Regel von l´Hospital

franz. Mathematiker (1661-1704)
Verfasser des Lehrbuchs der Differentialrechnung:
Analyse des infiniment petits

Die Regel von l´Hospital vereinfacht in vielen Fällen die Grenzwertberechnungen.

Betrachten wir das Beispiel: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2}{x} = ?$ Hier liegt der Fall $\dfrac{0}{0}$ vor.

Nach der Regel von l´Hospital kann der Grenzwert bestimmt werden, indem man Zähler und Nenner getrennt ableitet. Beachte: Dies hat nichts mit der Quotientenregel zu tun!

Also: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x}{1} = 2e^0 = 2$

Mit Hilfe der Regel von l´Hospital lassen sich Grenzwerte für die Fälle $\dfrac{0}{0}$ und $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ mit $x \to \infty$, $x \to -\infty$ oder $x \to a$ ermitteln.

Die Regel kann wiederholt angewandt werden, falls der Fall $\dfrac{0}{0}$ bzw. $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ erhalten bleibt.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{6} = \infty$$

Wir können den Satz von l´Hospital für den Fall $\dfrac{0}{0}$ und $x \to 0$ einsehen.

Für die beiden Funktionen f und g gelte, dass sie durch den Ursprung verlaufen. Dann gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} \quad \text{, falls} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existiert.}$$

Begründung: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(0)\,x}{g'(0)\,x} = \dfrac{f'(0)}{g'(0)}$ f und g werden durch ihre Tangenten im Ursprung approximiert.

Der Fall $0 \cdot \infty$ kann manchmal auf einen der genannten Fälle zurückgeführt werden.

Strenggenommen existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$ nicht, da ein Grenzwert eine reelle Zahl ist. Diese Schreibweise beinhaltet, dass die Funktion $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ für $x \to \infty$ unbegrenzt wächst.

Bestimme die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 \cdot e^{-x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \cdot \ln x$ d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{5x^3 - 4x^2}{2x^5 + 8x^3}$

Lösungen

a) 0 *b)* 0

c) 0 *d)* $-\infty$

l´Hospital Weitere Untersuchungen

1. $\dfrac{\infty}{\infty}$ für $x \to 0$

Diesen Fall führen wir auf Bekanntes zurück. Die Existenz der Grenzwerte wird vorausgesetzt.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{(g(x))^2}\, g'(x)}{-\dfrac{1}{(f(x))^2}\, f'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\Longrightarrow \qquad 1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \textit{(warum?)}$$

2. $\dfrac{0}{0}$ für $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(\frac{1}{x}) \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{g'(\frac{1}{x}) \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

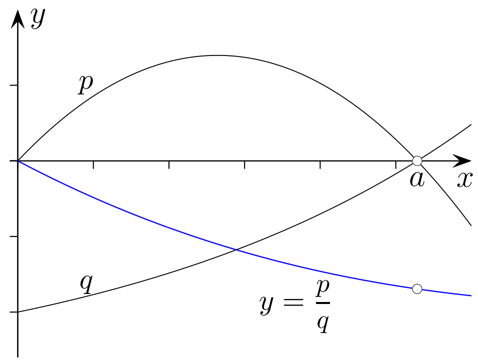
3. $\dfrac{\infty}{\infty}$ für $x \to \infty$

(leichte) Aufgabe

de L'Hospital 1696
Au reste je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de Mrs Bernoulli, sur tout à celles du jeune presentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes ...[1]

[1] Desweiteren bekenne ich, dass ich den Einsichten der Bernoulli-Brüder sehr viel verdanke, insbesondere dem jüngeren [gemeint Johann], der derzeit Professor in Groningen ist.
Ich habe mich ihrer Entdeckungen ohne Scham bedient ...

l´Hospital



$$
\begin{aligned}
p(a) &= 0 \\
q(a) &= 0 \\
y + dy &= \frac{p + dp}{q + dq} \quad * \\
&= \frac{dp}{dq} \qquad\qquad \text{mit } \frac{1}{dx} \text{ erweitern} \\
\lim_{x \to a} y(a) &= \frac{p'(a)}{q'(a)}
\end{aligned}
$$

l'Hospital schildert in seinem Buch *Analyse des infiniment petits* auf Seite 145 das Problem, wenn Zähler und Nenner einer Funktion null sind und erläutert die mit $*$ markierte Zeile.
Im Beispiel (einige Jahre zuvor von Johann Bernoulli erhalten)

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - a^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} \quad \text{errechnet er} \quad y(a) = \frac{16}{9}a.$$