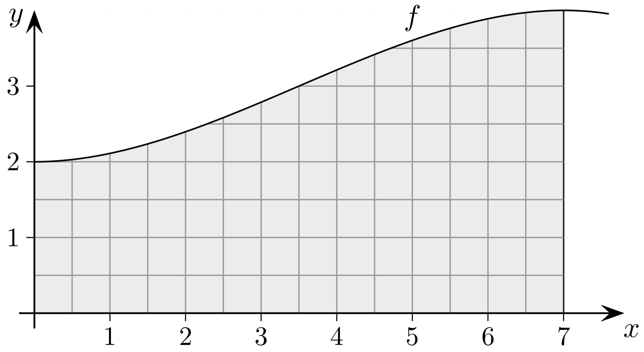
Mittlerer Funktionswert Einstieg

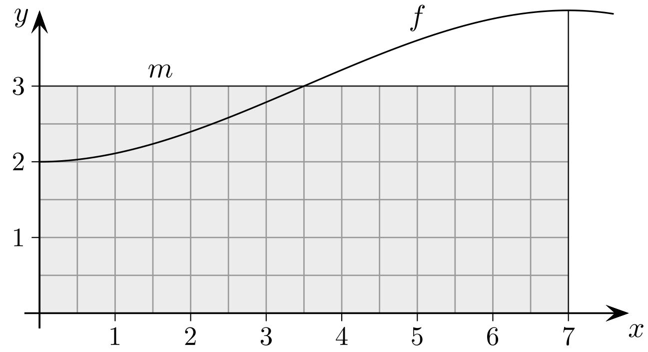




Durch einen Stoß gegen ein Aquarium schwappt das Wasser hin und her.
Die linke Grafik zeigt ein zwischenzeitliches Höhenprofil der Wasseroberfläche.
Wie kann die Höhe der waagerechten Wasseroberfläche ermittelt werden, die sich nach einiger Zeit wieder einstellt?

Mittlerer Funktionswert





Für den mittleren Funktionswert m der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ soll gelten (Definition):

$$m \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad m = \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, d. h. $F'(x) = f(x)$, dann gilt:

$$m = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \qquad \text{(Sekantensteigung)}$$

Für mittlere Änderungsraten ist dieser Zusammenhang bedeutsam.
Sei also $f(t)$ eine Funktion, die den zeitlichen Verlauf einer Änderungsrate (z. B. einer Wachstumsgeschwindigkeit) beschreibt (hierfür ist auch f' eine häufig verwendete Bezeichnung).
Die mittlere Änderungsrate des Bestandes F auf einem Intervall (mittlerer Funktionswert von f) ist dann einfach die Sekantensteigung m von F.

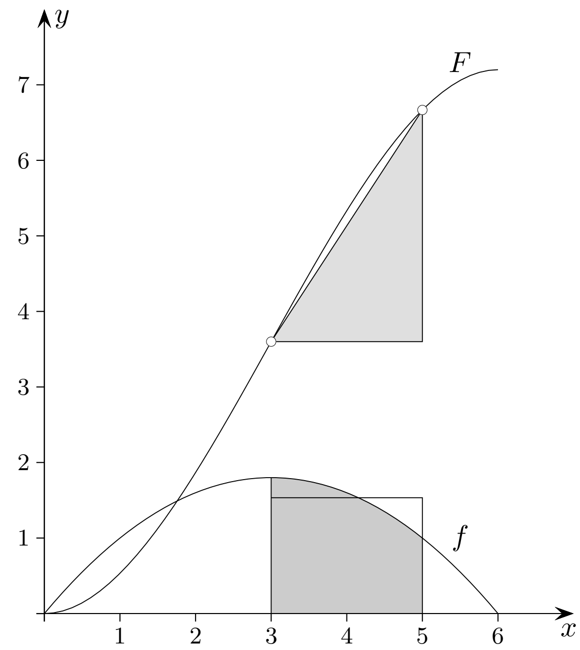
Sei zur Zeit $t = a$ der Bestand F null ($F(a) = 0$), so gilt

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \qquad \text{beachte:} \quad F'(t) = f(t)$$

Allgemeiner gilt mit einem Bestand $F(a)$ zum Zeitpunkt $t = a$

$$F(t) = F(a) + \int_a^t f(x)\,dx$$

Durchschnittliche Änderungsrate m von F auf dem Intervall $[3; 5]$



$$F(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2$$

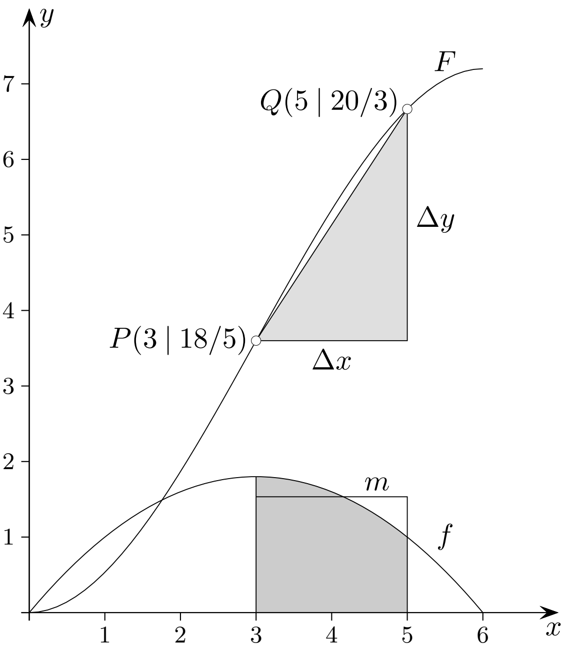
$$f(x) = -\frac{1}{5}x(x-6), \qquad F' = f$$

Erläutere die Grafik und ermittle m.

Durchschnittliche Änderungsrate m von F auf dem Intervall $[3; 5]$

$$F(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2$$

$$f(x) = -\frac{1}{5}x(x-6), \qquad F' = f$$



Für die durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate m von F auf dem Intervall $[a, b]$ gilt:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ Rechtecksinhalt ist gleich dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen.

$$= \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$ Sekantensteigung von F (Bestandsfunktion)

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

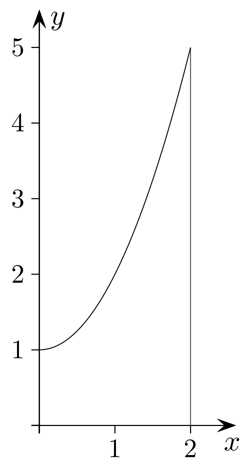
Rechnung für die durchschnittliche Änderungsrate m von F auf dem Intervall $[3; 5]$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20/3 - 18/5}{5-3} = 23/15 \approx 1{,}533$$

Anwendungen enthalten häufig entweder eine Bestands- oder eine Änderungsratenfunktion, also die Ableitung einer Bestandsfunktion. Die durchschnittliche Änderungsrate der Bestandsfunktion auf einem Intervall wird als Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Sekantensteigung) der Bestandsfunktion berechnet. Zuvor sind die Koordinaten von P und Q zu bestimmen, siehe Grafik. Falls die Aufgabenstellung nur die Änderungsratenfunktion enthält, ist die Bestandsfunktion durch Integration zu ermitteln. Bestands- und Änderungsratenfunktion sind jeweils an der Einheit zu erkennen, die Bezeichnungen variieren. Im Gegensatz zu einer Bestandsfunktion ist die Einheit einer Änderungsratenfunktion ein Quotient von Einheiten, z. B. $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, d. h. Meter/Sekunde.

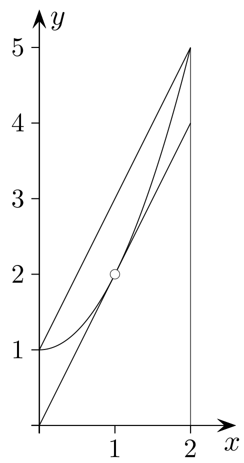
Mittlerer Funktionswert

An welcher Stelle ist die momentane Änderungsrate von $f(x) = x^2 + 1$
gleich der durchschnittlichen Änderungsrate von f zwischen $x = 0$ und $x = 2$?



Mittlerer Funktionswert

An welcher Stelle ist die momentane Änderungsrate von $f(x) = x^2 + 1$
gleich der durchschnittlichen Änderungsrate von f zwischen $x = 0$ und $x = 2$?



Die durchschnittliche Änderungsrate von f zwischen $x = 0$ und $x = 2$ beträgt $m = 2$ (Sekantensteigung).
$m = 2$ ist (natürlich) auch der mittlere Funktionswert von $f'(x) = 2x$ auf dem Intervall $[0; 2]$.
Die gesuchte Stelle ist $x = 1 \quad (f'(x) = m)$.

Die Sekantensteigung tritt an einer Zwischenstelle als Tangentensteigung auf.
Das ist die Aussage des Mittelwertsatzes.