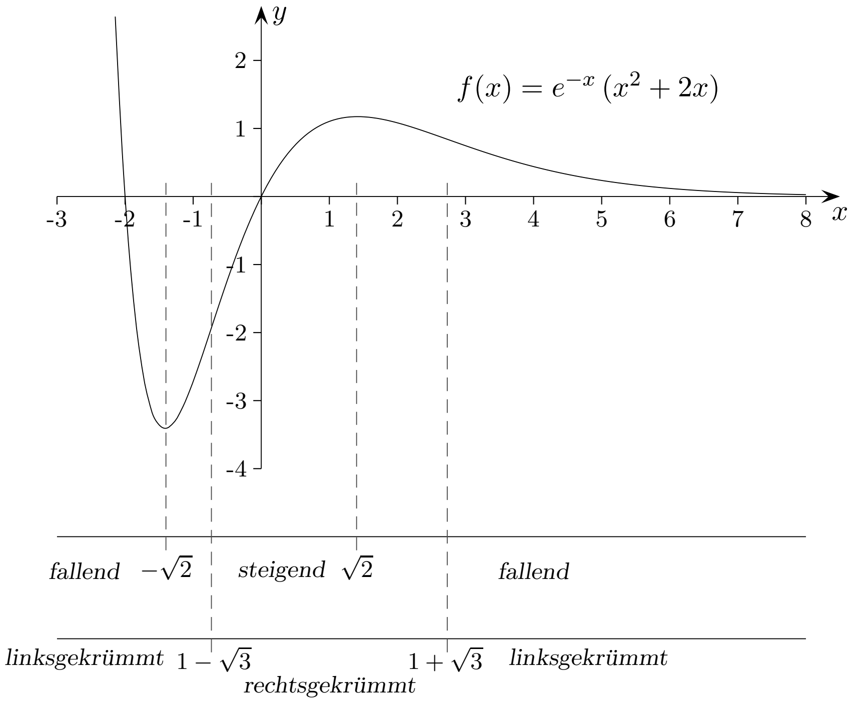
1. e-Funktionen, $f(x) = e^{-x}\,(x^2 + 2x)$
2. $f(x) = 5xe^{-\frac{x}{2}}$
3. aussterbende Tierpopulation
4. Sauerstoffproduktion
5. Virusinfektion
6. $f_t(x) = (x^2 - t^2)\,e^{-x^2}$
7. Kartenschalter
8. Konzentration eines Medikaments

   Ergänzung
9. Kraftstoffverbrauch
10. Wasserspeicher
11. Konzentration eines Medikaments
12. Buchenwachstum
13. Konzentration eines Medikamentes
14. Zu- und Abfluss
15. Erzförderung
16. Bakterienpopulation
17. Bakterienpopulation 1
18. Bakterienpopulation 2
19. Staulänge
20. Konzentration eines Medikaments
21. Atemtest
22. Populationsentwicklung
23. Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften
24. Überlaufgebiet
25. Wurf eines Balls

↑ e-Funktionen

1. Gegeben sei die Funktion $\quad f(x) = e^{-x}\,(x^2 + 2x) \quad .$
   Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Monotonie und Krümmung.
   Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

   Lösung:



$$f'(x) = -e^{-x}\,(x^2 - 2)$$
$$f''(x) = e^{-x}\,(x^2 - 2x - 2)$$

2. Gegeben sei die Funktion $\quad f(x) = 5xe^{-\frac{x}{2}} \quad .$

   a) Untersuchen Sie die Funktion, auch auf Monotonie und Krümmung.
   Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

   (Zur Kontrolle: $\quad f'(x) = 5e^{-\frac{x}{2}} \cdot (1 - \frac{x}{2})$ *)*

   b) Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade $x = 5$ begrenzen eine Fläche.
   Berechnen Sie deren Inhalt.

   c) Der in b) betrachteten Fläche ist ein rechtwinkliges Dreieck einbeschrieben. Seine Eckpunkte sind $O(0 \mid 0)$, $P(x \mid f(x))$ sowie $Q(x \mid 0)$ (Q ist der Fußpunkt des Lotes von P auf die x-Achse.).
   Rotiert dieses rechtwinklige Dreieck um die x-Achse, so entsteht ein gerader Kegel.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P für den Fall, dass das Volumen des Kegels maximal wird.

   d) Gegeben sei die Funktion g mit $\quad g(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

   Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\quad g^{(n)}(x) = (-\frac{1}{2})^n\, e^{-\frac{x}{2}}\,(x - 2n)$

↑ Lösung:

2. a) <u>Nullstellen:</u> $x = 0$

<u>Extrema:</u> f monoton steigend für $x < 2$, f monoton fallend für $x > 2$ $\Longrightarrow$ $Max(2 \mid \frac{10}{e})$

<u>Wendepunkte:</u> $f''(x) = 5e^{-\frac{x}{2}} \cdot (\frac{x}{4} - 1)$

Krümmung: f rechtsgekrümmt für $x < 4$, f linksgekrümmt für $x > 4$ $\Longrightarrow$ $W\left(4 \mid \frac{20}{e^2}\right)$

<u>Verhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$</u> $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

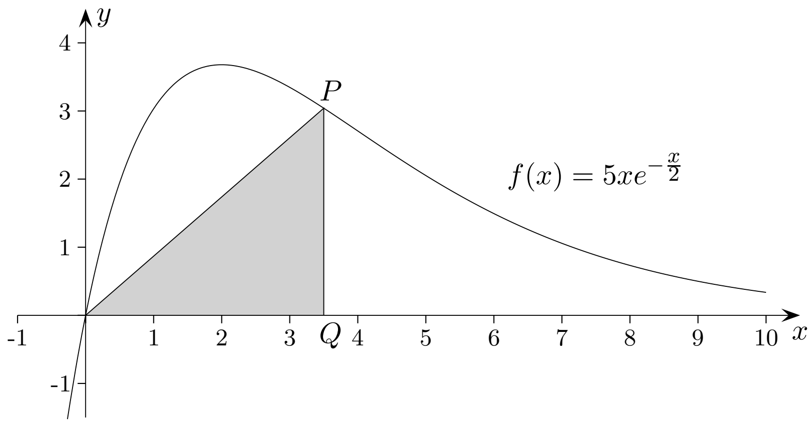
b) $A = 5 \cdot \int_0^5 xe^{-\frac{x}{2}}\, dx = 5 \cdot \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x+2)\right]_0^5 = 10\,(2 - \frac{7}{e^{2,5}}) = 14,25$ (partielle Integration)

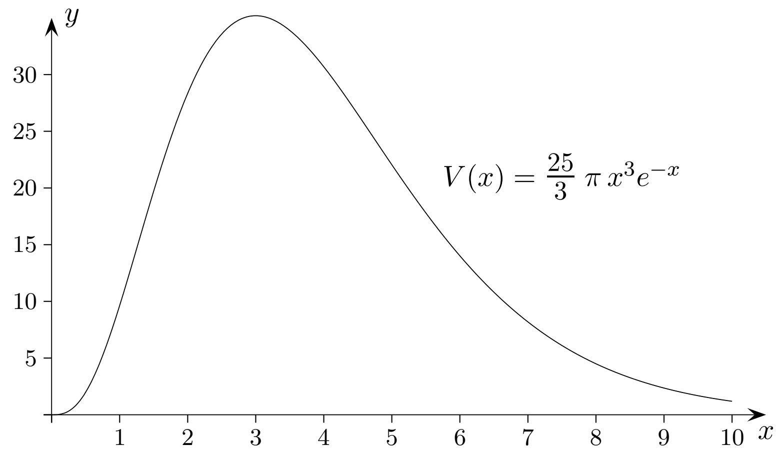
c) $V(x) = \frac{25}{3}\,\pi\, x^3 e^{-x}$ $(0 < x \leq 5)$, $V'(x) = \frac{25}{3}\,\pi\; e^{-x}\,(3x^2 - x^3)$, Maximum an der Stelle $x = 3$.

d) Induktionsanfang $n = 1:$ $g^{(1)}(x) = g'(x) = -\frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}}\,(x-2)$

Induktionsschritt von n auf $n+1:$ $g^{(n+1)}(x) = (g^{(n)}(x))' = ((-\frac{1}{2})^n\, e^{-\frac{x}{2}}\,(x - 2n))' = ...$

$= (-\frac{1}{2})^{n+1}\, e^{-\frac{x}{2}}\,(x - 2(n+1))$





3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4 - 8x) \cdot e^{2x}$

   Die Funktion beschreibt den Bestand einer aussterbenden Tierpopulation.

   a) Untersuchen Sie die Funktion, auch auf Monotonie und Krümmung.
   Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

   (zur Kontrolle: $f'(x) = -16x \cdot e^{2x}$)

   b) Wie ist a zu wählen, damit $F(x) = 4\,e^{2x} - ax \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von f ist?

   c) Skizzieren Sie die 1. Ableitung von f ohne schriftliche Berechnungen durchzuführen.
   (neues Koordinatensystem).

   d) Berechnen Sie exakt (ohne Taschenrechner) den Inhalt der (zu einer Seite unbegrenzten) Fläche, die der Graph von f mit dem Graphen von $g(x) = e^{2x}$ einschließt.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4 - 8x) \cdot e^{2x}$

Die Funktion beschreibt den Bestand einer aussterbenden Tierpopulation.

a) Untersuchen Sie die Funktion, auch auf Monotonie und Krümmung.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

(zur Kontrolle: $f'(x) = -16x \cdot e^{2x}$)

b) Wie ist a zu wählen, damit $F(x) = 4\,e^{2x} - ax \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von f ist?

c) Skizzieren Sie die 1. Ableitung von f ohne schriftliche Berechnungen durchzuführen.
(neues Koordinatensystem).

d) Berechnen Sie exakt (ohne Taschenrechner) den Inhalt der (zu einer Seite unbegrenzten) Fläche, die der Graph von f mit dem Graphen von $g(x) = e^{2x}$ einschließt.

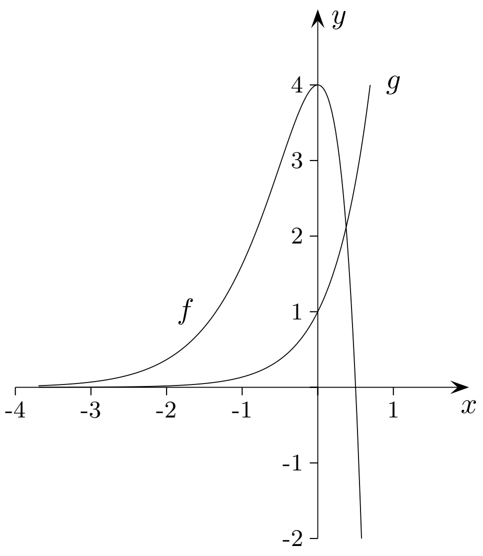
Lösung:

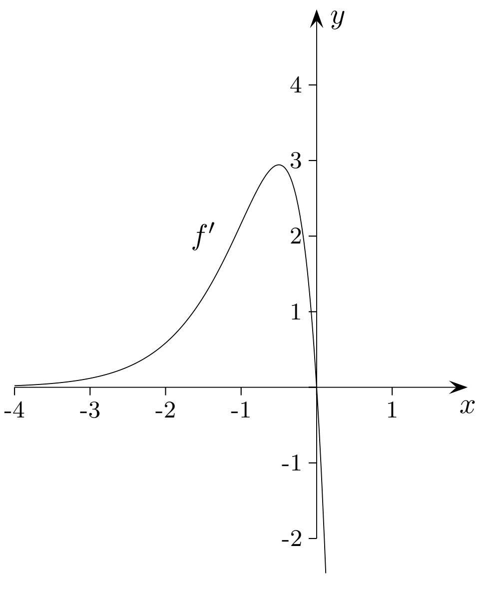
3. a) $N(\frac{1}{2} \mid 0)$,
Monotonie: f für $x < 0$ monoton wachsend, f für $x > 0$ monoton fallend, $Max(0 \mid 4)$
Krümmung: $f''(x) = e^{2x} \cdot (-16 - 32x)$

$f''(x) < 0 \iff -16 - 32x < 0 \iff x > -\frac{1}{2}$, f ist für $x > -\frac{1}{2}$ rechtsgekrümmt,

$f''(x) > 0 \iff -16 - 32x > 0 \iff x < -\frac{1}{2}$, f ist für $x < -\frac{1}{2}$ linksgekrümmt,

$W\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{8}{e}\right)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$





b) $F'(x) = 8\,e^{2x} - a\,e^{2x} - 2ax \cdot e^{2x} \implies a = 4$

c) siehe Graph von f'

d) Schnittbedingung: $f(x) = g(x) \implies x = \frac{3}{8}$

$$A = \int_{-\infty}^{\frac{3}{8}} (f(x) - g(x))\,dx = \left[4\,e^{2x} - 4x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\infty}^{\frac{3}{8}} = 2\,e^{\frac{3}{4}}$$

↑ Sauerstoffproduktion

4. Gegeben ist die Funktion $f(t) = 2t \cdot e^{-0{,}02 \cdot t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$.

   a) Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie,
   bestimmen Sie das Verhalten von f für $t \to \infty$,
   ermitteln Sie die Extrem- und Wendestellen von f.

   b) Wie ist das a zu wählen, damit $F(t) = a \cdot e^{-0{,}02 \cdot t^2}$ eine Stammfunktion von f ist.

   Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der t-Achse, dem Graphen von f und der Geraden mit $t = 10$ eingeschlossen wird.

   c) Für $t \leq 0 \leq 15$ beschreibt $f(t)$ modellhaft die momentane Sauerstoffproduktion einer Buche an einem Sommertag mit 15 Stunden Sonnenscheindauer ab dem Sonnenaufgang $t = 0$, wobei man t in Stunden und $f(t)$ in m^3 pro Stunde angibt. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f in diesem Sachzusammenhang. Zu welchem Zeitpunkt liegt die stärkste Abnahme der momentanen Sauerstoffproduktion vor?

   d) Interpretieren Sie den bei b) berechneten Flächeninhalt in diesem Sachzusammenhang. Bestimmen Sie, wie viele Sonnenstunden vergangen sind, bis die Buche insgesamt $20\,m^3$ Sauerstoff produziert hat.

   e) Eine Funktion g soll nun die momentane Sauerstoffproduktion in m^3 pro Stunde an einem sonnigen Herbsttag beschreiben. Die Sonnenscheindauer beträgt 12 Stunden und die Intensität der auf die Blätter treffenden Strahlung ist geringer als an einem Sommertag. Damit verbunden ist eine geringere Sauerstoffproduktion. Das Maximum wird nach 4 Stunden $t = 4$ erreicht, also 4 Stunden nach Sonnenaufgang $t = 0$.
   Begründen Sie, wie man den Funktionsterm von f verändern kann, damit man den Term einer möglichen Funktion g erhält.

4. Gegeben ist die Funktion $f(t) = 2t \cdot e^{-0{,}02 \cdot t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie, bestimmen Sie das Verhalten von f für $t \to \infty$, ermitteln Sie die Extrem- und Wendestellen von f.

Graph punktsymmetrisch

$f(t) \to 0$

$f'(t) = (2 - 0{,}08t^2) \cdot e^{-0{,}02 \cdot t^2}$

$f''(t) = (-0{,}24t + 0{,}0032t^3) \cdot e^{-0{,}02 \cdot t^2}$

$t_{\min} = -5$, $t_{\max} = 5$

Wendestellen: $t_{\mathrm{w}1} = 0$, $t_{\mathrm{w}2} = 8{,}66$, $t_{\mathrm{w}3} = -8{,}66$

b) Wie ist das a zu wählen, damit $F(t) = a \cdot e^{-0{,}02 \cdot t^2}$ eine Stammfunktion von f ist. $a = -50$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der t-Achse, dem Graphen von f und der Geraden mit $t = 10$ eingeschlossen wird. $A = 43{,}23\ FE$

c) Für $t \leq 0 \leq 15$ beschreibt $f(t)$ modellhaft die momentane Sauerstoffproduktion einer Buche an einem Sommertag mit 15 Stunden Sonnenscheindauer ab dem Sonnenaufgang $t = 0$, wobei man t in Stunden und $f(t)$ in m^3 pro Stunde angibt. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f in diesem Sachzusammenhang. Zu welchem Zeitpunkt liegt die stärkste Abnahme der momentanen Sauerstoffproduktion vor? ..., 8 Stunden 40 Minuten

d) Interpretieren Sie den bei b) berechneten Flächeninhalt in diesem Sachzusammenhang. Bestimmen Sie, wie viele Sonnenstunden vergangen sind, bis die Buche insgesamt $20\,m^3$ Sauerstoff produziert hat.

Innerhalb der ersten 10 Stunden wurden $43{,}23\,m^3$ Sauerstoff produziert.

$F(b) - F(0) = 20 \implies b = 5{,}05$

e) Eine Funktion g soll nun die momentane Sauerstoffproduktion in m^3 pro Stunde an einem sonnigen Herbsttag beschreiben. Die Sonnenscheindauer beträgt 12 Stunden und die Intensität der auf die Blätter treffenden Strahlung ist geringer als an einem Sommertag. Damit verbunden ist eine geringere Sauerstoffproduktion. Das Maximum wird nach 4 Stunden $t = 4$ erreicht, also 4 Stunden nach Sonnenaufgang $t = 0$.
Begründen Sie, wie man den Funktionsterm von f verändern kann, damit man den Term einer möglichen Funktion g erhält.

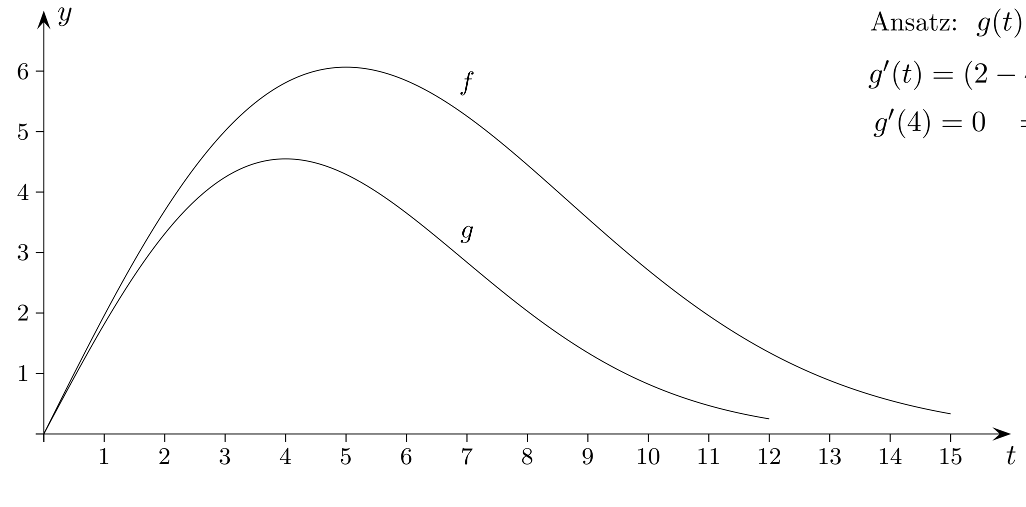
Der Graph von f wird in t- und in y-Richtung gestaucht: $g(x) = \frac{3}{4} \cdot f(\frac{5}{4}t)$

alternativ:

Ansatz: $g(t) = 2t \cdot e^{-a \cdot t^2}$

$g'(t) = (2 - 4at^2) \cdot e^{-a \cdot t^2}$

$g'(4) = 0 \implies a = \frac{1}{32}$



↑ Virusinfektion

5. Die Ausbreitung einer Virusinfektion (z. B. Schweinegrippe) kann durch

$$f_k(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{k}} \quad x \geq 0,\ \ k > 0$$

modelliert werden, mit $f_k(x)$ Anzahl der Infizierten in 1000, x Zeit in Monaten.

a) Wie lauten die x-Koordinaten der Punkte des zugehörigen Graphen mit waagerechter Tangente?

b) Machen Sie eine begründete Aussage über die Anzahl der Wendepunkte von f_k, <u>ohne</u> die 2. Ableitung zu ermitteln und <u>ohne</u> $f'_k(x)$ zu zeichnen.

c) Wie ist k zu wählen, damit die maximale Anzahl der Infizierten 4000 beträgt? (algebraisch)

d) Sei nun $k = 2$. In welchem Zeitraum sind mindestens 1000 Infizierte vorhanden? (GTR)

e) Untersuchen Sie, ob a und b so gewählt werden können, dass $F(x) = e^{-\frac{x}{2}}(-2x^2 - ax - b)$ eine Stammfunktion von f_2 ist.

f) Sei $A(u)$ der vom Graphen von f_2 und der x-Achse eingeschlossene Flächeninhalt in den Grenzen von 0 bis u. Welcher Flächeninhalt ergibt sich für $u \to \infty$? (algebraisch)

5. Die Ausbreitung einer Virusinfektion (z. B. Schweinegrippe) kann durch

$$f_k(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{k}} \quad x \geq 0,\ \ k > 0$$

modelliert werden, mit $f_k(x)$ Anzahl der Infizierten in 1000, x Zeit in Monaten.

a) Wie lauten die x-Koordinaten der Punkte des zugehörigen Graphen mit waagerechter Tangente?

$$f_k'(x) = e^{-\frac{x}{k}}\left(2x - \frac{x^2}{k}\right) \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = 2k$$

b) Machen Sie eine begründete Aussage über die Anzahl der Wendepunkte von f_k, <u>ohne</u> die 2. Ableitung zu ermitteln und <u>ohne</u> $f_k'(x)$ zu zeichnen.

2 Wendepunkte, beachte die Ergebnisse von a) und $\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x) = 0$.

c) Wie ist k zu wählen, damit die maximale Anzahl der Infizierten 4000 beträgt? (algebraisch)

$$f_k(2k) = 4, \quad k = e$$

d) Sei nun $k = 2$. In welchem Zeitraum sind mindestens 1000 Infizierte vorhanden? (GTR)

$[1{,}43 \mid 8{,}61]$

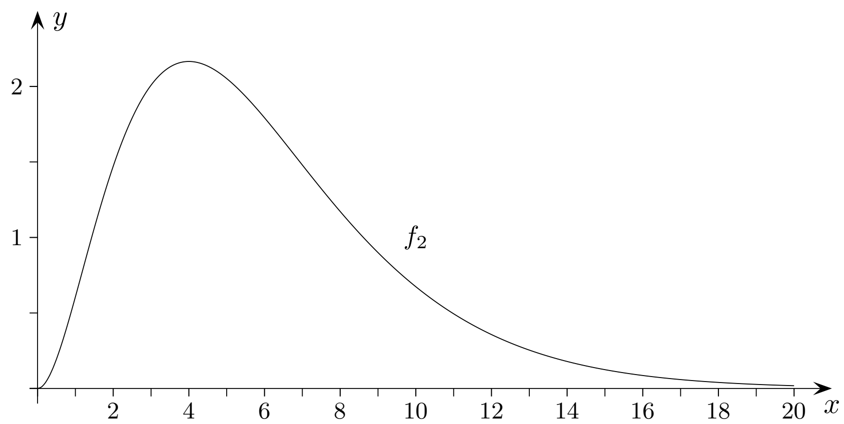
e) Untersuchen Sie, ob a und b so gewählt werden können, dass $F(x) = e^{-\frac{x}{2}}(-2x^2 - ax - b)$ eine Stammfunktion von f_2 ist.

$$F'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}(2x^2 + ax - 8x - 2a + b)$$

$$a = 8, \ b = 16$$

f) Sei $A(u)$ der vom Graphen von f_2 und der x-Achse eingeschlossene Flächeninhalt in den Grenzen von 0 bis u. Welcher Flächeninhalt ergibt sich für $u \to \infty$? (algebraisch)

16 FE



6. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = (x^2 - t^2)\, e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Graph sei K_t.

a) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrema und bestimmen Sie das Verhalten für $x \to \infty$.
Auf welcher Kurve C liegen die Maxima aller K_t?
Welche Punkte von C sind nicht Maxima einer Kurve K_t?

Zur Kontrolle: $f_t'(x) = -2x\, e^{-x^2}\, (x^2 - 1 - t^2)$

b) Die Tangenten in den Schnittpunkten von K_t mit der x-Achse und die x-Achse schließen ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h(t)$ ein. Für welches t ist $h(t)$ maximal?

↑

6. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = (x^2 - t^2)\,e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Graph sei K_t.

a) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrema und bestimmen Sie das Verhalten für $x \to \infty$.

Graph achsensymmetrisch

Nullstellen: $x_{1/2} = \pm t$

$Max\left(\pm\sqrt{1+t^2} \mid e^{-1-t^2}\right)$

Auf welcher Kurve C liegen die Maxima aller K_t? $y = e^{-x^2}$

Welche Punkte von C sind nicht Maxima einer Kurve K_t? $-1 \leq x \leq 1$

Zur Kontrolle: $f_t'(x) = -2x\,e^{-x^2}\,(x^2 - 1 - t^2)$

b) Die Tangenten in den Schnittpunkten von K_t mit der x-Achse und die x-Achse schließen ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h(t)$ ein. Für welches t ist $h(t)$ maximal?

$y = 2t\,e^{-t^2}\,(x - t)$

$h(t) = 2t^2\,e^{-t^2}, \;\; t = 1$

↑

↑ Kartenschalter

7. Die momentane Ankunftsrate an einem Kino - also die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute - soll modellhaft beschrieben werden durch die Funktion f mit
   $f(x) = 0{,}27 \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}12x}$
   Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und $f(x)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute.
   Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.

   a) Skizzieren Sie den Graph von f.
   Wann kommen die meisten Besucher pro Minute zum Kartenschalter, wie viele sind das?
   Ab wann kommen weniger als drei Personen pro Minute zum Kino?

   b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der angekommenen Personen durch die Funktion g mit

   $$g(x) = 312{,}5 - (2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x}$$

   beschrieben wird.
   Wie viele Personen kommen nach diesem Modell höchstens zum Kino?

   c) Um 19.20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können durchschnittlich für 6 Personen Karten ausgegeben werden.
   Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19.20 Uhr zum Kino kommt? Wann ist die Anzahl der Wartenden am größten?
   Wie viele Besucher warten dann?
   Wann hat sich die Warteschlange aufgelöst?

   d) Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19.50 Uhr.
   Wie viele Personen müssen jetzt mindestens pro Minute am Schalter abgefertigt werden, damit die Schlange um 20.30 Uhr abgebaut ist?

7. Die momentane Ankunftsrate an einem Kino - also die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute - soll modellhaft beschrieben werden durch die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}27 \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}12x}$$

Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und $f(x)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute.
Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.

a) Skizzieren Sie den Graph von f.
Wann kommen die meisten Besucher pro Minute zum Kartenschalter, wie viele sind das?
$f(16{,}7) = 10{,}2$
19.17 Uhr
Ab wann kommen weniger als drei Personen pro Minute zum Kino? $x > 42{,}4$ ab 19.43 Uhr

b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der angekommenen Personen durch die Funktion g mit

$$g(x) = 312{,}5 - (2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x}$$ $g'(x) = f(x)$ und $g(0) = 0$

beschrieben wird.
Wie viele Personen kommen nach diesem Modell höchstens zum Kino? $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 312{,}5$

c) Um 19.20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können durchschnittlich für 6 Personen Karten ausgegeben werden.
Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19.20 Uhr zum Kino kommt?
$g(20) = 134{,}5$ bzw. $\displaystyle\int_0^{20} f(x)\,dx = 134{,}5$
$134 : 6 = 22{,}3$
Wann ist die Anzahl der Wartenden am größten? direkt mit $f(x) = 6$ oder mit
$h(x) = g(x) - 6 \cdot (x - 20),\ x \geq 20$
(x Zeit in Minuten seit 19 Uhr)
Wie viele Besucher warten dann? $h(31{,}8) = 158{,}5$
um 19.32 Uhr
Wann hat sich die Warteschlange aufgelöst? $x = 71{,}6$ um 20.12 Uhr

d) Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19.50 Uhr.
Wie viele Personen müssen jetzt mindestens pro Minute am Schalter abgefertigt werden, damit die Schlange um 20.30 Uhr abgebaut ist? $g(90) = 312$
$312 : 40 = 7{,}8$ etwa 8 Personen

↑ Konzentration eines Medikaments

8. Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen. Die folgenden Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.

   a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration.
   Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert?
   Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens $4\ \frac{mg}{l}$ beträgt.
   Berechnen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.
   Welcher Wert kann als mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden angesehen werden (betrachten Sie hierzu ein flächengleiches Rechteck)?

   b) Zum Zeitpunkt t_0 wird das Medikament am stärksten abgebaut.
   Beschreiben Sie quantitativ (also mit Zahlen) die Veränderung der Konzentration zu diesem Zeitpunkt.
   Ab dem Zeitpunkt $t = 4$ wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle beschrieben.
   Bestimmen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

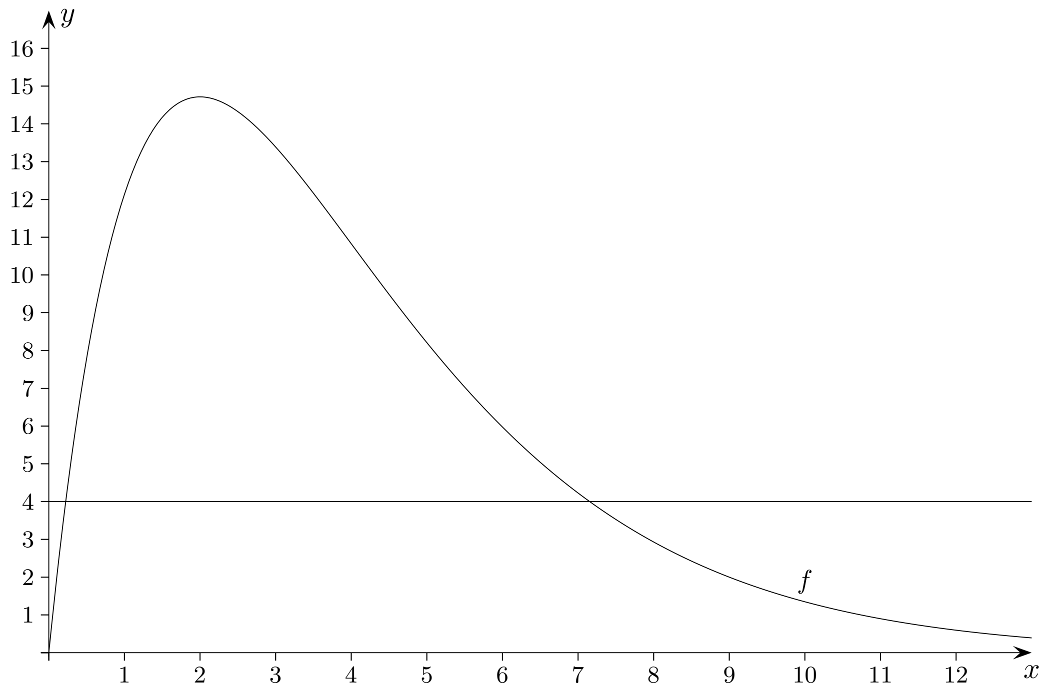
   c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet.
   Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentrationen im Blut des Patienten addieren.
   Skizzieren und erläutern kurz Sie den zeitlichen Verlauf der Gesamtkonzentration für $0 \leq t \leq 12$.
   Ermitteln Sie algebraisch den Zeitpunkt der maximalen Gesamtkonzentration (notwendige Bedingung genügt).

   d) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert. Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch $g(t) = at \cdot e^{-bt}$ und $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben.
   Bestimmen Sie die Konstanten a und b, wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10\,\frac{mg}{l}$ erreicht.

$\uparrow$ Konzentration eines Medikaments Ergebnisse

8. Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0{,}5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen. Die folgenden Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.

   a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration.



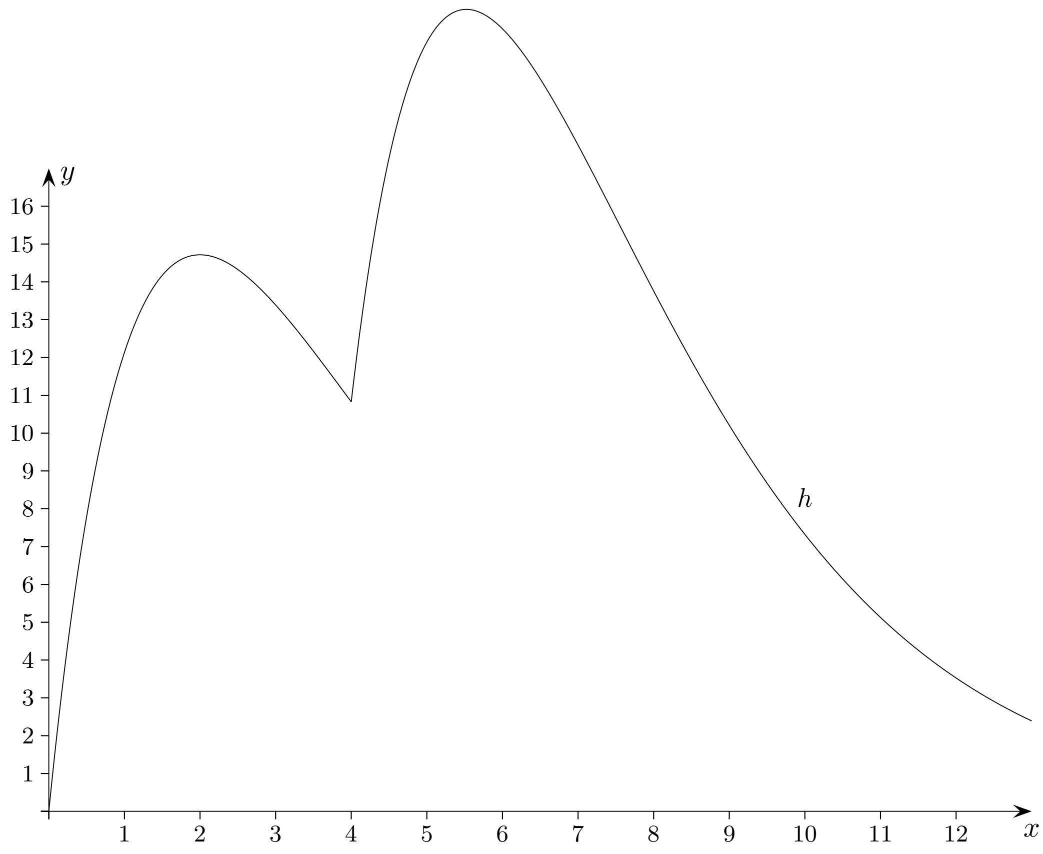
   Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert? $f(2) = 14{,}7$
   Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens 4 $\frac{mg}{l}$ beträgt.
   Berechnen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist. $t_2 - t_1 = 7{,}15 - 0{,}22 = 6{,}93$
   Welcher Wert kann als mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden angesehen werden (betrachten Sie hierzu ein flächengleiches Rechteck)? $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = 6{,}55 \ (\frac{mg}{l})$

   b) Zum Zeitpunkt t_0 wird das Medikament am stärksten abgebaut.
   Beschreiben Sie quantitativ (also mit Zahlen) die Veränderung der Konzentration zu diesem Zeitpunkt. $f'(4) = -2{,}71$
   Ab dem Zeitpunkt $t = 4$ wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle beschrieben. Tangentengl. $y = -2{,}71x + 21{,}65$
   Bestimmen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist. $t = 8$

c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet.
Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentrationen im Blut des Patienten addieren.
Skizzieren und erläutern kurz Sie den zeitlichen Verlauf der Gesamtkonzentration für $0 \leq t \leq 12$.
Ermitteln Sie algebraisch den Zeitpunkt der maximalen Gesamtkonzentration (notwendige Bedingung genügt).

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t < 4 \\ f(t) + f(t-4) & t \geq 4 \end{cases}$$

$$t = \frac{2+6e^2}{1+e^2} = 5{,}52$$



d) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert. Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch $g(t) = at \cdot e^{-bt}$ und $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben.
Bestimmen Sie die Konstanten a und b, wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10\,\frac{mg}{l}$ erreicht.

$$\begin{aligned} g(4) &= 10 \implies & 4a \cdot e^{-4b} &= 10 \\ g'(4) &= 0 \implies & (a - 4ab) \cdot e^{-4b} &= 0 \end{aligned}$$

$$a = 2{,}5e = 6{,}8 \quad \text{und} \quad b = 0{,}25$$

↑ Konzentration eines Medikaments Ergänzung

Durch die Einnahme eines Medikamentes zum Zeitpunkt $t = 0$ gelangt ein bestimmter Wirkstoff in das Blut des Patienten. Die Wirkstoffkonzentration, die zum Zeitpunkt $t \in [0; 24]$ im Körper des Patienten ist, kann durch eine Funktion der Funktionenschar $f_k(t) = 20t \cdot e^{-kt}$, $k > 0$, beschrieben werden. Dabei wird die Zeit t in Stunden und die Wirkstoffkonzentration in $\frac{mg}{l}$ angegeben.

a) Berechnen Sie die Extrempunkte der Funktionenschar sowie eine Gleichung der Ortslinie der Extrempunkte.

b) Durch eine entsprechende Dosierung der Einnahmemenge kann man den Parameter k beeinflussen. Innerhalb welcher Grenzen muss k liegen, damit die maximale Wirkstoffkonzentration $50\,\frac{mg}{l}$ nicht übersteigt?

Durch die Einnahme eines Medikamentes zum Zeitpunkt $t = 0$ gelangt ein bestimmter Wirkstoff in das Blut des Patienten. Die Wirkstoffkonzentration, die zum Zeitpunkt $t \in [0; 24]$ im Körper des Patienten ist, kann durch eine Funktion der Funktionenschar $f_k(t) = 20t \cdot e^{-kt}$, $k > 0$, beschrieben werden. Dabei wird die Zeit t in Stunden und die Wirkstoffkonzentration in $\frac{mg}{l}$ angegeben.

a) Berechnen Sie die Extrempunkte der Funktionenschar sowie eine Gleichung der Ortslinie der Extrempunkte.

$E(\frac{1}{k} \mid \frac{20}{k \cdot e})$, $\quad y = \frac{20}{e}t$

b) Durch eine entsprechende Dosierung der Einnahmemenge kann man den Parameter k beeinflussen. Innerhalb welcher Grenzen muss k liegen, damit die maximale Wirkstoffkonzentration $50\,\frac{mg}{l}$ nicht übersteigt?

$k \geq 0{,}147$

↑ Kraftstoffverbrauch

9. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = (x^2 - k + 1)\,e^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}$.

   a) Untersuchen Sie die Funktionenschar im Hinblick auf folgende Aspekte:
   Verhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$
   Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen
   zur Kontrolle: $f_k'(x) = (-x^2 + 2x + k - 1)\,e^{-x}$

   b) Zeigen Sie, dass alle Extrempunkte auf dem Graphen einer Funktion g liegen, und bestimmen Sie $g(x)$. Untersuchen Sie, welche Punkte des Graphen von g nicht Extrempunkte der Funktionenschar f_k sind.

   c) Der momentane Kraftstoffverbrauch (in $\frac{l}{min}$) eines Motors während eines 2-minütigen Testlaufs kann für $0 \leq x \leq 2$ (x in min) beschrieben werden durch die Funktion f_k und $0{,}5 \leq k \leq 0{,}9$. Dabei hängt der Parameter k von spezifischen Einstellungen des Motors ab.

      i) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Änderungsrate des momentanen Kraftstoffverbrauchs in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter k am größten ist.

      ii) Der gesamte Kraftstoffverbrauch während des 2-minütigen Testlaufs soll nicht größer als $1\,l$ sein. Untersuchen Sie, welche Einschränkungen sich hieraus für den Parameter $k \in [0{,}5;\, 0{,}9]$ ergeben.

9. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = (x^2 - k + 1)e^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}$.

   a) Untersuchen Sie die Funktionenschar im Hinblick auf folgende Aspekte:
   Verhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$
   Nullstellen, Extremstellen, $E_1(1+\sqrt{k} \mid 2(1+\sqrt{k}) \cdot e^{-(1+\sqrt{k})})$
   Wendestellen $E_2(1-\sqrt{k} \mid 2(1-\sqrt{k}) \cdot e^{-(1-\sqrt{k})})$
   zur Kontrolle: $f_k'(x) = (-x^2 + 2x + k - 1)e^{-x}$ $f_k''(x) = (3 - 4x + x^2 - k)e^{-x}$
   $x_1 = 2 + \sqrt{1+k}, \quad x_2 = 2 - \sqrt{1+k}$

   b) Zeigen Sie, dass alle Extrempunkte auf dem Graphen einer Funktion g liegen, und bestimmen Sie $g(x)$. Untersuchen Sie, welche Punkte des Graphen von g nicht Extrempunkte der Funktionenschar f_k sind. $g(x) = 2xe^{-x}$
   Für $k = 0$ liegt kein Extremum vor, d. h. $P\big(1 \mid 2e^{-1}\big)$ ist kein Extremum.

   c) Der momentane Kraftstoffverbrauch (in $\frac{l}{min}$) eines Motors während eines 2-minütigen Testlaufs kann für $0 \leq x \leq 2$ (x in min) beschrieben werden durch die Funktion f_k und $0{,}5 \leq k \leq 0{,}9$. Dabei hängt der Parameter k von spezifischen Einstellungen des Motors ab.

      i) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Änderungsrate des momentanen Kraftstoffverbrauchs in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter k am größten ist. siehe Wendestellen

      ii) Der gesamte Kraftstoffverbrauch während des 2-minütigen Testlaufs soll nicht größer als 1 l sein. Untersuchen Sie, welche Einschränkungen sich hieraus für den Parameter $k \in [0{,}5;\, 0{,}9]$ ergeben. $-11e^{-2} + ke^{-2} + 3 - k \leq 1 \implies k \in [0{,}59;\, 0{,}9]$

↑ Wasserspeicher

10. Der Inhalt eines Wasserspeichers wird durch die Funktion
$B(t) = 2 + 0{,}6t(t-3)e^{-1{,}6t}$ beschrieben. Dabei ist $B(t)$ der Inhalt in Millionen m^3 und t die Zeit in Monaten, Beobachtungsbeginn $t = 0$, -dauer 7 Monate.

    a) Wann war der Inhalt maximal und wie groß war er dann?

    b) Wann war die Änderung des Inhalts extremal und wie groß war sie dann?

    c) Nimmt der Inhalt am Ende des Beobachtungszeitraumes zu oder ab?

    d) Wie groß ist der Mittelwert des Inhalts!

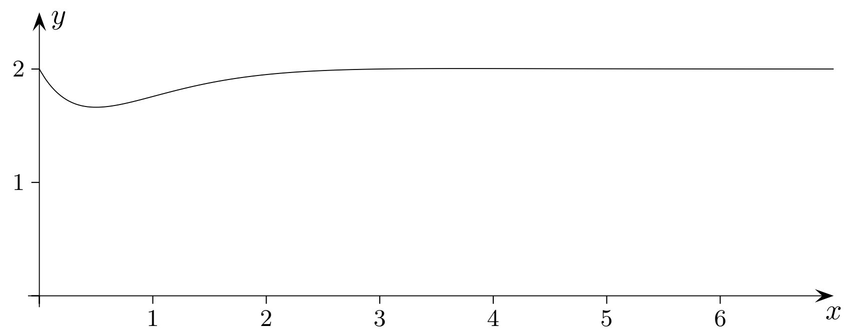
10. Der Inhalt eines Wasserspeichers wird durch die Funktion
$B(t) = 2 + 0{,}6t(t-3)e^{-1{,}6t}$ beschrieben. Dabei ist $B(t)$ der Inhalt in Millionen m^3 und t die Zeit in Monaten, Beobachtungsbeginn $t = 0$, -dauer 7 Monate.

a) Wann war der Inhalt maximal und wie groß war er dann? nach 3,75 Monaten 2,0042 Mio m^3

b) Wann war die Änderung des Inhalts extremal und wie groß war sie dann? nach 1,009 Monaten 0,2665 Mio m^3 pro Monat

c) Nimmt der Inhalt am Ende des Beobachtungszeitraumes zu oder ab? $B'(7) = -0,0003$ Abnahme

d) Wie groß ist der Mittelwert des Inhalts! 1,9414 Mio m^3



↑ Konzentration eines Medikaments

11. Durch $f(t) = 8t \cdot e^{-0,25t}$, $t \in [0; 24]$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen.

    a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration.
    Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert?
    Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens 5 $\frac{mg}{l}$ beträgt.
    Berechnen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.

    b) Können a und b so gewählt werden, dass $F(t) = (at + b) \cdot e^{-0,25t}$ eine Stammfunktion von f ist?
    Berechnen Sie die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden.

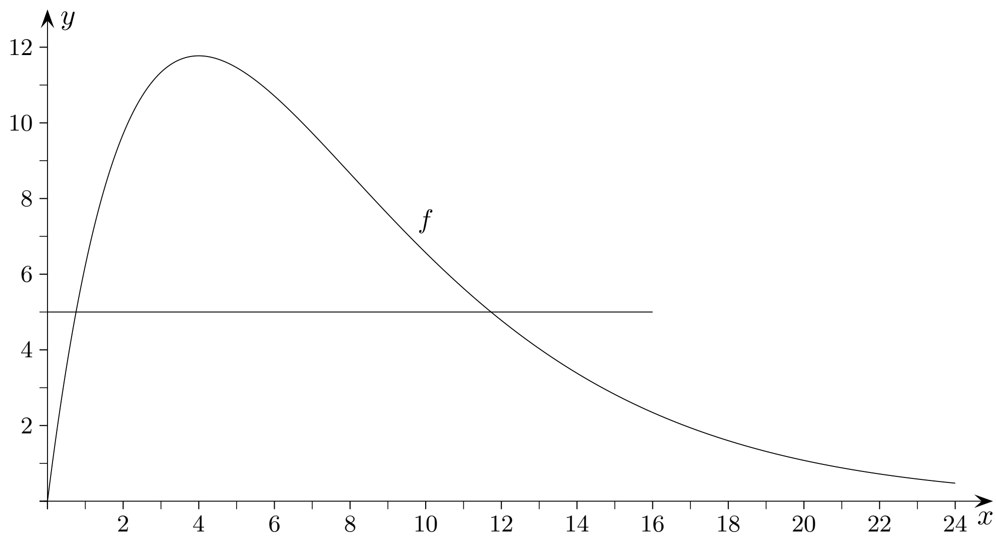
    c) Zu welchem Zeitpunkt wird das Medikament am stärksten abgebaut?
    Beschreiben Sie quantitativ die Veränderung der Konzentration zu diesem Zeitpunkt.

    d) Ab dem Zeitpunkt $t = 24$ wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle beschrieben.
    Bestimmen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

↑ Konzentration eines Medikaments   Ergebnisse

11. Durch $f(t) = 8t \cdot e^{-0,25t}$, $t \in [0; 24]$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen.

    a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration.



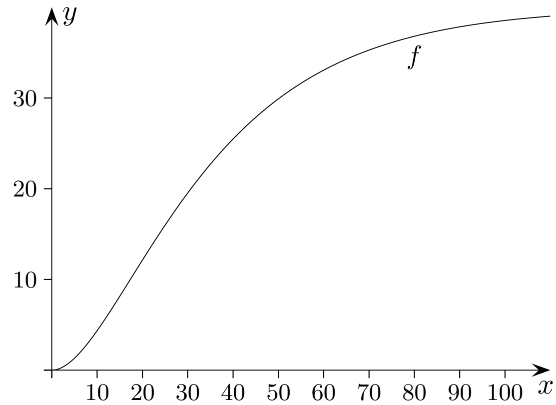
Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert? $f(4) = 11{,}8$
Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens 5 $\frac{mg}{l}$ beträgt.
Berechnen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist. $t_2 - t_1 = 11{,}73 - 0{,}75 = 10{,}98$

b) Können a und b so gewählt werden, dass $F(t) = (at + b) \cdot e^{-0,25t}$ eine Stammfunktion von f ist? $a = -32$, $b = -128$
Berechnen Sie die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden.
$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt = 8{,}54 \ (\tfrac{mg}{l})$$

c) Zu welchem Zeitpunkt wird das Medikament am stärksten abgebaut? $t = 8$
Beschreiben Sie quantitativ die Veränderung der Konzentration zu diesem Zeitpunkt.
$f'(8) = -1{,}08$

d) Ab dem Zeitpunkt $t = 24$ wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle beschrieben.
Bestimmen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist. $t = 28{,}8$

↑ Buchenwachstum



12. Das Wachstum einer Buche kann durch

$$f(x) = 40\left(1 - e^{-\frac{1}{25}x}\right)^2, \quad x \geq 0$$

modelliert werden, Baumhöhe $f(x)$ in m, Zeit x in Jahren.

a) bis d) sollen ohne GTR bearbeitet werden.

a) Welche maximale Höhe hat die Buche?

b) Zeigen Sie, dass die Wachstumsgeschwindigkeit durch

$$f'(x) = \frac{16}{5}\left(1 - e^{-\frac{1}{25}x}\right)e^{-\frac{1}{25}x} \qquad \text{erfasst wird.}$$

Wohin strebt sie für $x \to \infty$?
Skizzieren Sie den Grafen von f'.
An welcher Stelle ist die Wachstumsgeschwindigkeit maximal?

Zwischenergebnis:

$$f''(x) = \frac{16}{125}\left(2e^{-\frac{1}{25}x} - 1\right)e^{-\frac{1}{25}x}$$

c) Die Wachstumsgeschwindigkeit einer zweiten Buche ist durch

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{25}x} - e^{-\frac{2}{25}x} \qquad \text{gegeben.}$$

Für diese Buche gilt auch $g(0) = 0$.
Vergleichen Sie die Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden Buchen und treffen Sie eine Aussage über ihr unterschiedliches Wachstum.

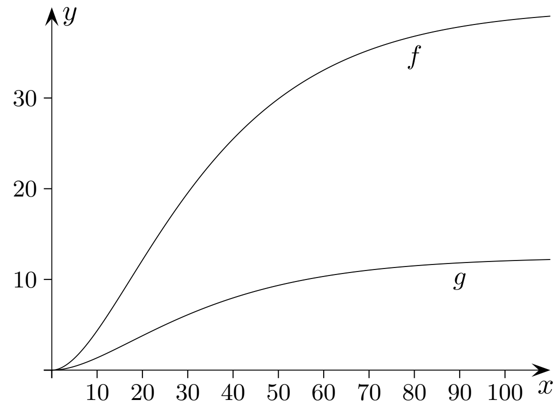
d) Ermitteln Sie einen Funktionsterm für $g(x)$.

e) Zeichnen Sie den Grafen von g.

f) Nach welcher Zeit hat die erste Buche die halbe Baumhöhe erreicht?

g) Nach welcher Zeit beträgt die Höhendifferenz der beiden Buchen $10\,m$?

↑ Buchenwachstum



12. Das Wachstum einer Buche kann durch

$$f(x) = 40\left(1 - e^{-\frac{1}{25}x}\right)^2, \quad x \geq 0$$

modelliert werden, Baumhöhe $f(x)$ in m, Zeit x in Jahren.

a) bis d) sollen ohne GTR bearbeitet werden.

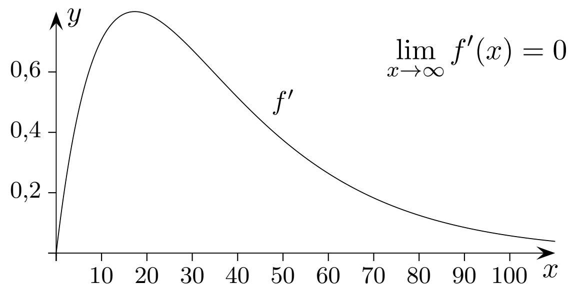
a) Welche maximale Höhe hat die Buche? $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 40$

b) Zeigen Sie, dass die Wachstumsgeschwindigkeit durch

$$f'(x) = \tfrac{16}{5}\left(1 - e^{-\frac{1}{25}x}\right) e^{-\frac{1}{25}x} \qquad \text{erfasst wird.}$$

Wohin strebt sie für $x \to \infty$? $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$

Skizzieren Sie den Grafen von f'.



An welcher Stelle ist die Wachstumsgeschwindigkeit maximal? $25\ln(2) = 17{,}33$

Zwischenergebnis:

$$f''(x) = \tfrac{16}{125}\left(2e^{-\frac{1}{25}x} - 1\right) e^{-\frac{1}{25}x}$$

c) Die Wachstumsgeschwindigkeit einer zweiten Buche ist durch

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{25}x} - e^{-\frac{2}{25}x} \qquad \text{gegeben.}$$

Für diese Buche gilt auch $g(0) = 0$.
Vergleichen Sie die Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden Buchen und treffen Sie eine Aussage über ihr unterschiedliches Wachstum. $f'(x) = \frac{16}{5}g'(x)$, siehe Grafik

d) Ermitteln Sie einen Funktionsterm für $g(x)$. $g(x) = -25e^{-\frac{1}{25}x} + \frac{25}{2}e^{-\frac{2}{25}x} + \frac{25}{2}$

e) Zeichnen Sie den Grafen von g.

f) Nach welcher Zeit hat die erste Buche die halbe Baumhöhe erreicht? nach 30,7 Jahren

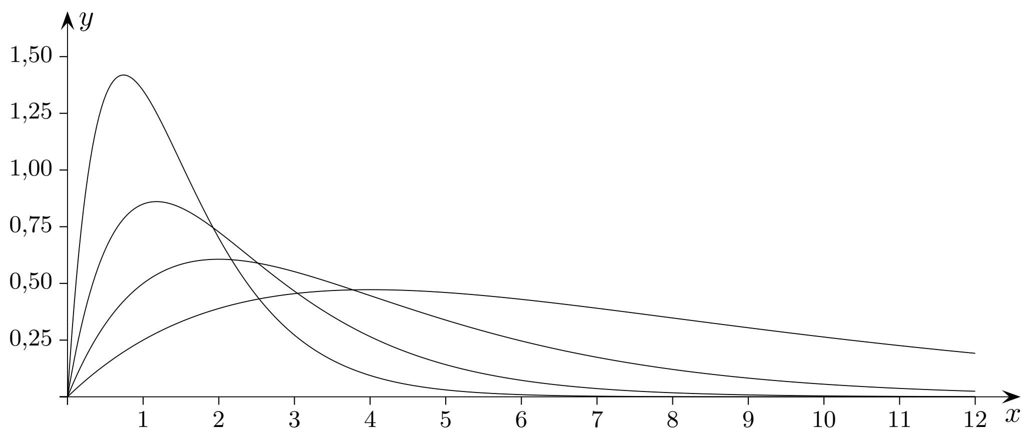
g) Nach welcher Zeit beträgt die Höhendifferenz der beiden Buchen $10\,m$? nach 23,1 Jahren

↑ Konzentration eines Medikamentes

Die Medikamenten-Konzentration im Blut wird durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = kx \cdot e^{k-kx}, \quad k > 0$$

modelliert (x Zeit in Stunden nach der Einnahme, $f_k(x)$ in mg/l).
Der Parameter k erfasst die Menge eines Zusatzstoffes, der den Konzentrationsverlauf beeinflusst.



a) Zu sehen sind die Graphen für $k \in \{0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}85,\ 1{,}35\}$.
Ordnen Sie die Graphen dem jeweiligen k begründet zu und beschreiben Sie den Einfluss von k.

b) Bestimmen Sie für die Funktionenschar die Hochpunkte.

c) Welche Werte sind für k zulässig, damit die maximale Konzentration des Medikaments den Wert 1 keinesfalls überschreitet?

d) Für welches k beträgt die maximale Konzentration 0,5?
Für welchen Zeitraum beträgt die Konzentration dann mindestens 0,25 mg/l?

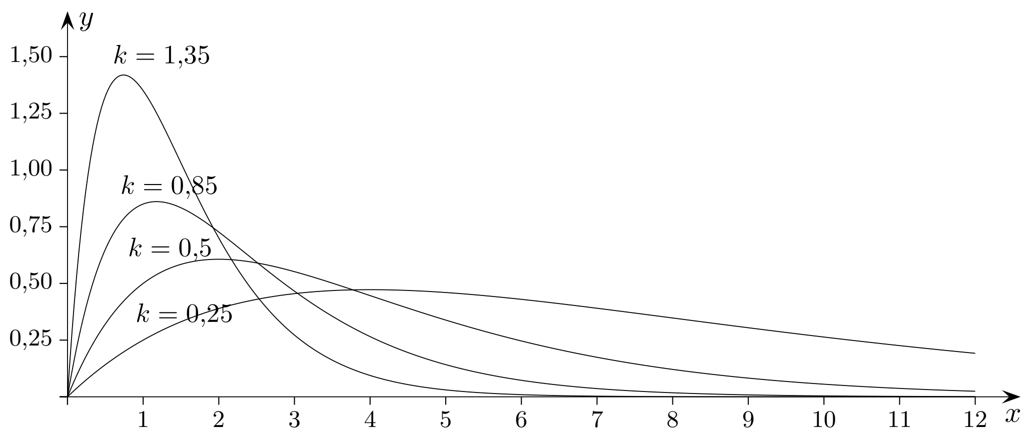
e) Wie sind a und b zu wählen, damit $F_k(x) = (ax+b)e^{k-kx}$ eine Stammfunktion von f_k ist.
Bestimmen Sie für $k = 0{,}25$ die durchschnittliche Konzentration für die ersten 12 Stunden.

↑ Konzentration eines Medikamentes

Die Medikamenten-Konzentration im Blut wird durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = kx \cdot e^{k-kx}, \quad k > 0$$

modelliert (x Zeit in Stunden nach der Einnahme, $f_k(x)$ in mg/l).
Der Parameter k erfasst die Menge eines Zusatzstoffes, der den Konzentrationsverlauf beeinflusst.



a) Zu sehen sind die Graphen für $k \in \{0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}85,\ 1{,}35\}$.
Ordnen Sie die Graphen dem jeweiligen k begründet zu und beschreiben Sie den Einfluss von k.

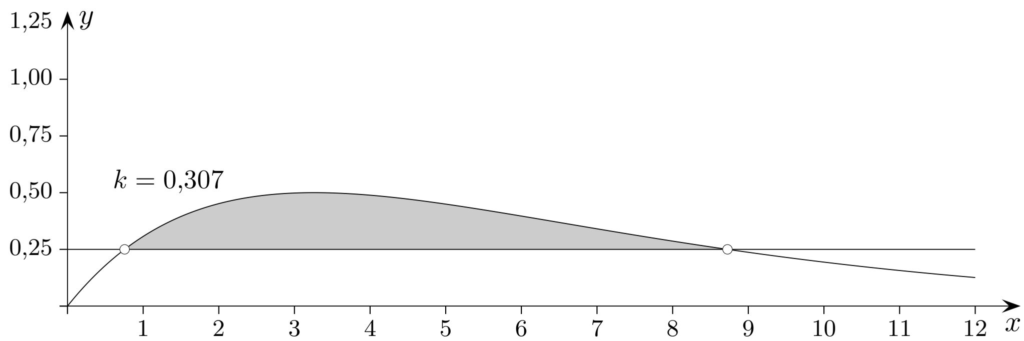
b) Bestimmen Sie für die Funktionenschar die Hochpunkte. $H\left(\frac{1}{k} \mid e^{k-1}\right)$

c) Welche Werte sind für k zulässig, damit die maximale Konzentration des Medikaments den Wert 1 keinesfalls überschreitet? $0 < k \leq 1$

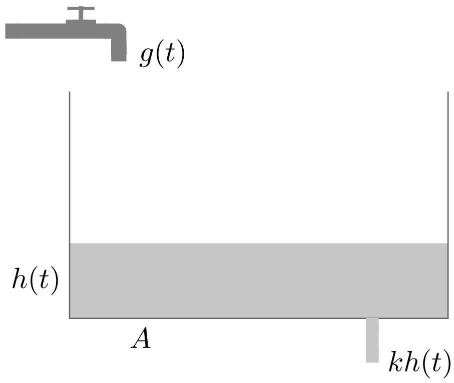
d) Für welches k beträgt die maximale Konzentration 0,5? $k = 1 - \ln 2 = 0{,}307$
Für welchen Zeitraum beträgt die Konzentration dann mindestens 0,25 mg/l? $0{,}755 < x < 8{,}725$

e) Wie sind a und b zu wählen, damit $F_k(x) = (ax+b)e^{k-kx}$ eine Stammfunktion von f_k ist.
$a = -1,\ b = -\frac{1}{k}$

Bestimmen Sie für $k = 0{,}25$ die durchschnittliche Konzentration für die ersten 12 Stunden.
$\frac{1}{12}(F_{0,25}(12) - F_{0,25}(0)) = 0{,}34$



↑ Zu- und Abfluss



Es soll die Wasserhöhe $h(t)$ in einem Behälter mit Zu- und Abfluß und der Grundfläche A berechnet werden. Der Zufluß ist gegeben durch $g(t) = we^{-t}$, der Abfluß durch $k\,h(t)$.

$$k = \frac{1}{2}\ [\frac{m^2}{h}]$$

$$w = 4\ [\frac{m^3}{h}]$$

$$A = \frac{1}{4}\ [m^2]$$

Für die Wasserhöhe gilt:

$$A\,h'(t) = g(t) - k\,h(t)$$

a) Erläutere die DGL.

b) Zeige, dass $h_a(t) = (16e^t - 16 + a)e^{-2t}$ die DGL löst.

c) Ermittle a für eine Anfangshöhe von $3\,m$.

d) Erläutere den Graphen von h_3.

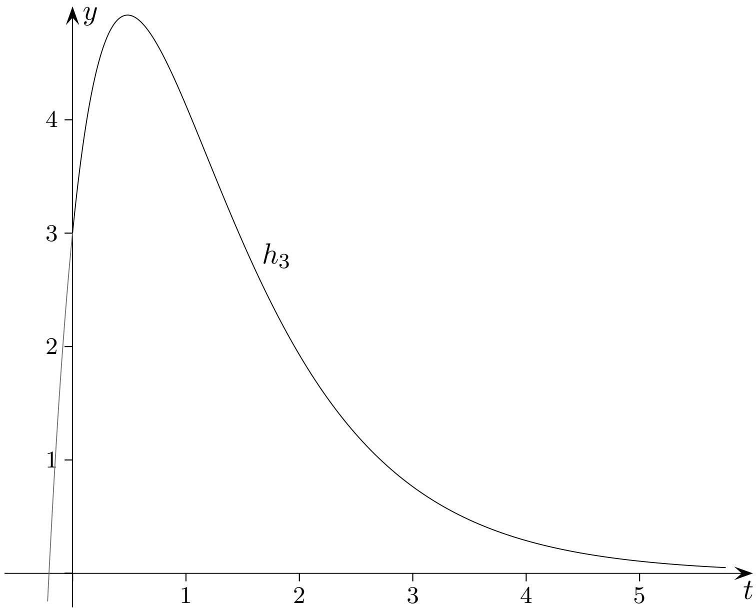
e) Weise ohne GTR nach, dass die Extremstelle von h_3 (nun mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$) in der Mitte von Null- und Wendestelle liegt und überprüfe mit GTR, ob dies auch für h_4 gilt.

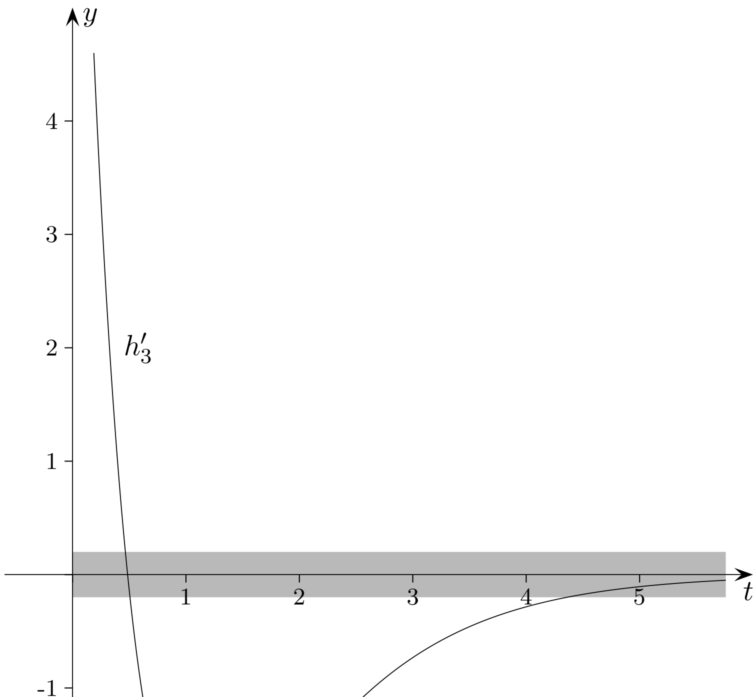
f) Nach welcher Zeit hat sich eine Anfangshöhe von $3\,m$ halbiert?
In welchen Bereichen ist für diese Anfangshöhe die absolute Änderungsrate höchstens 0,2?

g) Für welche Ausgangshöhe liegt nach 2 Stunden diese Höhe wieder vor?

h) Die Anfangshöhe sei $4\,m$. Nach 2 Stunden wird der Zufluss gestoppt.
Wie lautet dann die Höhenfunktion h? Wie lange dauert es, bis der Behälter leer ist ($h \leq 0{,}0001$)?

↑ Zu- und Abfluss





↑ Zu- und Abfluss Lösungshinweise

Für die Wasserhöhe gilt:

$$A\,h'(t) = g(t) - k\,h(t)$$

a) Erläutere die DGL. Mengenbilanz: $A\Delta h = g(t)\Delta t - k\,h(t)\Delta t$

b) Zeige, dass $h_a(t) = (16e^t - 16 + a)e^{-2t}$ die DGL löst. $h_a(t)$ in DGL einsetzen

c) Ermittle a für eine Anfangshöhe von $3\,m$. $a = 3$

d) Erläutere den Graphen von h_3.

$t < x_e \qquad g(t) > k\,h(t)$

$t = x_e \qquad g(t) = k\,h(t)$

$t > x_e \qquad g(t) < k\,h(t)$

e) Weise ohne GTR nach, dass die Extremstelle von h_3 (nun mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$) in der Mitte von Null- und Wendestelle liegt und überprüfe mit GTR, ob dies auch für h_4 gilt.

$x_N = \ln\frac{13}{16},\ x_E = \ln\frac{13}{8},\ x_W = \ln\frac{13}{4}$

f) Nach welcher Zeit hat sich eine Anfangshöhe von $3\,m$ halbiert? $2{,}28\,h$

In welchen Bereichen ist für diese Anfangshöhe die absolute Änderungsrate höchstens 0,2?

$[0{,}466; 0{,}506]$, ab 4,361

g) Für welche Ausgangshöhe liegt nach 2 Stunden diese Höhe wieder vor? $1{,}907\,m$

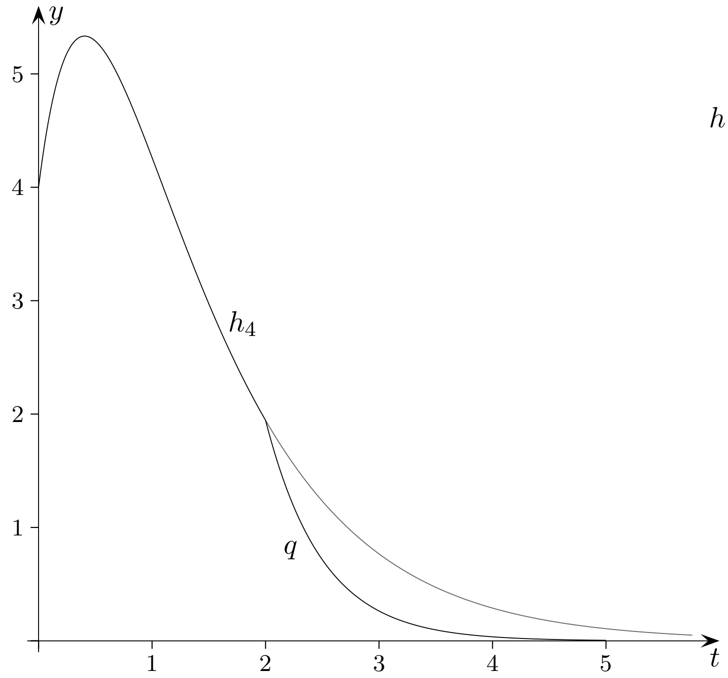
h) Die Anfangshöhe sei $4\,m$. Nach 2 Stunden wird der Zufluss gestoppt.
Wie lautet dann die Höhenfunktion h? Wie lange dauert es, bis der Behälter leer ist ($h \le 0{,}0001$)?

$$A\,q'(t) = -k\,q(t)$$

$$q(t) = h_4(2)\cdot e^{-\frac{k}{A}(x-2)}$$

$$h(x) = \begin{cases} h_4(t) & t \le 2 \\ q(t) & t \ge 2 \end{cases}$$

$t_{\text{leer}} = 6{,}94\,h$ (von 0)



↑ Erzförderung

Der Verlauf der jährlichen Fördermenge (Förderquote) einer Erzmine soll mit $f(t) = (a - bt)e^{ct}$ modelliert werden (t Zeit in Jahren, $f(t)$ Fördermenge in 1000 Tonnen pro Jahr).

a) Ermitteln Sie die anfängliche Förderquote, die Nullstelle und die Extremstelle.

Im Jahr 1930 wurde mit einer Förderquote von 5000 Tonnen begonnen,
1975 erreichte die Förderquote ihr Maximum, 1990 wurde die Förderung eingestellt.

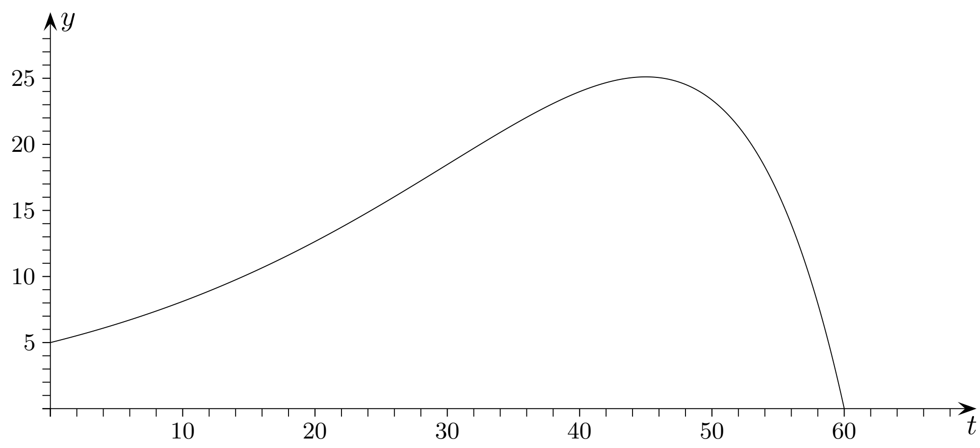
b) Bestimmen Sie die Parameter a, b und c.

c) Welche maximale Förderquote wurde erreicht?

d) In welchem Jahr war der Förderquotenzuwachs am größten?

e) Wie viel Erz wurde über den gesamten Abbauzeitraum gefördert?

f) Wie hoch war die durchschnittliche Förderquote im Zeitraum von 1950 bis 1970?



↑ Erzförderung

Der Verlauf der jährlichen Fördermenge (Förderquote) einer Erzmine soll mit $f(t) = (a - bt)e^{ct}$ modelliert werden (t Zeit in Jahren, $f(t)$ Fördermenge in 1000 Tonnen pro Jahr).

a) Ermitteln Sie die anfängliche Förderquote, die Nullstelle und die Extremstelle.

$$f(0) = a,\ t_N = \frac{a}{b},\ t_E = \frac{ac-b}{bc}$$

$$f'(t) = (ac - b - bct)e^{ct}$$

Im Jahr 1930 wurde mit einer Förderquote von 5000 Tonnen begonnen,
1975 erreichte die Förderquote ihr Maximum, 1990 wurde die Förderung eingestellt.

b) Bestimmen Sie die Parameter a, b und c.

$$a = 5,\ b = \frac{1}{12},\ c = \frac{1}{15}$$

$$f(t) = (5 - \frac{t}{12})e^{\frac{1}{15}t}$$

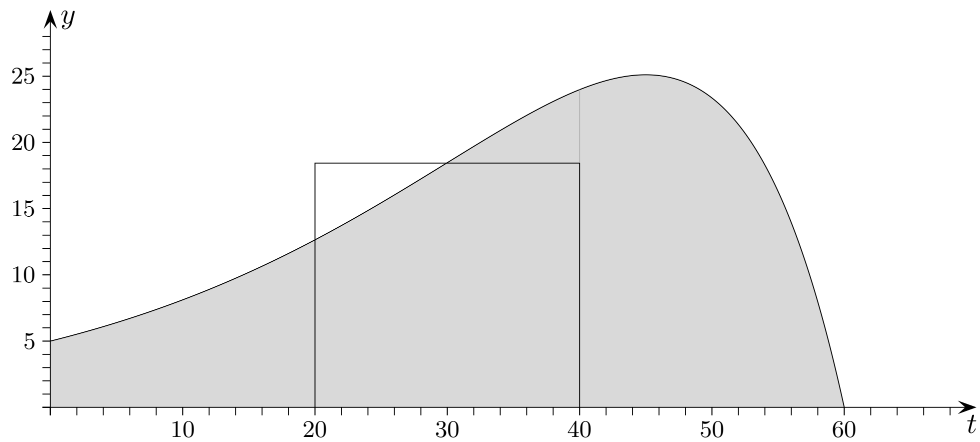
c) Welche maximale Förderquote wurde erreicht? $f(45) = 25{,}107$ [1000 Tonnen]

d) In welchem Jahr war der Förderquotenzuwachs am größten? $t_W = 30$, 1960

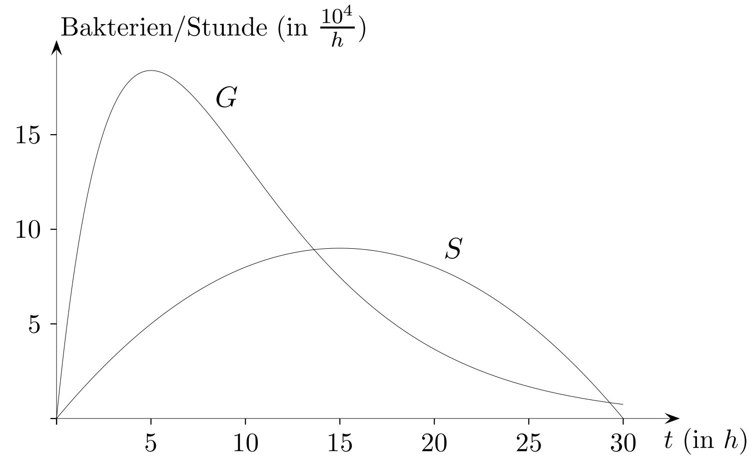
$$f''(t) = \frac{1}{2700}(t - 30)e^{\frac{1}{15}t}$$

e) Wie viel Erz wurde über den gesamten Abbauzeitraum gefördert? 929,965 [1000 Tonnen]

f) Wie hoch war die durchschnittliche Förderquote im Zeitraum von 1950 bis 1970?
18,442 [1000 Tonnen]



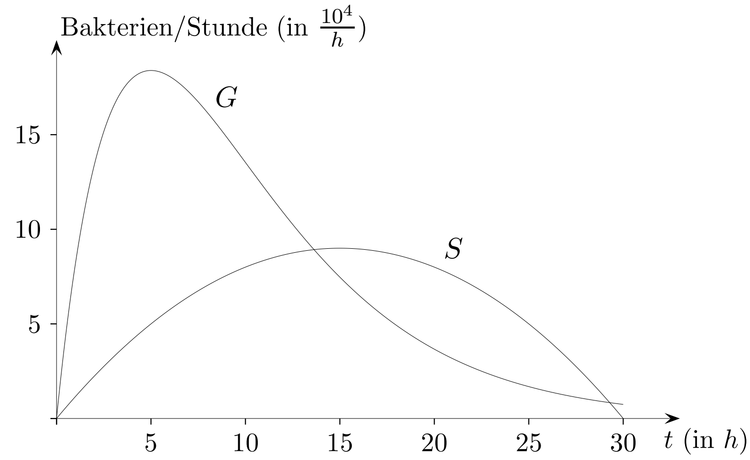
↑ Bakterienpopulation



Von einer Bakterienpopulation sind die Geburtenrate $G(t) = 10t \cdot e^{-0,2t}$ und die Sterberate $S(t) = -0{,}04t \cdot (t - 30)$ bekannt, $t \in [0; 30]$ in Stunden, $G(t)$ und $S(t)$ in $\frac{10\,000}{h}$.
Zu Beginn der Beobachtung waren 50 000 Bakterien vorhanden.

Entwickeln Sie ansprechende Fragestellungen und geben Sie Ansätze zu deren Lösung an.

↑ Bakterienpopulation



Von einer Bakterienpopulation sind die Geburtenrate $G(t) = 10t \cdot e^{-0,2t}$ und die Sterberate $S(t) = -0{,}04t \cdot (t - 30)$ bekannt, $t \in [0; 30]$ in Stunden, $G(t)$ und $S(t)$ in $\frac{10\,000}{h}$.
Zu Beginn der Beobachtung waren 50 000 Bakterien vorhanden.

Die Funktion $B(t)$ beschreibt die Anzahl der lebenden Bakterien zum Zeitpunkt t.
Entwickeln Sie ansprechende Fragestellungen und geben Sie Ansätze zu deren Lösung an.

a) In welchen Bereichen ist $B(t)$ monoton steigend, bzw. monoton fallend?
An welchen Stellen liegen Extrema und Wendepunkte vor?
Skizzieren Sie den Graphen von $B(t)$.

b) Begründen Sie anhand der Grafik, dass diese Modellierung für $x \geq 30$ nicht sinnvoll ist.

c) Skizzieren Sie die Graphen der Bestandsfunktionen von $G(t)$ und $S(t)$.

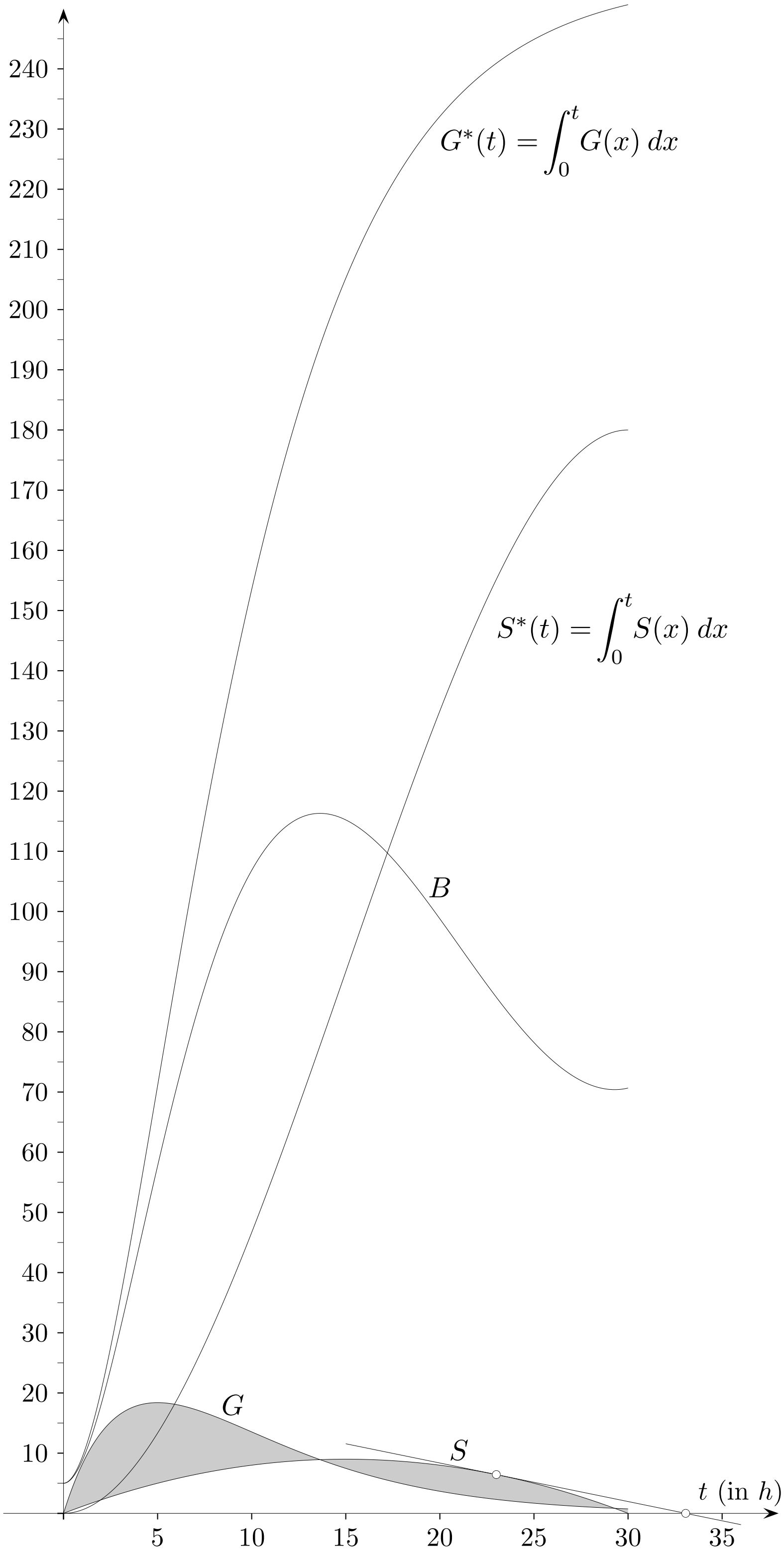
d) Bestimmen Sie die beiden Zeitpunkte, für die in einem Abstand von 10 Stunden die Geburtenrate gleich ist.

e) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, für den die Änderung der Sterberate am kleinsten ist.

f) Angenommen, die Änderung der Sterberate würde nach 23 Stunden konstant bleiben.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, für den dann die Sterberate 0 Bakterien/Stunde betragen würde.

↑ Bakterienpopulation

Von einer Bakterienpopulation sind die Geburtenrate $G(t) = 10t \cdot e^{-0{,}2t}$ und die Sterberate $S(t) = -0{,}04t \cdot (t - 30)$ bekannt, $t \in [0; 30]$ in Stunden, $G(t)$ und $S(t)$ in $\frac{10\,000}{h}$.
Zu Beginn der Beobachtung waren 50 000 Bakterien vorhanden.
Die Funktion $B(t)$ beschreibt die Anzahl der lebenden Bakterien zum Zeitpunkt t.



a) siehe Grafik

b)

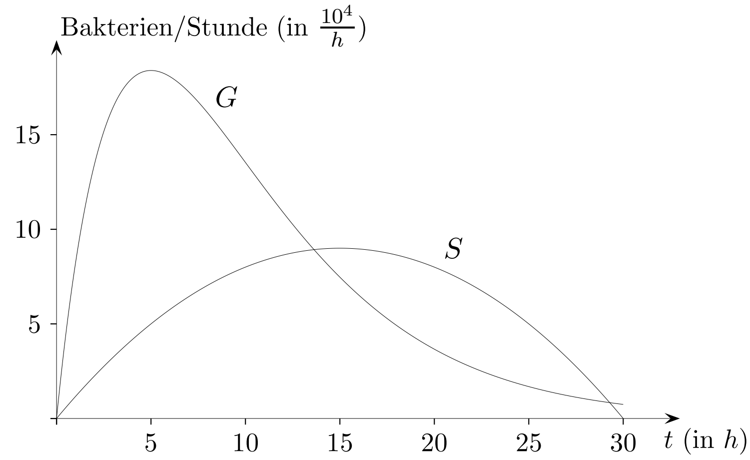
c) Bestandsfunktionen G^*, S^*

d) 1,565; 11,565
Die Gleichung $G(t) = G(t + 10)$ kann auch ohne GTR gelöst werden.

e) $t = 30$

f) 33,063

↑ Bakterienpopulation 1



Von einer Bakterienpopulation sind die Geburtenrate $G(t) = 10t \cdot e^{-0,2t}$ und die Sterberate $S(t) = -0{,}04t \cdot (t - 30)$ bekannt, $t \in [0; 30]$ in Stunden, $G(t)$ und $S(t)$ in $\frac{10\,000}{h}$.

a) Beschreiben Sie anhand der Grafik, was die Kurvenverläufe über die Entwicklung der Population aussagen. Berücksichtigen Sie auch die Schnittstellen von G und S.

b) Zu welchen Zeiten ist die Geburtenrate doppelt so groß wie die Sterberate?

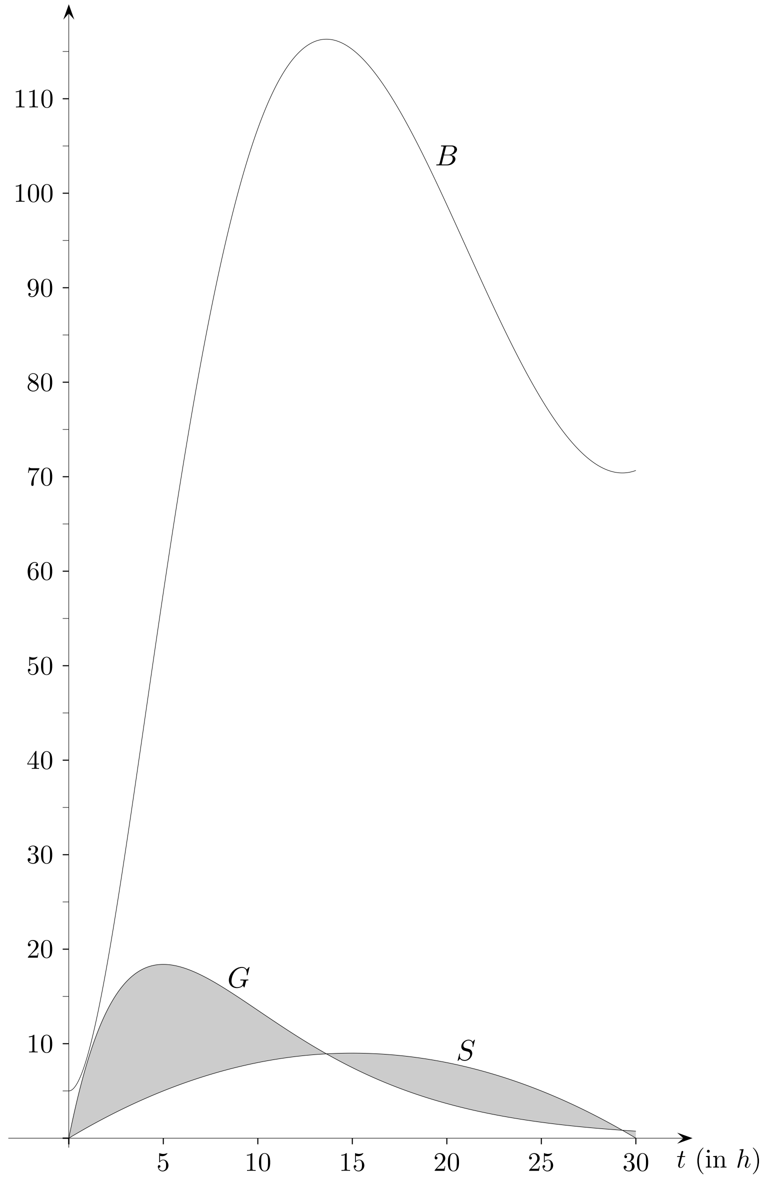
c) Die Funktion B beschreibt die Anzahl der lebenden Bakterien zum Zeitpunkt t.
Zu Beginn der Beobachtung waren 50 000 Bakterien vorhanden. Bestimmen Sie $B(20)$.

d) Zeigen Sie, dass $\int G(t)\,dt = (-250 - 50t) \cdot e^{-0,2t} + C$ ist und zeichnen Sie den Graphen von B.

e) Wann war die Anzahl der Bakterien maximal und wie groß war diese Anzahl?

f) Zeigen Sie, dass die Wendestellen von B die Extremstellen von $D(t) = G(t) - S(t)$ sind.
Ermitteln Sie die Wendestellen von B.

↑ Bakterienpopulation 1   Ergebnisse



Von einer Bakterienpopulation sind die Geburtenrate $G(t) = 10t \cdot e^{-0{,}2t}$ und die Sterberate $S(t) = -0{,}04t \cdot (t - 30)$ bekannt, $t \in [0; 30]$ in Stunden, $G(t)$ und $S(t)$ in $\frac{10\,000}{h}$.

a) Beschreiben Sie anhand der Grafik, was die Kurvenverläufe über die Entwicklung der Population aussagen. Berücksichtigen Sie auch die Schnittstellen von G und S.

b) Zu welchen Zeiten ist die Geburtenrate doppelt so groß wie die Sterberate? 8,90; 29,67

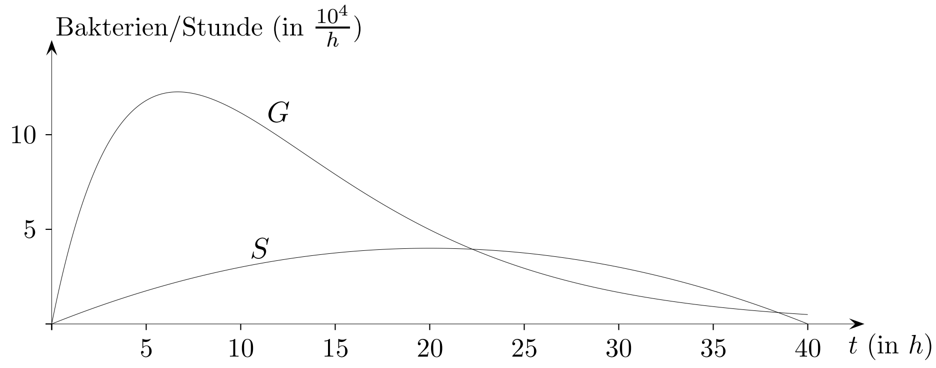
c) Die Funktion B beschreibt die Anzahl der lebenden Bakterien zum Zeitpunkt t. Zu Beginn der Beobachtung waren 50 000 Bakterien vorhanden. Bestimmen Sie $B(20)$. 987721

d) Zeigen Sie, dass $\int G(t)\,dt = (-250 - 50t) \cdot e^{-0{,}2t} + C$ ist und zeichnen Sie den Graphen von B.

e) Wann war die Anzahl der Bakterien maximal und wie groß war diese Anzahl? $B(13{,}63) = 116{,}30$

f) Zeigen Sie, dass die Wendestellen von B die Extremstellen von $D(t) = G(t) - S(t)$ sind. Ermitteln Sie die Wendestellen von B. 4,02; 21,00

↑ Bakterienpopulation 2



Von einer Bakterienpopulation sind die Geburtenrate $G(t) = 5t \cdot e^{-0{,}15t}$ und die Sterberate $S(t) = -0{,}01t \cdot (t - 40)$ bekannt, $t \in [0; 40]$ in Stunden, $G(t)$ und $S(t)$ in $\frac{10\,000}{h}$.

a) Beschreiben Sie anhand der Grafik, was die Kurvenverläufe über die Entwicklung der Population aussagen. Berücksichtigen Sie auch die Schnittstellen von G und S.

b) Zu welchen Zeiten ist die Geburtenrate dreimal so groß wie die Sterberate?

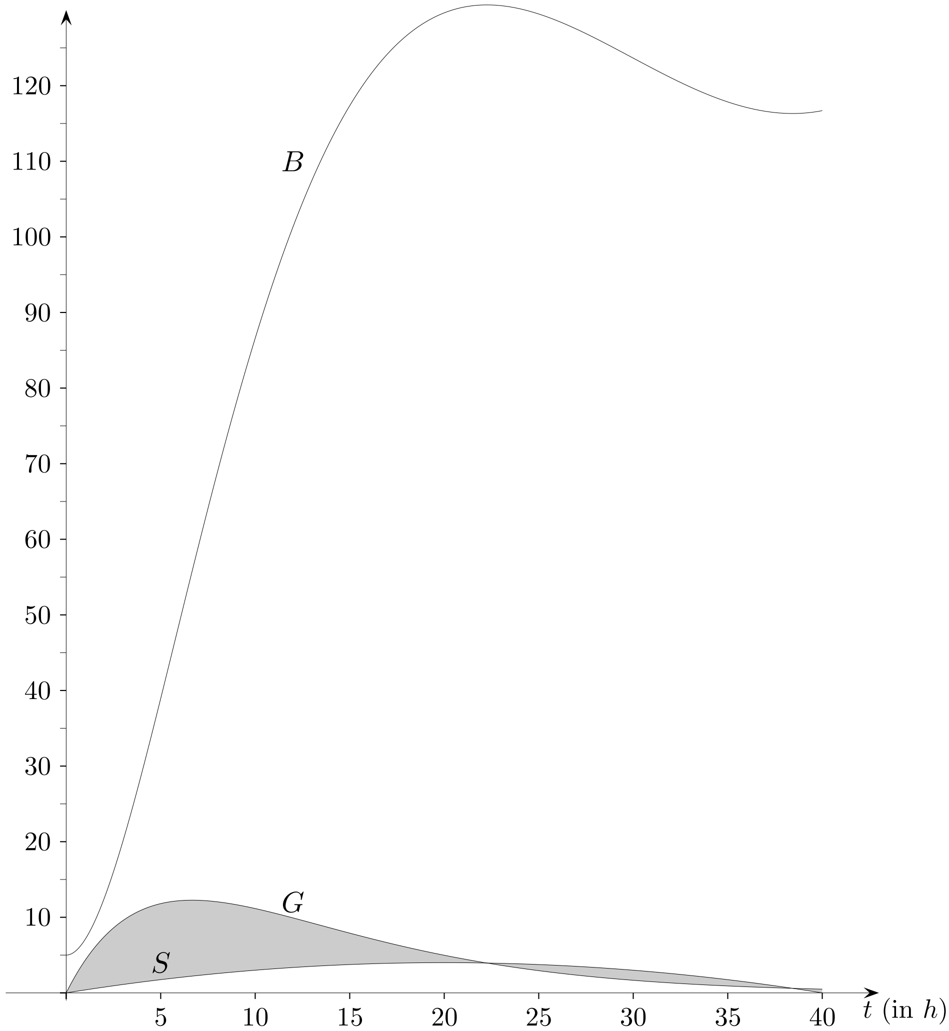
c) Die Funktion B beschreibt die Anzahl der lebenden Bakterien zum Zeitpunkt t.
Zu Beginn der Beobachtung waren 50000 Bakterien vorhanden. Bestimmen Sie $B(20)$.

d) Zeigen Sie, dass $\int G(t)\,dt = -\frac{100}{9}(3t + 20) \cdot e^{-0{,}15t} + C$ ist und zeichnen Sie den Graphen von B.

e) Wann war die Anzahl der Bakterien maximal und wie groß war diese Anzahl?

f) Zeigen Sie, dass die Wendestellen von B die Extremstellen von $D(t) = G(t) - S(t)$ sind.
Ermitteln Sie die Wendestellen von B.

↑ Bakterienpopulation 2   Ergebnisse



Von einer Bakterienpopulation sind die Geburtenrate $G(t) = 5t \cdot e^{-0{,}15t}$ und die Sterberate $S(t) = -0{,}01t \cdot (t - 40)$ bekannt, $t \in [0; 40]$ in Stunden, $G(t)$ und $S(t)$ in $\frac{10\,000}{h}$.

a) Beschreiben Sie anhand der Grafik, was die Kurvenverläufe über die Entwicklung der Population aussagen. Berücksichtigen Sie auch die Schnittstellen von G und S.

b) Zu welchen Zeiten ist die Geburtenrate dreimal so groß wie die Sterberate? 11,86; 39,56

c) Die Funktion B beschreibt die Anzahl der lebenden Bakterien zum Zeitpunkt t.
Zu Beginn der Beobachtung waren 50 000 Bakterien vorhanden. Bestimmen Sie $B(20)$. 1296337

d) Zeigen Sie, dass $\int G(t)\,dt = -\frac{100}{9}(3t + 20) \cdot e^{-0{,}15t} + C$ ist und zeichnen Sie den Graphen von B.

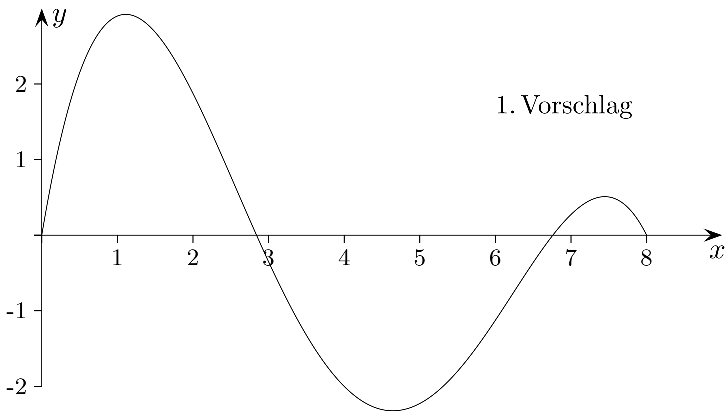
e) Wann war die Anzahl der Bakterien maximal und wie groß war diese Anzahl? $B(22{,}26) = 130{,}68$

f) Zeigen Sie, dass die Wendestellen von B die Extremstellen von $D(t) = G(t) - S(t)$ sind.
Ermitteln Sie die Wendestellen von B. 5,77; 29,86

↑ Staulänge

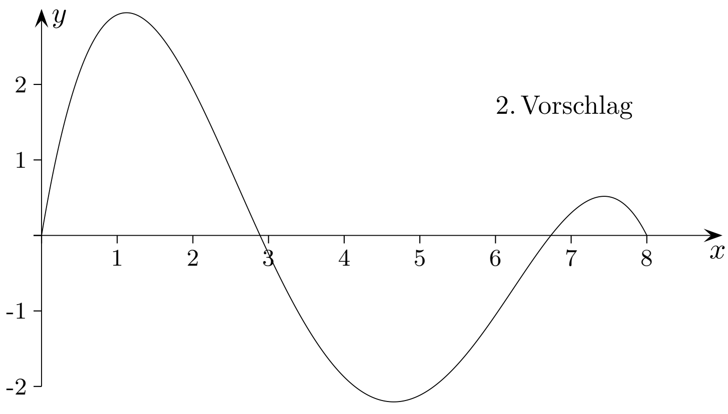
An einer Autobahnbaustelle wird die Stauentwicklung ab 6:00 Uhr ($x = 0$) untersucht.
Mit den erhobenen Messdaten wird versucht, die Änderungsrate der Staulänge von 6:00 Uhr bis 14:00 Uhr durch eine Funktion f zu modellieren.
Dabei wird x in Stunden und $f(x)$ in Kilometer pro Stunde angegeben.

a) Der 1. Vorschlag $f(x) = -\frac{5}{128}x^4 + \frac{11}{16}x^3 - \frac{15}{4}x^2 + 6x$ ergibt sich aus den Bedingungen $f(0) = f(8) = 0$, $f'(0) = 6$, $f'(8) = -2$ und $\int_0^8 f(x)\,dx = 0$.
Was besagt die letzte Bedingung im Sachzusammenhang?



Begründen Sie, warum f für diese Modellierung ungeeignet ist.

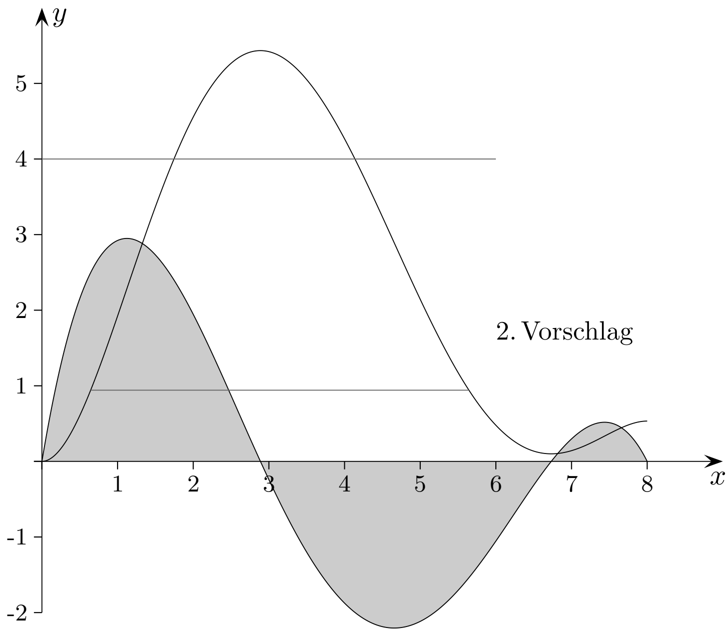
b) Im 2. Vorschlag $f(x) = -\frac{79}{2048}x^4 + \frac{87}{128}x^3 - \frac{119}{32}x^2 + 6x$
ist nur die letzte Bedingung des 1. Vorschlages nicht erfüllt.
Wie lang ist nun der Stau um 14:00 Uhr?
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht.



c) Ermitteln Sie die Uhrzeiten (auf Minuten gerundet), zu denen der Stau eine Länge von 4 Kilometern erreicht.

d) Untersuchen Sie, ob es zwei Zeitpunkte (keine Umrechnung in Uhrzeiten) gibt, die genau 5 Stunden auseinander liegen und die gleiche Staulänge haben.

↑ Staulänge



a) Der 1. Vorschlag $f(x) = -\frac{5}{128}x^4 + \frac{11}{16}x^3 - \frac{15}{4}x^2 + 6x$ ergibt sich aus den Bedingungen
$f(0) = f(8) = 0,\ f'(0) = 6,\ f'(8) = -2$ und $\int_0^8 f(x)\,dx = 0$.
Was besagt die letzte Bedingung im Sachzusammenhang? Kein Stau um 14:00 Uhr.

b) Im 2. Vorschlag $f(x) = -\frac{79}{2048}x^4 + \frac{87}{128}x^3 - \frac{119}{32}x^2 + 6x$
ist nur die letzte Bedingung des 1. Vorschlages nicht erfüllt.
Wie lang ist nun der Stau um 14:00 Uhr? 0,533 km
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht. nach 2,89 h

c) Ermitteln Sie die Uhrzeiten (auf Minuten gerundet), zu denen der Stau eine Länge von 4 Kilometern erreicht. 7:45; 10:08

d) Untersuchen Sie, ob es zwei Zeitpunkte (keine Umrechnung in Uhrzeiten) gibt, die genau 5 Stunden auseinander liegen und die gleiche Staulänge haben. 0,644; 5,644

↑ Konzentration eines Medikaments

Für eine Studie wird nach der Verabreichung eines Medikaments jeweils die Konzentration k des im Blut vorhandenen Wirkstoffes (in Milligramm pro Liter) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) gemessen.

Das Medikament wird mithilfe einer Spritze direkt in den Blutkreislauf gebracht. Kurz nach Verabreichung der Spritze erfolgt die erste Messung der Wirkstoffkonzentration im Blut, was den Beginn der Messreihe festlegt ($t = 0$). Es stellt sich heraus, dass der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration k im Blutkreislauf in den ersten 5 Stunden nach der Verabreichung des Medikaments durch folgende Funktion f modelliert werden kann: $f(t) = a \cdot e^{-bt}$ und mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $t \in [0; 5]$.

Für den Probanden A ergeben sich folgende Messwerte:

Zeit t in Stunden	0	1,5	3,0	5,0
Konzentration k in $\frac{mg}{l}$	10,20	5,68	3,17	1,45

Die folgenden Aufgabenteile a) bis f) beziehen sich auf die Messwerte für den Probanden A.

a) Zeigen Sie mithilfe der Messwerte zu den Zeiten $t = 0$ und $t = 3{,}0$, dass sich für die Funktion f die Werte $a = 10{,}20$ und $b \approx 0{,}39$ ergeben.

b) Unter der Halbwertszeit des Medikamentenabbaus versteht man die Zeitspanne, in der sich die Wirkstoffkonzentration k im Blut halbiert. Berechnen Sie diese Halbwertszeit.

c) Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffkonzentration k am stärksten ab?
Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der Eigenschaften der Funktion f.

d) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Wirkstoffkonzentration k in einer Stunde abnimmt und um wie viel Prozent sie in einer halben Stunde abnimmt.

e) Weisen Sie nach, dass die Funktion f eine Gleichung der Form $f'(t) = c \cdot f(t)$ mit $c \in \mathbb{R}$ erfüllt.
Interpretieren Sie die Gleichung im Sachzusammenhang. Gehen Sie auch auf die Bedeutung von c ein.

f) Der Einfachheit halber soll angenommen werden, dass ab dem Zeitpunkt $t = 5{,}0$ die Abnahme der Wirkstoffkonzentration k durch eine lineare Funktion g beschrieben werden kann.
Der Graph von g liegt auf der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(5 \mid f(5))$.
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf.

Geben Sie einen im Sachzusammenhang sinnvollen Definitionsbereich von g an.
Begründen Sie Ihre Wahl.

Der folgende Aufgabenteil g) bezieht sich auf mehrere Probanden.

g) Im Rahmen der Studie wurden bei den Probanden auch unterschiedliche Anfangskonzentrationen und unterschiedliche Halbwertszeiten gemessen. Geben Sie den Funktionsterm des zeitlichen Verlaufs der Wirkstoffkonzentration in den ersten Stunden des exponentiellen Abbaus an, wenn bei einem Probanden B zum Zeitpunkt $t = 0$ die Wirkstoffkonzentration um p Prozent größer ist als bei Proband A und die Halbwertszeit um q Prozent wächst.

h) Berechnen Sie für die Messwerte des Probanden A die mittlere Wirkstoffkonzentration $\overline{k}$ als Mittelwert der Funktion f auf dem Intervall $[0; 5]$.

Für eine Studie wird nach der Verabreichung eines Medikaments jeweils die Konzentration k des im Blut vorhandenen Wirkstoffes (in Milligramm pro Liter) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) gemessen.

Das Medikament wird mithilfe einer Spritze direkt in den Blutkreislauf gebracht. Kurz nach Verabreichung der Spritze erfolgt die erste Messung der Wirkstoffkonzentration im Blut, was den Beginn der Messreihe festlegt ($t = 0$). Es stellt sich heraus, dass der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration k im Blutkreislauf in den ersten 5 Stunden nach der Verabreichung des Medikaments durch folgende Funktion f modelliert werden kann: $f(t) = a \cdot e^{-bt}$ und mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $t \in [0; 5]$.

Für den Probanden A ergeben sich folgende Messwerte:

Zeit t in Stunden	0	1,5	3,0	5,0
Konzentration k in $\frac{mg}{l}$	10,20	5,68	3,17	1,45

Die folgenden Aufgabenteile a) bis f) beziehen sich auf die Messwerte für den Probanden A.

a) Zeigen Sie mithilfe der Messwerte zu den Zeiten $t = 0$ und $t = 3{,}0$, dass sich für die Funktion f die Werte $a = 10{,}20$ und $b \approx 0{,}39$ ergeben.

b) Unter der Halbwertszeit des Medikamentenabbaus versteht man die Zeitspanne, in der sich die Wirkstoffkonzentration k im Blut halbiert. Berechnen Sie diese Halbwertszeit.

$t_H = 1{,}78$ oder 1 Stunde und 47 Minuten

c) Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffkonzentration k am stärksten ab? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der Eigenschaften der Funktion f.

$t = 0$, Funktion positiv und monoton abnehmend, Graph linksgekrümmt

d) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Wirkstoffkonzentration k in einer Stunde abnimmt und um wie viel Prozent sie in einer halben Stunde abnimmt.

in einer Stunde: $\dfrac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} = 1 - e^{-0{,}39} \approx 32{,}3\,\%$

in einer halben Stunde: $\dfrac{f(t) - f(t+\frac{1}{2})}{f(t)} = 1 - e^{-0{,}39/2} \approx 17{,}7\,\%$

e) Weisen Sie nach, dass die Funktion f eine Gleichung der Form $f'(t) = c \cdot f(t)$ mit $c \in \mathbb{R}$ erfüllt. Interpretieren Sie die Gleichung im Sachzusammenhang. Gehen Sie auch auf die Bedeutung von c ein.

$c = -0{,}39$

Die momentane Änderungsrate der Wirkstoffkonzentration ist proportional zur aktuellen Wirkstoffkonzentration, c ist der Proportionalitätsfaktor.
Die momentane Abnahme beträgt stets 39 % der aktuellen Wirkstoffkonzentration.

f) Der Einfachheit halber soll angenommen werden, dass ab dem Zeitpunkt $t = 5{,}0$ die Abnahme der Wirkstoffkonzentration k durch eine lineare Funktion g beschrieben werden kann.
Der Graph von g liegt auf der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(5 \mid f(5))$.
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf.

$$g(t) = -0{,}566t + 4{,}281$$

Geben Sie einen im Sachzusammenhang sinnvollen Definitionsbereich von g an.
Begründen Sie Ihre Wahl.

Nullstelle von g: $t \approx 7{,}564$

Definitionsbereich: $[5; 7{,}564]$

Die lineare Näherung beginnt nach Vorgabe zum Zeitpunkt $t = 5$.
Zum Zeitpunkt $t = 7{,}564$ ist die Wirkstoffkonzentration auf 0 abgesunken.

Der folgende Aufgabenteil g) bezieht sich auf mehrere Probanden.

g) Im Rahmen der Studie wurden bei den Probanden auch unterschiedliche Anfangskonzentrationen und unterschiedliche Halbwertszeiten gemessen. Geben Sie den Funktionsterm des zeitlichen Verlaufs der Wirkstoffkonzentration in den ersten Stunden des exponentiellen Abbaus an, wenn bei einem Probanden B zum Zeitpunkt $t = 0$ die Wirkstoffkonzentration um p Prozent größer ist als bei Proband A und die Halbwertszeit um q Prozent wächst.

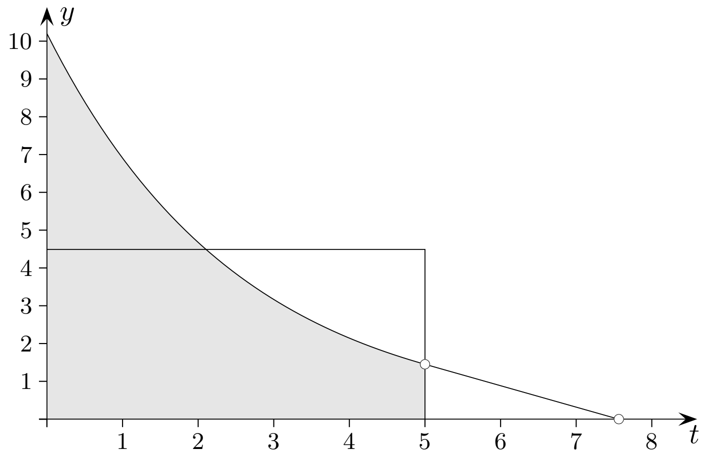
$$f(t) = a \cdot e^{-bt}$$

$$t_H = \frac{\ln 2}{b}, \quad b = \frac{\ln 2}{t_H}$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot 10{,}2 \cdot e^{\frac{-0{,}39t}{\left(1 + \frac{q}{100}\right)}}$$

h) Berechnen Sie für die Messwerte des Probanden A die mittlere Wirkstoffkonzentration $\overline{k}$ als Mittelwert der Funktion f auf dem Intervall $[0; 5]$.

$$4{,}49\,\frac{mg}{l}$$



↑ Atemtest

Bei der Untersuchung eines Patienten wird ein Atemstoßtest durchgeführt.
Dazu soll der Patient einmal möglichst vollständig und schnell ausatmen.
Die hierbei pro Zeit ausgeatmete Luft wird als Atemfluss bezeichnet.
Dieser wird in Litern pro Sekunde (l/s) und die Zeit in Sekunden gemessen.
Der Messvorgang und das Ausatmen beginnen gleichzeitig zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.
In den ersten drei Sekunden des Ausatmens wird der Atemfluss dieses Patienten durch die Funktion

$$f(t) = 40 \cdot t \cdot e^{-\frac{5}{2}t}, \quad t \text{ in Sekunden, } f(t) \text{ in Litern pro Sekunde, modelliert.}$$

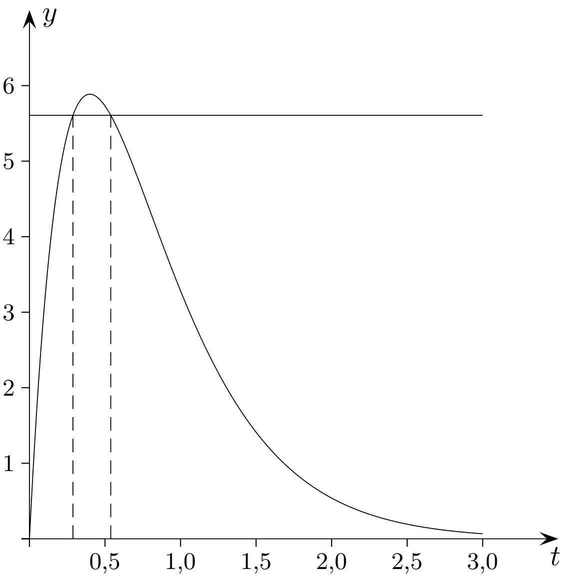
a) Bestimmen Sie ohne GTR den Zeitpunkt t_1, zu dem der Atemfluss maximal ist (notw. Bed. genügt). Der Messvorgang wird beendet, wenn der Atemfluss nach dem Zeitpunkt t_1 die Grenze von $0{,}1\,\frac{l}{s}$ unterschreitet. Ermitteln Sie die Dauer des Messvorgangs.

b) Es wird modellhaft vorausgesetzt, dass die Lunge zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ voll und zum Zeitpunkt $t_3 = 2{,}81$ leer ist. Ein Patient wird als gesund eingestuft, wenn er innerhalb der ersten Sekunde mindestens 75 % der in seiner Lunge vorhandenen Luft ausatmet. Entscheiden Sie, ob der obige Patient bezüglich dieses Kriteriums als gesund eingestuft werden kann.

c) Untersuchen Sie, ob a, b, c so gewählt werden können, dass $F(t) = e^{at} \cdot (bt + c)$ eine Stammfunktion von f ist.

d) In welchem Zeitintervall wären keine Atemflusswerte aufgezeichnet worden, falls das Messgerät durch einen Defekt für einen Zeitraum von 0,25 Sekunden unterhalb eines unbekannten Schwellenwertes ausgefallen wäre?

↑ Atemtest



Bei der Untersuchung eines Patienten wird ein Atemstoßtest durchgeführt.
Dazu soll der Patient einmal möglichst vollständig und schnell ausatmen.
Die hierbei pro Zeit ausgeatmete Luft wird als Atemfluss bezeichnet.
Dieser wird in Litern pro Sekunde (l/s) und die Zeit in Sekunden gemessen.
Der Messvorgang und das Ausatmen beginnen gleichzeitig zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.
In den ersten drei Sekunden des Ausatmens wird der Atemfluss dieses Patienten durch die Funktion

$$f(t) = 40 \cdot t \cdot e^{-\frac{5}{2}t}, \quad t \text{ in Sekunden, } f(t) \text{ in Litern pro Sekunde, modelliert.}$$

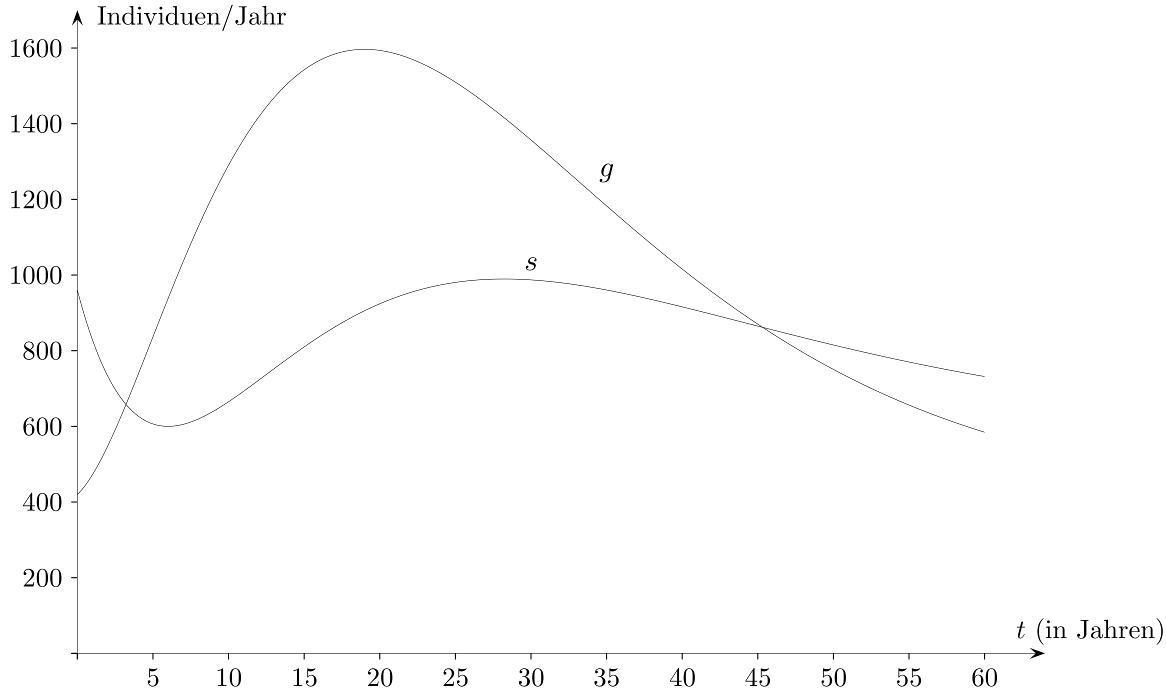
a) Bestimmen Sie ohne GTR den Zeitpunkt t_1, zu dem der Atemfluss maximal ist (notw. Bed. genügt).
$t_1 = 0{,}4$
Der Messvorgang wird beendet, wenn der Atemfluss nach dem Zeitpunkt t_1 die Grenze von $0{,}1\,\frac{l}{s}$ unterschreitet. Ermitteln Sie die Dauer des Messvorgangs. $2{,}81\ s$

b) Es wird modellhaft vorausgesetzt, dass die Lunge zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ voll und zum Zeitpunkt $t_3 = 2{,}81$ leer ist. Ein Patient wird als gesund eingestuft, wenn er innerhalb der ersten Sekunde mindestens 75 % der in seiner Lunge vorhandenen Luft ausatmet. Entscheiden Sie, ob der obige Patient bezüglich dieses Kriteriums als gesund eingestuft werden kann.
$71{,}7\,\% < 75\,\%$, nicht gesund

c) Untersuchen Sie, ob a, b, c so gewählt werden können, dass $F(t) = e^{at} \cdot (bt + c)$ eine Stammfunktion von f ist. $F'(t) = e^{at}(abt + ac + b)$, $a = -5/2$, $b = -16$, $c = -32/5$

d) In welchem Zeitintervall wären keine Atemflusswerte aufgezeichnet worden, falls das Messgerät durch einen Defekt für einen Zeitraum von 0,25 Sekunden unterhalb eines unbekannten Schwellenwertes ausgefallen wäre?
$f(t) = f(t + 0{,}25)$, $[0{,}2879; 0{,}5379]$

↑ Populationsentwicklung



Die Entwicklung einer Population in den Jahren 1960 bis 2020 lässt sich durch zwei Funktionen modellhaft beschreiben.
Die Geburtenrate der Population wird durch $g(t) = 400 + 20 \cdot (t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t}$ beschrieben und die Sterberate durch $s(t) = 600 + 10 \cdot (t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t}$.
(t in Jahren seit Beginn des Jahres 1960, $g(t)$ und $s(t)$ in Individuen pro Jahr).

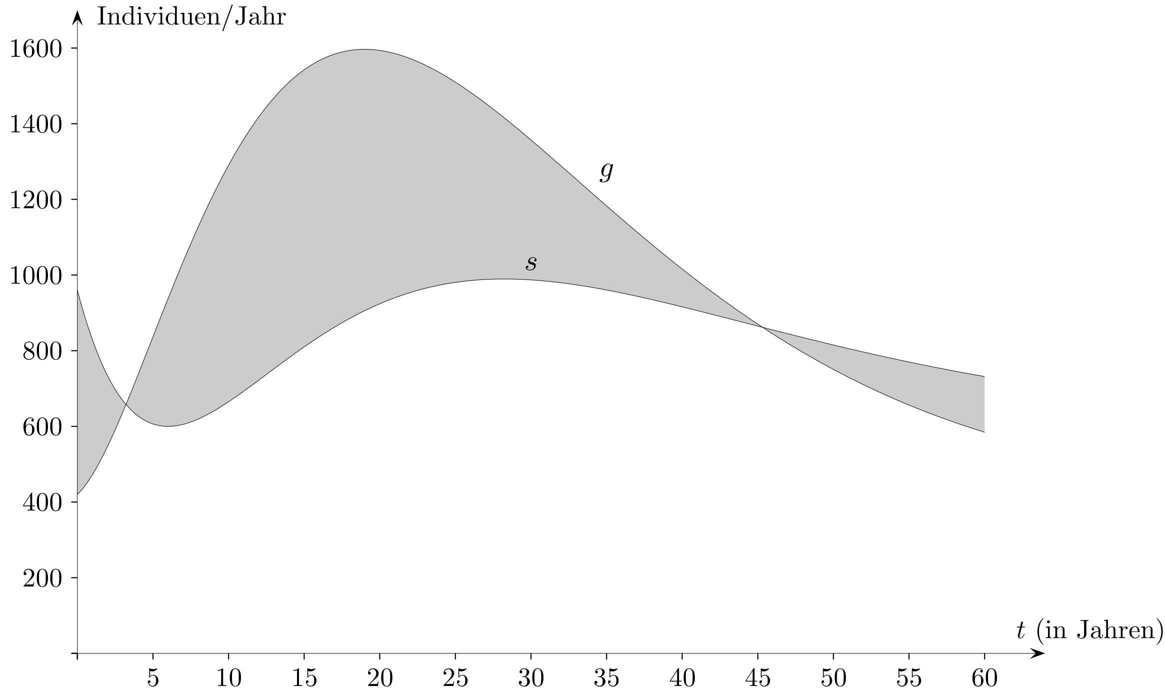
a) Bestimmen Sie die geringste Sterberate.
In welchem Jahr war die Differenz aus Geburten- und Sterberate am größten?
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat.

b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus 20 000 Individuen.
Berechnen Sie den Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017.
In welchem Jahr erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960?

Betrachtet wird nun das Größenwachstum eines einzelnen Individuums der Population.
Dies kann im Beobachtungszeitraum durch das Gesetz des beschränkten Wachstums modelliert werden. Man geht davon aus, dass dieses Individuum in ausgewachsenem Zustand $0{,}8\,m$ groß ist. Zu Beobachtungsbeginn betragen seine Größe $0{,}5\,m$ und seine momentane Wachstumsgeschwindigkeit $0{,}15\,m$ pro Jahr.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Funktion, die die Körpergröße des Individuums in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um 50 % zugenommen?

↑ Populationsentwicklung



Die Entwicklung einer Population in den Jahren 1960 bis 2020 lässt sich durch zwei Funktionen modellhaft beschreiben.
Die Geburtenrate der Population wird durch $g(t) = 400 + 20 \cdot (t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t}$ beschrieben und die Sterberate durch $s(t) = 600 + 10 \cdot (t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t}$.
(t in Jahren seit Beginn des Jahres 1960, $g(t)$ und $s(t)$ in Individuen pro Jahr).

a) Bestimmen Sie die geringste Sterberate. $s(6) = 600$
In welchem Jahr war die Differenz aus Geburten- und Sterberate am größten? $t = 15{,}12$, 1975
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat. $[3{,}22; 45{,}31]$
1963 bis 2005

b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus 20 000 Individuen.
Berechnen Sie den Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017. $t = 57$, 2017
In welchem Jahr erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960? $t_\Delta = 6{,}87$, 1966

Betrachtet wird nun das Größenwachstum eines einzelnen Individuums der Population.
Dies kann im Beobachtungszeitraum durch das Gesetz des beschränkten Wachstums modelliert werden. Man geht davon aus, dass dieses Individuum in ausgewachsenem Zustand $0{,}8\,m$ groß ist. Zu Beobachtungsbeginn betragen seine Größe $0{,}5\,m$ und seine momentane Wachstumsgeschwindigkeit $0{,}15\,m$ pro Jahr.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Funktion, die die Körpergröße des Individuums in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. $f(t) = G - ae^{-kt}$
$G = 0{,}8$, $a = 0{,}3$, $f'(0) = 0{,}15$, $k = 0{,}5$, $f(t) = 0{,}8 - 0{,}3e^{-0{,}5t}$
Wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um 50 % zugenommen? $t = 3{,}6$ (Jahre)

↑ Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften

In den Wirtschaftswissenschaften werden Produktionsprozesse durch mathematische Funktionen modelliert.

a) Die in 1000 Euro je Einheit gemessenen Kosten, die durch die Herstellung eines Gutes entstehen, sollen durch eine ganzrationale Funktion K dritten Grades beschrieben werden. Deren Graph habe einen Wendepunkt in $(2\,|\,14)$ und dort die Tangentensteigung $m = 3$. Dabei beschreibe x die Anzahl des hergestellten Gutes in 1000 Stück. Fixe Kosten, die auch dann anfallen, wenn nicht produziert wird, werden nicht berücksichtigt. Deswegen verläuft der Graph auch durch den Ursprung.
Leiten Sie die Funktionsgleichung von K her. [zur Kontrolle: $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$]

Die Einnahmen werden beschrieben durch die Funktion E mit der Gleichung $E(x) = 9x$.
Der Gewinn ergibt sich, wenn die Kosten von den Einnahmen subtrahiert werden.
Ebenso wie die Kosten werden Einnahmen und Gewinn in 1000 Euro je Einheit gemessen.

Berechnen Sie mögliche Schnittpunkte der Graphen von K und E im Intervall $[0; 7]$.
Fertigen Sie eine Zeichnung der Funktionsgraphen in einem gemeinsamen Koordinatensystem an.
Untersuchen Sie, für welche Produktionszahlen der Betrieb einen positiven Gewinn erzielt, und berechnen Sie den maximalen Gewinn.

b) Im Folgenden beschreibt die Funktion f mit $f(t) = 10t \cdot e^{-\frac{t}{4}}$ die momentane Verkaufsrate eines Gutes in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei ist t die Zeit nach Verkaufsbeginn in Monaten und $f(t)$ die momentane Verkaufsrate in 1000 Stück pro Monat.
Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die momentane Verkaufsrate am stärksten sinkt, und berechnen Sie diese Rate.
Weisen Sie nach, dass $F(k) = 160 - 40(k+4) \cdot e^{-\frac{k}{4}}$ die Gesamtzahl der verkauften Güter nach k Monaten beschreibt.

c) Der Hersteller produziert ab dem Zeitpunkt des Verkaufsbeginns ($t = 0$) 10000 Stück des Gutes pro Monat. Unverkauftes wird zwischengelagert. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Nachfrage zwischenzeitlich nicht mehr gedeckt werden kann.

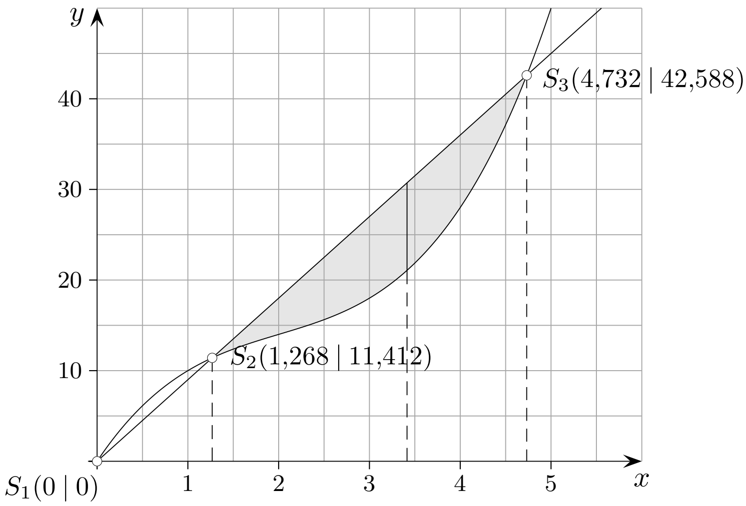
a) Ansatz $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bedingungen:

$$\begin{aligned} 1.\quad K(2) &= 14 \\ 2.\quad K''(2) &= 0 \\ 3.\quad K'(2) &= 3 \\ 4.\quad K(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.\quad 8a + 4b + 2c + d &= 14 \\ 2.\quad 12a + 2b &= 0 \\ 3.\quad 12a + 4b + c &= 3 \\ 4.\quad d &= 0 \end{aligned}$$

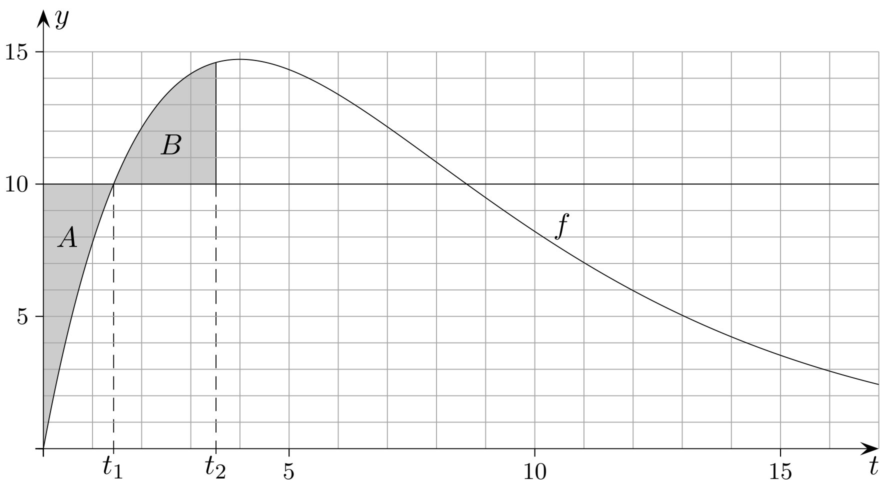
$K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$



Gewinnzone [1268|4732]
$G(3{,}414) = 9{,}657$
Der maximale Gewinn beträgt 9657 Euro je Einheit.

b) $f'(8) = 10{,}83$
$F'(k) = f(k),\ F(0) = 0$

c)



Der Überschuss bis zum Zeitpunkt $t_1 = 1{,}430$ beträgt 6,2159 (Flächeninhalt).
Dieser Überschuss ist bis zum Zeitpunkt $t_2 = 3{,}513$ aufgebraucht. $A = B$

Alternativer Ansatz: $F(k) = 10k$

↑ Überlaufgebiet

Die südliche Uferlinie eines Flusses werde in einem Koordinatensystem durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}6x^2 + 1{,}35x$, $x \in [0; 10]$ beschrieben und die nördliche Uferlinie durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = e^{x-8} + 2$, $x \in [0; 10]$.
Dabei zeigt die x-Achse nach Osten und die y-Achse nach Norden.
Eine Einheit entspricht $10\,m$ in der Wirklichkeit.

a) Berechnen Sie ohne GTR die Null- und Extremstellen des Graphen der Funktion f im gegebenen Intervall. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g.

b) Im Norden des Flusses ist ein Überlaufgebiet geplant. Das Überlaufgebiet wird begrenzt durch den Graphen einer Funktion h mit $h(x) = e^{ax} + b$, $x \in [0; 10]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

   Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass das Überlaufgebiet an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 10$ mit dem Nordufer des Flusses zusammentrifft.

Verwenden Sie im Folgenden $h(x) = e^{0{,}21x} + 1$.

   Berechnen Sie die größte Ausdehnung des Überlaufgebiets in Nord-Süd-Richtung.

c) Von der Wasseroberfläche des Flusses im Intervall $[3; 9]$ sind zu einem bestimmten Zeitpunkt $150\,m^2$ von Algen bedeckt. Die in diesem Intervall bedeckte Wasserfläche vergrößert sich wöchentlich um $30\,\%$. Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem $80\,\%$ der Wasseroberfläche im Intervall $[3; 9]$ von Algen bedeckt ist.

d) Eine weitere Funktion i ist definiert durch $i(x) = e^{x-8} - x + 2$.
   Zeigen Sie, dass es keine Stelle $x \in \mathbb{R}$ gibt, an der die Tangenten an die Graphen von g und i orthogonal zueinander sind.

↑ Überlaufgebiet

Die südliche Uferlinie eines Flusses werde in einem Koordinatensystem durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}6x^2 + 1{,}35x$, $x \in [0; 10]$ beschrieben und die nördliche Uferlinie durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = e^{x-8} + 2$, $x \in [0; 10]$.
Dabei zeigt die x-Achse nach Osten und die y-Achse nach Norden.
Eine Einheit entspricht $10\,m$ in der Wirklichkeit.

a) Null-, Extremstellen $\qquad x(x^2 - 12x + 27) = 0,\ L_N = \{0, 3, 9\},\ \ x^2 - 8x + 9 = 0,\ L_E = \{4 \pm \sqrt{7}\}$

b) Im Norden des Flusses ist ein Überlaufgebiet geplant. Das Überlaufgebiet wird begrenzt durch den Graphen einer Funktion h mit $h(x) = e^{ax} + b$, $x \in [0; 10]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass das Überlaufgebiet an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 10$ mit dem Nordufer des Flusses zusammentrifft. $\qquad b = 1,\ \ a = 0{,}2127$

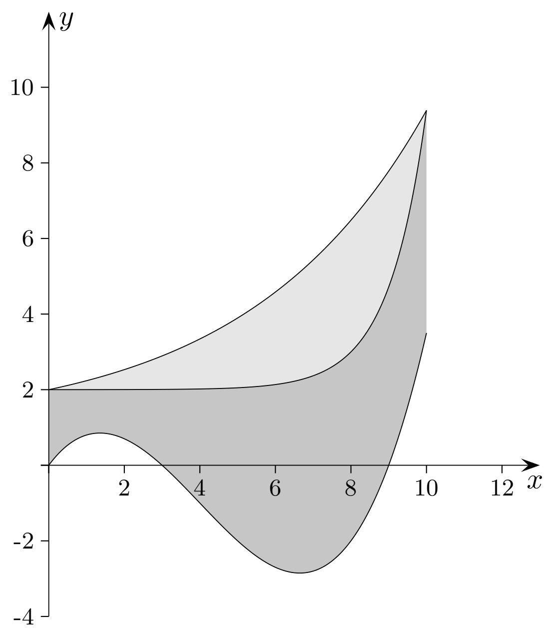
Verwenden Sie im Folgenden $h(x) = e^{0{,}21x} + 1$.

Berechnen Sie die größte Ausdehnung des Überlaufgebiets in Nord-Süd-Richtung.
$d(8{,}15) = 3{,}38 \quad$ ca. $33{,}8\,m$

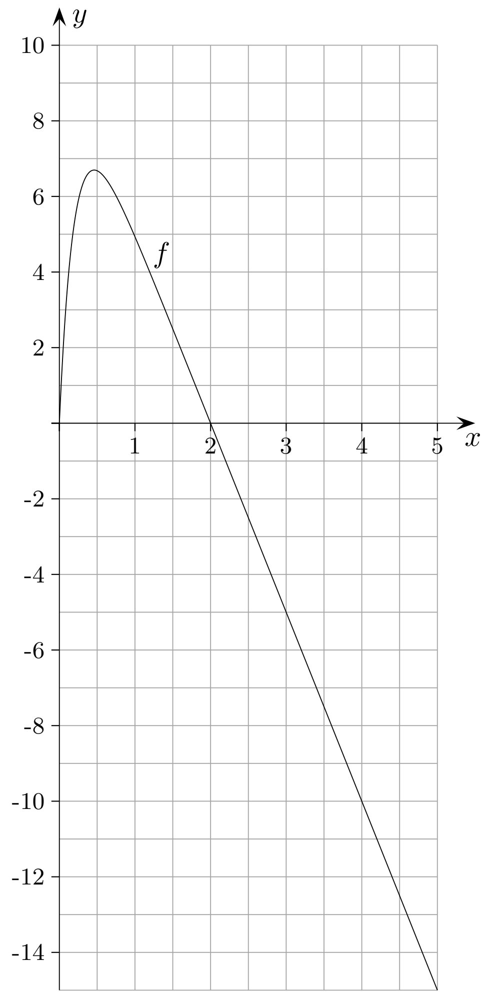
c) Von der Wasseroberfläche des Flusses im Intervall $[3; 9]$ sind zu einem bestimmten Zeitpunkt $150\,m^2$ von Algen bedeckt. Die in diesem Intervall bedeckte Wasserfläche vergrößert sich wöchentlich um 30 %. Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem 80 % der Wasseroberfläche im Intervall $[3; 9]$ von Algen bedeckt ist. $\qquad A = 2551\,m^2,\ \ k(t) = 150 \cdot 1{,}3^t,\ \ 9{,}95$ Wochen

d) Eine weitere Funktion i ist definiert durch $i(x) = e^{x-8} - x + 2$.
Zeigen Sie, dass es keine Stelle $x \in \mathbb{R}$ gibt, an der die Tangenten an die Graphen von g und i orthogonal zueinander sind.

$$\begin{aligned}
g'(x) \cdot i'(x) &= -1 \\
e^{x-8} \cdot (e^{x-8} - 1) &= -1 \\
\left(e^{x-8}\right)^2 - e^{x-8} &= -1 \\
u^2 - u &= -1 \\
L &= \{\}
\end{aligned}$$



↑ Wurf eines Balls



a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 10 - 5x - 10e^{-5x}$, $x \in \mathbb{R}$.
(Aufgabenteile a) und b) ohne GTR)
Ermitteln Sie die ganzrationale(n) Nullstelle(n).
Bestimmen Sie die Stelle des lokalen Maximums der Funktion f.
Begründen Sie, dass die Ableitung von f streng monoton fallend ist.
Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f.
Begründen Sie mit dem Monotonieverhalten, dass f höchstens zwei Nullstellen besitzt.

b) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ verläuft der Graph der Funktion f unterhalb der Geraden $g(x) = 10 - 5x$.
Begründen Sie: Für eine Nullstelle x_0 von f gilt $x_0 < 2$.
Berechnen Sie den Inhalt der zwischen der Geraden g und dem Graphen von f im Intervall $[0; 5]$ liegenden Fläche.

Durch f wird für $0 \leq x \leq 5$ der Wurf eines Kunststoffballs aus dem Fenster eines Gebäudes modelliert. Dem Koordinatenursprung entspricht der Abwurfort, x Zeit in Sekunden, $f(x)$ Höhe des Balls relativ zur Höhe des Abwurforts in Metern.

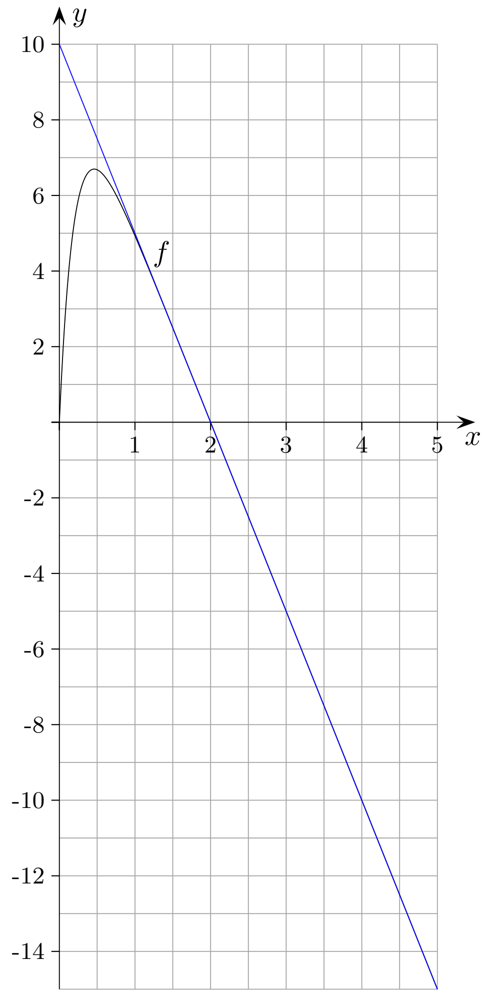
c) Nach 5 Sekunden trifft der Ball auf den Boden.
Berechnen Sie, in welcher Höhe über dem Boden der Ball abgeworfen wurde.

Bestimmen Sie die maximale Höhe des Balles über dem Boden.

Begründen Sie durch den Sachzusammenhang, dass die Funktion f im Intervall $[0; 5]$ genau zwei Nullstellen besitzt.
Geben Sie diese Nullstellen auf zwei Nachkommastellen genau an.

Berechnen Sie das Maximum und das Minimum von f' im Intervall $[0; 5]$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

↑ Wurf eines Balls



a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 10 - 5x - 10e^{-5x}$, $x \in \mathbb{R}$.
(Aufgabenteile a) und b) ohne GTR)
Ermitteln Sie die ganzrationale(n) Nullstelle(n). $x_N = 0, \;\; f(2) = -10e^{-10} \neq 0$

Bestimmen Sie die Stelle des lokalen Maximums der Funktion f. $f'(x) = -5 + 50e^{-5x}$, $x_E = \frac{1}{5}\ln 10$

Begründen Sie, dass die Ableitung von f streng monoton fallend ist.

$x \longrightarrow e^x$ steigt streng monoton,
daher fällt die an der y-Achse gespiegelte Funktion $x \longrightarrow e^{-x}$ streng monoton.
Diese wird in x-Richtung gestaucht, in y-Richtung gestreckt und schließlich nach unten verschoben,
um $x \longrightarrow -5 + 50e^{-5x}$ zu erhalten. Dabei ändert sich die Monotonie nicht.

alternative Begründung:
$f''(x) = -250e^{-5x} < 0, \; x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f'$ fällt auf $\mathbb{R}$ streng monoton.

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f.

Für $x < x_E$ gilt $f'(x) > 0$, also ist f streng monoton wachsend,
für $x > x_E$ gilt $f'(x) < 0$, f ist daher streng monoton fallend.

Begründen Sie mit dem Monotonieverhalten, dass f höchstens zwei Nullstellen besitzt.

Auf dem Intervall $]-\infty; x_E[$ ist f streng monoton wachsend,
kann also dort höchstens eine Nullstelle haben. Es ist $f(x_E) \neq 0$.
f ist auf $]x_E; \infty[$ streng monoton fallend
und kann dort daher höchstens eine weitere Nullstelle haben.
Somit kommen insgesamt höchstens zwei Nullstellen in Frage.

b) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ verläuft der Graph der Funktion f unterhalb der Geraden $g(x) = 10 - 5x$.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) - f(x) = 10e^{-5x} > 0$, d.h. $g(x) > f(x)$.

Somit verläuft der Graph von f stets unterhalb des Graphen von g.

Begründen Sie: Für eine Nullstelle x_0 von f gilt $x_0 < 2$.

Es ist $g(2) = 0$.

Die Steigung von g ist negativ.

Mit $g(x) > f(x)$ ergibt sich, dass $f(x_0) = 0$ nur für ein $x_0 < 2$ gelten kann.

Berechnen Sie den Inhalt der zwischen der Geraden g und dem Graphen von f im Intervall $[0; 5]$ liegenden Fläche.

$$A = \int_0^5 (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^5 10e^{-5x}\, dx = \Big[-2e^{-5x}\Big]_0^5 = 2 - 2e^{-25} = 2$$

Durch f wird für $0 \leq x \leq 5$ der Wurf eines Kunststoffballs aus dem Fenster eines Gebäudes modelliert. Dem Koordinatenursprung entspricht der Abwurfort, x Zeit in Sekunden, $f(x)$ Höhe des Balls relativ zur Höhe des Abwurforts in Metern.

c) Nach 5 Sekunden trifft der Ball auf den Boden.
Berechnen Sie, in welcher Höhe über dem Boden der Ball abgeworfen wurde.

$f(5) = -15$

Der Abwurfort liegt $15\,m$ über dem Boden.

Bestimmen Sie die maximale Höhe des Balles über dem Boden.

$f(x_E) + 15 = 9 - \ln(10) + 15 \approx 21{,}697$

Der Ball erreicht eine maximale Höhe von etwa $21{,}70\,m$.

Begründen Sie durch den Sachzusammenhang, dass die Funktion f im Intervall $[0; 5]$ genau zwei Nullstellen besitzt.

Beim Abwurf beträgt die relative Höhe des Balls $0\,m$.

Dies ist beim Runterfallen ein weiteres Mal der Fall.

Danach bleibt der Ball unterhalb der Abwurfhöhe.

Somit gibt es im Modellierungsbereich $[0; 5]$ nur zwei Nullstellen.

Geben Sie diese Nullstellen auf zwei Nachkommastellen genau an. $x_{N_1} = 0$, $x_{N_2} \approx 1{,}999909 \approx 2{,}00$

Berechnen Sie das Maximum und das Minimum von f' im Intervall $[0; 5]$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

$f'(0) = 45$, $f'(5) = -5 + 50e^{-25} \approx -5$

f' hat auf dem Intervall $[0; 5]$ das Maximum $(0\,|\,45)$ und ein Minimum etwa bei $(5\,|-5)$.

Der Ball hat zu Beginn des Wurfes die höchste Geschwindigkeit nach oben ($45\ m/s$) und am Ende des Wurfes die höchste Geschwindigkeit nach unten ($5\ m/s$).

Siehe auch: e-Funktionen 1
Aufgaben
Funktionenschar
Startseite