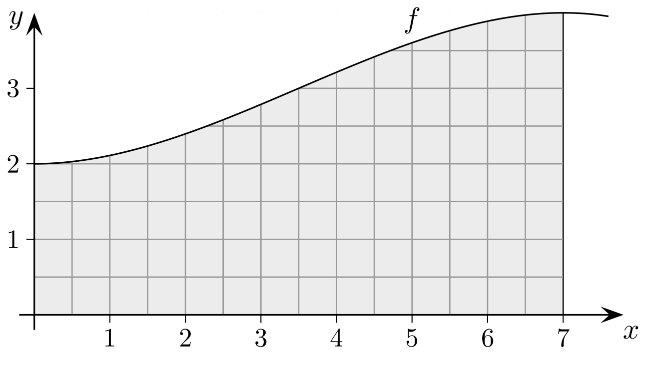
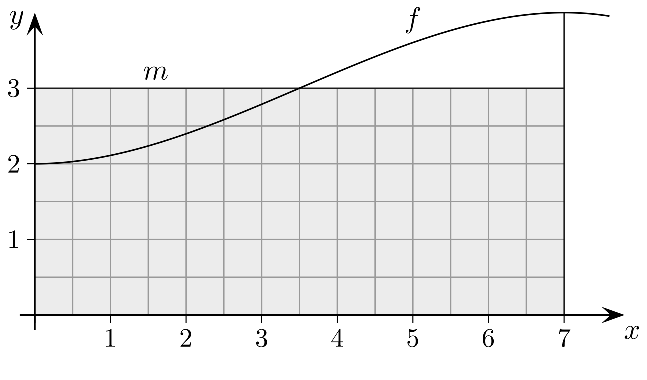
Mittlerer Funktionswert





Für den mittleren Funktionswert m der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ soll gelten (Definition):

$$m \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad m = \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, d. h. $F'(x) = f(x)$, dann gilt:

$$m = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \qquad \text{(Sekantensteigung)}$$

Für mittlere Änderungsraten ist dieser Zusammenhang bedeutsam.
Sei also $f(t)$ eine Funktion, die den zeitlichen Verlauf einer Änderungsrate (z. B. einer Wachstumsgeschwindigkeit) beschreibt (hierfür ist auch f' eine häufig verwendete Bezeichnung).
Die mittlere Änderungsrate des Bestandes F auf einem Intervall (mittlerer Funktionswert von f) ist dann einfach die Sekantensteigung m von F.

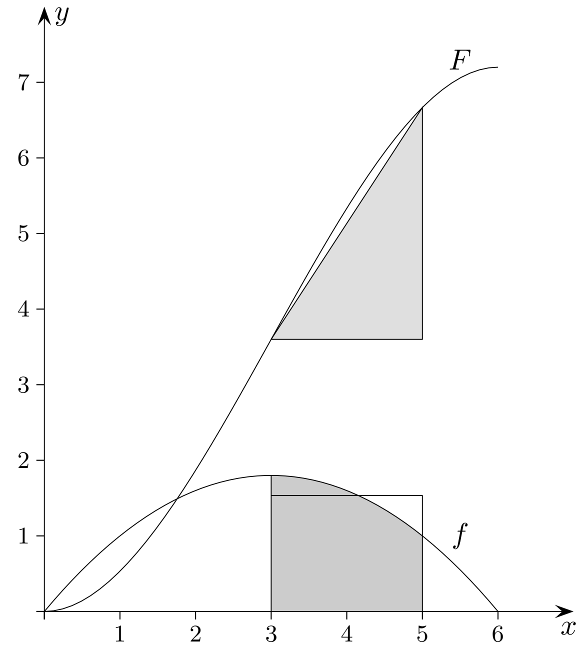
Sei zur Zeit $t = a$ der Bestand F null ($F(a) = 0$), so gilt

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \qquad\qquad \text{beachte:} \quad F'(t) = f(t)$$

Allgemeiner gilt mit einem Bestand $F(a)$ zum Zeitpunkt $t = a$

$$F(t) = F(a) + \int_a^t f(x)\,dx$$

Durchschnittliche Änderungsrate m

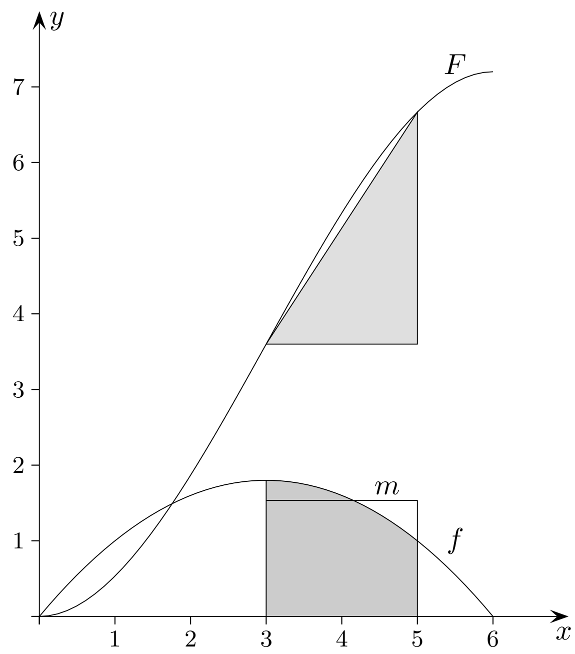


$$f(x) = -\frac{1}{5}x(x-6)$$

$$F(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2$$

Erläutere die Grafik und
ermittle m.

Durchschnittliche Änderungsrate m



$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{5}x(x-6) \\ F(x) &= -\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2 \\ m &= 1{,}533 \end{aligned}$$

Für die durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate m auf dem Intervall $[a, b]$ gilt:

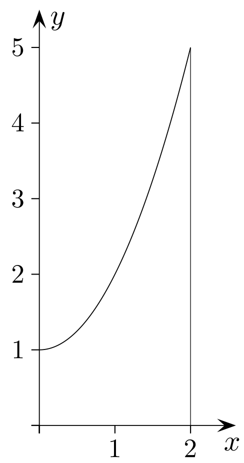
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ Rechtecksinhalt ist gleich dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen.

$$= \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$ Sekantensteigung von F (Bestandsfunktion), $F' = f$

Je nachdem, was gegeben ist (f oder F), wird man den einen oder anderen Weg bevorzugen, um die durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von F zu berechnen.

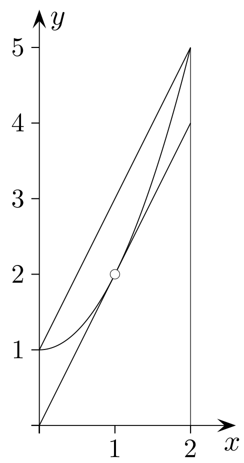
Mittlerer Funktionswert

An welcher Stelle ist die momentane Änderungsrate von $f(x) = x^2 + 1$
gleich der durchschnittlichen Änderungsrate von f zwischen $x = 0$ und $x = 2$?



Mittlerer Funktionswert

An welcher Stelle ist die momentane Änderungsrate von $f(x) = x^2 + 1$
gleich der durchschnittlichen Änderungsrate von f zwischen $x = 0$ und $x = 2$?



Die durchschnittliche Änderungsrate von f zwischen $x = 0$ und $x = 2$ beträgt $m = 2$ (Sekantensteigung).
$m = 2$ ist (natürlich) auch der mittlere Funktionswert von $f'(x) = 2x$ auf dem Intervall $[0; 2]$.
Die gesuchte Stelle ist $x = 1 \quad (f'(x) = m)$.

Die Sekantensteigung tritt an einer Zwischenstelle als Tangentensteigung auf.
Das ist die Aussage des Mittelwertsatzes.