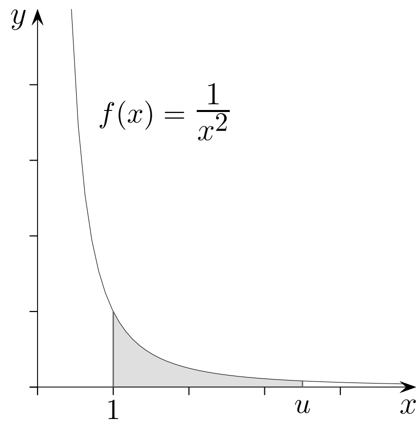
Uneigentliche Integrale

Bei den bisherigen Flächenberechnungen haben wir vorausgesetzt, dass der Integrationsbereich endlich ist.

Uneigentliche Integrale 1. Art

Betrachten wir eine Fläche unter dem Graphen von $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Die linke Grenze sei $x = 1$, nach rechts sei die Fläche unbegrenzt, das Flächenstück erstreckt sich ins Unendliche.



Um den Inhalt dieser Fläche zu ermitteln, integrieren wir die Funktion zunächst in den Grenzen von 1 bis u:

$$\int_1^u f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^u = -\frac{1}{u} + 1$$

Lassen wir die obere Grenze u gegen ∞ streben, so strebt der Integralwert offenbar gegen 1.

Allgemein legen wir fest:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx$$

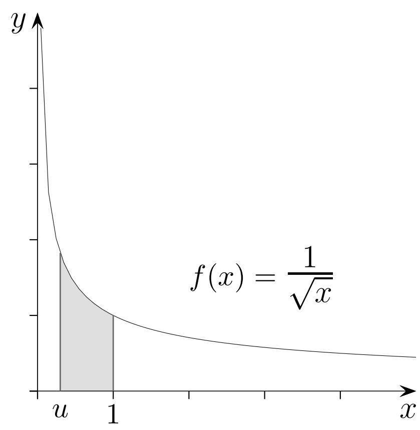
Der Grenzwert muss natürlich nicht existieren, dann existiert das uneigentliche Integral nicht.

Uneigentliche Integrale 2. Art

Betrachten wir nun die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ in den Grenzen von 0 bis 1. An der linken Grenze ist die Funktion nicht definiert, es liegt ein Pol (Unendlichkeitsstelle) vor.

Um den Inhalt dieser Fläche zu ermitteln, integrieren wir die Funktion zunächst in den Grenzen von u bis 1:

$$\int_u^1 f(x)\,dx = \left[2\cdot\sqrt{x}\right]_u^1 = 2 - 2\cdot\sqrt{u} \qquad \text{beachte: } \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$



Lassen wir die linke Grenze u gegen 0 streben, so strebt der Integralwert offenbar gegen 2.

Allgemein legen wir fest:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u\to a} \int_u^b f(x)\,dx$$

, falls $x = a$ nicht zum Definitionsbereich gehört.

Berechne:

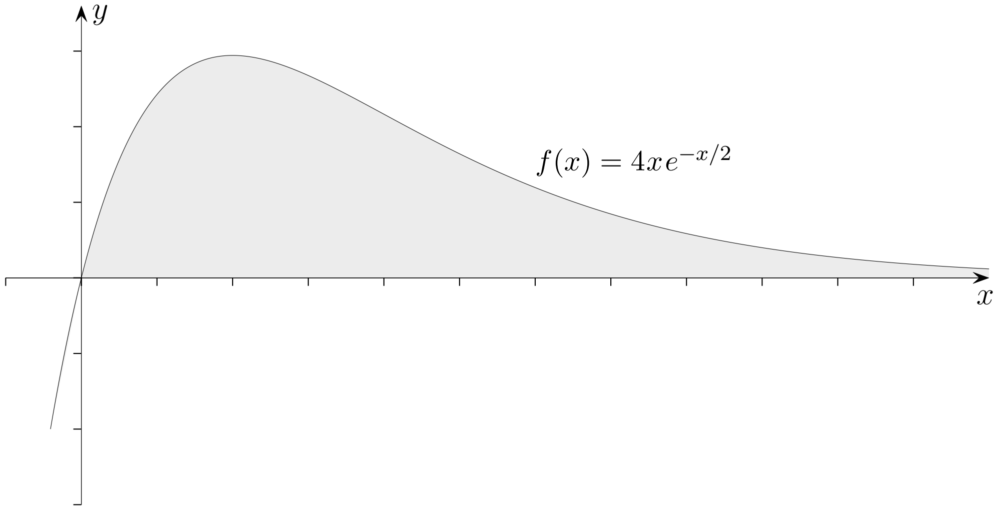
a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

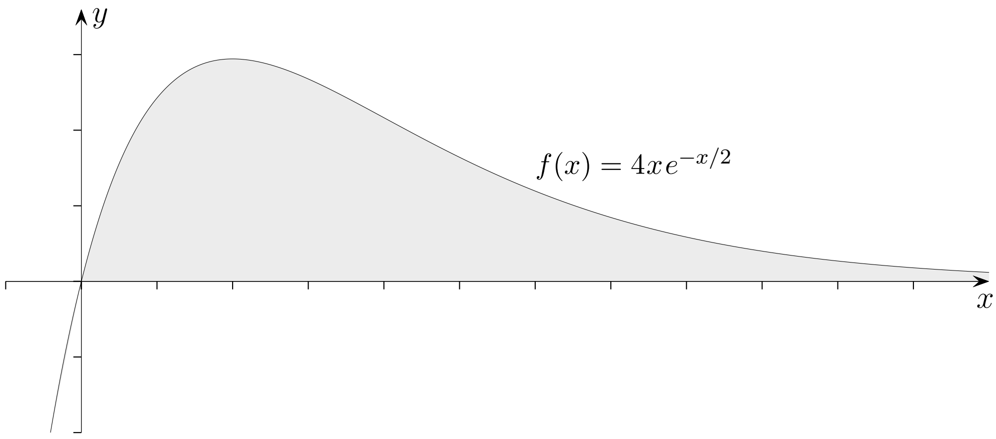
Lösungen:

1. a) 1

b) *existiert nicht*



$$\int_0^\infty f(x)\,dx = ?$$ Stammfunktion $F(x) = -8(x+2)e^{-x/2}$ Überprüfe das.



$$\int_0^\infty f(x)\,dx = ? \qquad \text{Stammfunktion } F(x) = -8(x+2)e^{-x/2} \qquad \text{Überprüfe das.}$$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_0^u f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} [-8(u+2)e^{-u/2}] - 8\cdot 2\cdot 1 = 16$$

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

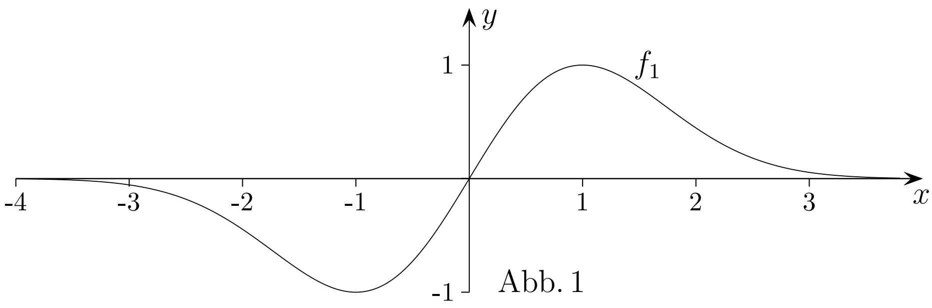


Abb. 1

Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:
Für jede Stammfunktion F_1 von f_1 und für jede reelle Zahl $u > 2022$ gilt:

$$F_1(u) - F_1(0) \approx \int_0^{2022} f_1(x)\,dx$$

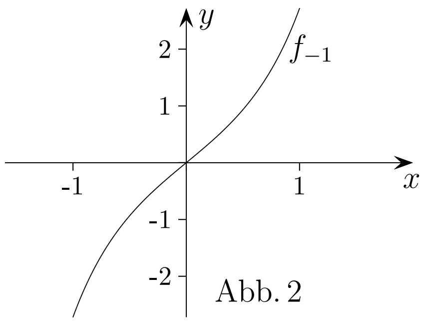


Abb. 2

Begründen Sie unter Verwendung der Abbildung 2, dass gilt:

$$\int_{-0,5}^{1} f_{-1}(x)\,dx = \int_{0,5}^{1} f_{-1}(x)\,dx$$

Abitur eA 2022 Ni

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

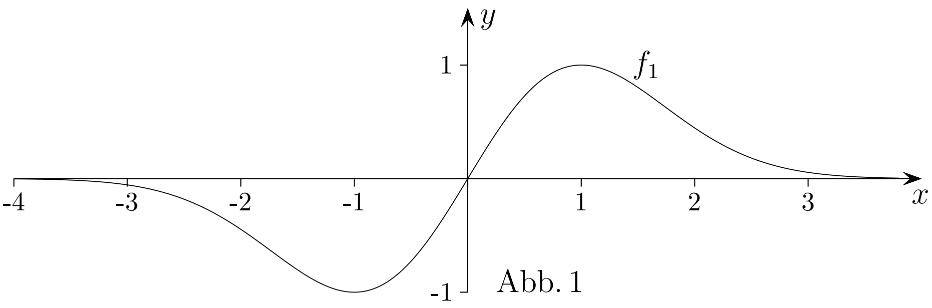


Abb. 1

Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:
Für jede Stammfunktion F_1 von f_1 und für jede reelle Zahl $u > 2022$ gilt:

$$F_1(u) - F_1(0) \approx \int_0^{2022} f_1(x)\,dx$$

Für jede reelle Zahl $u > 2022$ schließen der Graph von f_1, die x-Achse und die Gerade zu $x = u$ ein Flächenstück ein. Dessen Inhalt stimmt ungefähr mit dem Inhalt des Flächenstücks überein, das der Graph von f_1, die x-Achse und die Gerade zu $x = 2022$ einschließen.

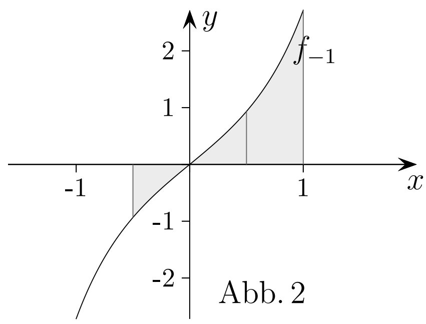


Abb. 2

Begründen Sie unter Verwendung der Abbildung 2, dass gilt:

$$\int_{-0{,}5}^{1} f_{-1}(x)\,dx = \int_{0{,}5}^{1} f_{-1}(x)\,dx$$

Die beiden Teilflächen, die der Graph von f_{-1} mit der x-Achse und den Geraden zu $x = -0{,}5$ und $x = 0{,}5$ einschließt, haben den gleichen Inhalt und liegen auf unterschiedlichen Seiten der x-Achse, da der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist. Also heben sich die Integrale gegenseitig auf und es bleibt nur der Inhalt der Teilfläche im Intervall $[0{,}5; 1]$ übrig.