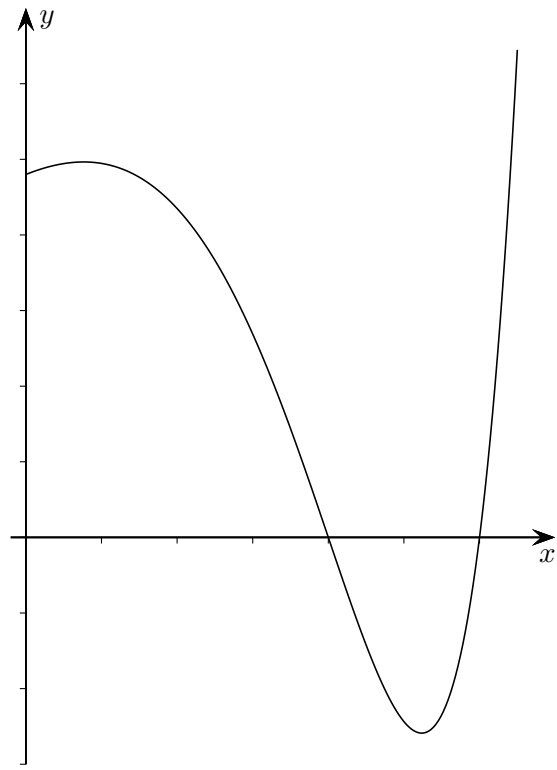


## Zu- und Abfluss

1. Stausee
2. Eimer
3. Zu- und Abfluss
4. Zu- und Abfluss Beispiel
5. Stündliche Abnahme
6. Zu- und Abfluss vereinfacht
7. Iteration, diskrete Zunahme
8. Iteration, diskrete Zunahme Genaueres
9. DGL  $f'(x) = kf(x) + b, f(0) = A$
10. Iteration, exponentielles Wachstum, diskrete Abnahme

Für den Anfang geeignet

## ↑ Stausee



Ein Stausee ändert seine Wassermenge. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt.

Die Zulaufratenfunktion ist gegeben durch  $f(x) = (x^2 - 10x + 24) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ ,  
 $0 \leq x \leq 6,5$ ,  $x$  in Tagen,  $f(x)$  in  $1000 \text{ m}^3$  pro Tag.

Eine negative Zulauftrate bedeutet, dass Wasser aus dem Stausee herausläuft.

- Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen das Wasser weder ein- noch abfließt.  
Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen Wasser zu- bzw. abläuft.
- Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Zulauftrate im betrachteten Intervall maximal ist.
- Welche Aussagen sind über die Änderung der Wassermenge zum Zeitpunkt  $x = 5$  möglich?
- Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die Zulauftrate am stärksten ändert.
- Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem sich im Becken wieder die Anfangswassermenge befindet.
- In dem Stausee hat sich eine bestimmte Bakteriensorte eingelagert. Zum Zeitpunkt  $x = 0$  befinden sich bereits 5000 Bakterien im Stausee. Die Wachstumsratenfunktion der Bakterien ist gegeben durch  $w(x) = x^3 - 12x^2 + 35x$ . Dabei wird  $x$  wieder in Tagen angegeben und  $w(x)$  in 10000 Bakterien pro Tag. Ermitteln Sie die Anzahl der Bakterien nach 3 Tagen.

## ↑ Stausee Ergebnisse

- a)  $x = 4, x = 6, \dots$
- b) Wegen  $f(0) = 24 < 24,826 < 32,238 = f(6,5)$  nimmt  $f$  sein absolutes Maximum auf dem Rand des Definitionsbereichs an, nämlich bei  $x = 6,5$ .
- c) Wegen  $f(5) = -12,182$  nimmt die Wassermenge zum Zeitpunkt  $x = 5$  stark ab. Wäre die Zulauftrate einen ganzen Tag lang so niedrig wie zum Zeitpunkt  $x = 5$ , würden  $12182 \text{ m}^3$  Wasser ablaufen.
- d) Aus  $f'(0) = 2, f'(4) = -14,778$  und  $f'(6,5) = 93,490$  ist ersichtlich, dass sich die Zulauftrate zum Zeitpunkt  $x = 6,5$  am stärksten ändert.
- e) Die Menge zufließenden Wassers wird repräsentiert durch die Flächen oberhalb der  $x$ -Achse, die Menge abfließenden Wassers durch die Fläche unterhalb der  $x$ -Achse. Da letztere ersichtlich wesentlich kleiner ist als die Fläche, die für den Zulauf im Intervall  $[0, 4]$  steht, wird die Anfangswassermenge nicht wieder erreicht.
- f) 702500 Bakterien

## ↑ Eimer

Ein Eimer, der am Boden ein Loch hat, wird durch einen konstanten Zufluss befüllt. Mit zunehmender Füllung steigt der Wasserdruck am Boden und damit auch der Wasserverlust. Die Wassermenge  $f_k$  (in Liter) im Eimer kann als Funktion der Zeit  $x$  (in Stunden) folgendermaßen beschreiben werden:

$$f_k(x) = k \cdot (e - e^{-x}), \quad k > 0$$

(Die Modellierung mit einem einzigen Parameter ist sehr verengt. Der Eimer ist zur Zeit  $x = 0$  nicht leer.)

- a) Untersuchen Sie die Funktionsschar für  $x \in \mathbb{R}$  (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptote) und skizzieren Sie zwei Vertreter der Schar. Kommentieren Sie auch die geometrische Beziehung der Scharcurven.
- b) Zeigen Sie, dass die Funktionen  $f_k$  eine DGL vom Typ  $f'(x) = af(x) + b$  erfüllen. Begründen Sie, dass die Funktionen jeweils beschränktes Wachstum beschreiben.
- c) Wie groß ist der konstante Zufluss?  
Was passiert langfristig, falls der Zulauf halbiert wird?
- d) Bestimmen Sie  $k$  für eine Anfangsmenge im Eimer von 6 Liter.
- e) Berechnen Sie für eine beliebige Anfangsmenge den Zeitpunkt, in der die Hälfte der Anfangsmenge hinzugekommen ist. Ist der Zeitpunkt von  $k$  abhängig?
- f) Ermitteln Sie für  $f_k$  die Tangenten an der Stelle  $x = 0$ . Haben diese Tangenten einen gemeinsamen Punkt?

## ↑ Eimer

Ein Eimer, der am Boden ein Loch hat, wird durch einen konstanten Zufluss befüllt. Mit zunehmender Füllung steigt der Wasserdruck am Boden und damit auch der Wasserverlust. Die Wassermenge  $f_k$  (in Liter) im Eimer kann als Funktion der Zeit  $x$  (in Stunden) folgendermaßen beschreiben werden:

$$f_k(x) = k \cdot (e - e^{-x}), \quad k > 0$$

(Die Modellierung mit einem einzigen Parameter ist sehr verengt. Der Eimer ist zur Zeit  $x = 0$  nicht leer.)

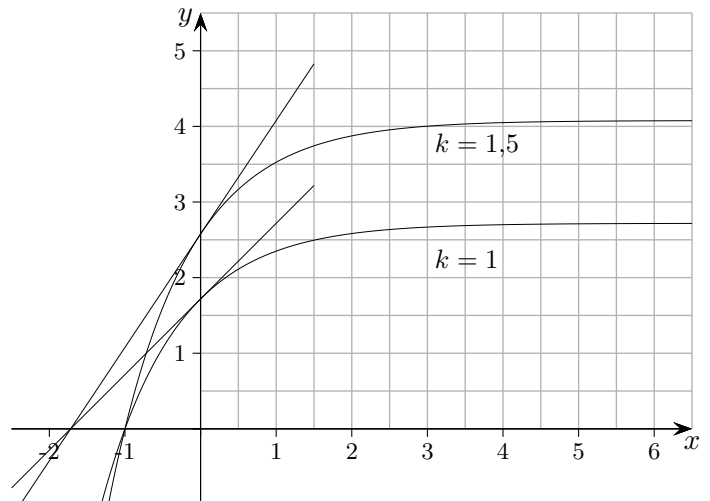
- a) Untersuchen Sie die Funktionsschar für  $x \in \mathbb{R}$  (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptote) und skizzieren Sie zwei Vertreter der Schar. Kommentieren Sie auch die geometrische Beziehung der Scharkurven.

Nullstelle  $x = -1$ , Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse  $S(0 | k(e - 1))$

keine Extrema und Wendepunkte

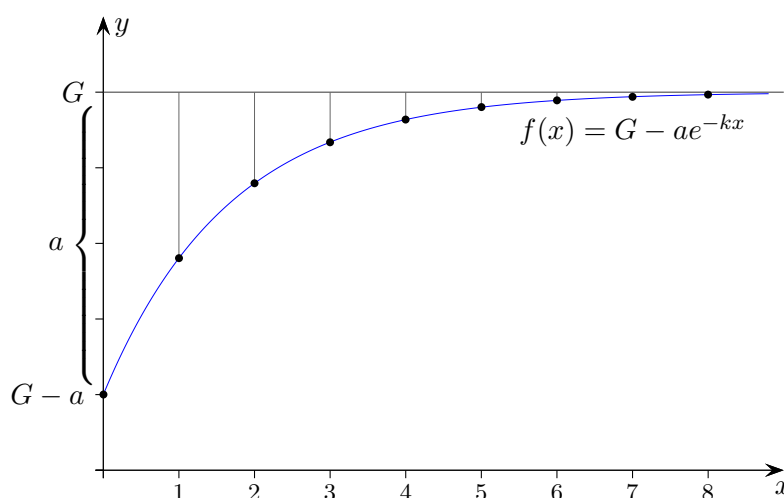
Asymptote  $y = k \cdot e$

Die Graphen gehen durch Streckung in  $y$ -Achsenrichtung auseinander hervor.



- b) Zeigen Sie, dass die Funktionen  $f_k$  eine DGL vom Typ  $f'(x) = af(x) + b$  erfüllen. Begründen Sie, dass die Funktionen jeweils beschränktes Wachstum beschreiben.  $a = -1, b = ke$
- c) Wie groß ist der konstante Zufluss?  $f'(-1) = b = ke$   
 $x = -1$  ist der (gedachte) Zeitpunkt, zu dem der Eimer noch leer war.  
 Was passiert langfristig, falls der Zulauf halbiert wird? Füllmenge halbiert sich.
- d) Bestimmen Sie  $k$  für eine Anfangsmenge im Eimer von 6 Liter.  $k = 3,5$
- e) Berechnen Sie für eine beliebige Anfangsmenge den Zeitpunkt, in der die Hälfte der Anfangsmenge hinzugekommen ist. Ist der Zeitpunkt von  $k$  abhängig?  $f_k(x) = 1,5 \cdot f_k(0), x = 1,96$  Stunden
- f) Ermitteln Sie für  $f_k$  die Tangenten an der Stelle  $x = 0$ .  $y = kx + k(e - 1)$   
 Haben diese Tangenten einen gemeinsamen Punkt?  $P(1 - e | 0)$

## ↑ Zu- und Abfluss



Die Änderungsrate  $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$  der Funktion des beschränkten Wachstums  $f(x) = G - ae^{-kx}$  lässt sich durch Auflösen der Klammern umformen zu  $f'(x) = -kf(x) + \underbrace{k \cdot G}_b$ .

Diese Form der Änderungsrate ermöglicht neue Anwendungen.

Wird ein undichter Behälter befüllt, so setzt sich die Änderung des Flüssigkeitsvolumens aus einem zum Bestand proportionalen Abfluss  $-kf(x)$ , aufgrund des Drucks proportional zur Füllhöhe bzw. zum Volumen, und einer konstanten Zuflussrate  $b$  zusammen. Das von der Zeit abhängige Flüssigkeitsvolumen wird durch  $f(x) = G - ae^{-kx}$  erfasst. Es liegt eine Situation vor, bei der sich ein exponentieller und ein linearer Prozess überlagern. Schauen wir uns dies für diskrete Zeitpunkte  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  an.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= G - ae^{-kx} \\
 f(n) &= G - ae^{-kn} && n = 0, 1, 2, 3, \dots \\
 f(n) &= G - a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n && \text{unter der Bedingung } e^{-k} = 1 - \frac{p}{100} \\
 f(n+1) &= \left(1 - \frac{p}{100}\right)f(n) + \frac{p}{100}G && \text{Dies soll gezeigt werden.} \\
 \dots & && f(n) \text{ einsetzen und umformen führt zu} \\
 &= G - a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^{n+1}
 \end{aligned}$$

$f(n+1)$  ergibt sich (exakt) aus  $f(n)$ , vermindert um den prozentualen Schwund  $\frac{p}{100}f(n)$ , zuzüglich eines konstanten Zuwachses  $b = \frac{p}{100}G$ .

$p$  ist mit  $k$  durch  $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$  verknüpft. Für die Grenze gilt  $G = \frac{b}{k}$ .

Beispiel:

Die tägliche Dosis eines Wirkstoffs (wird vom Blut aufgenommen) beträgt  $2\text{ mg}$ . Der Wirkstoff wird täglich zu  $40\%$  abgebaut. Zu Beginn der Beobachtung ist bereits  $1\text{ mg}$  des Wirkstoffs im Blut.

## ↑ Zu- und Abfluss

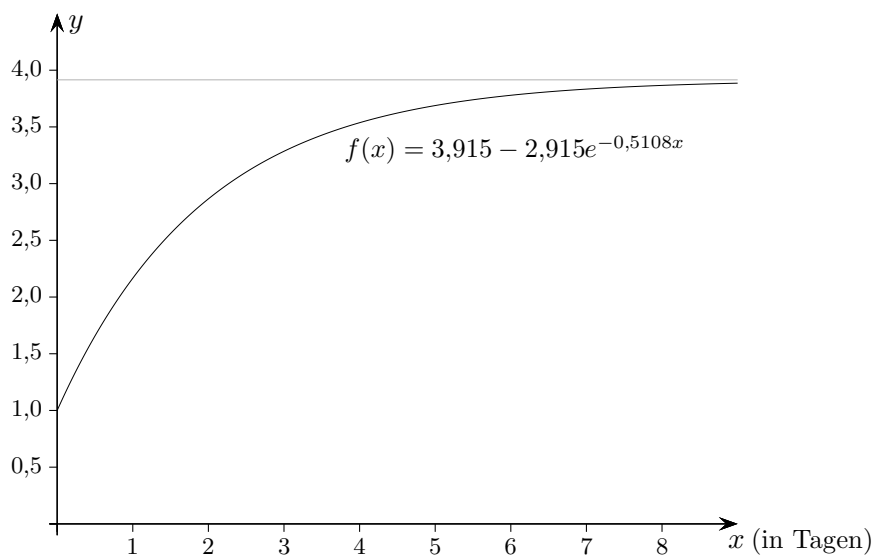
Die tägliche Dosis eines Wirkstoffs (wird vom Blut aufgenommen) beträgt 2 mg. Der Wirkstoff wird täglich zu 40% abgebaut. Zu Beginn der Beobachtung ist bereits 1 mg des Wirkstoffs im Blut.

$$f'(x) = -kf(x) + b \qquad k = -\ln(0,6) = 0,5108; \quad b = 2$$

$$f'(x) = k\left(\frac{b}{k} - f(x)\right) \qquad \text{Grenze } G = \frac{b}{k} = 3,915$$

$$f(x) = G - a e^{-kx} \qquad a = 2,915$$

$$f(x) = G - (G - f(0)) e^{-kx}$$



$$f'(x) = -kf(x) + b$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx -kf(x) + b$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) - kf(x)\Delta x + b\Delta x$$

In der Zeitspanne  $\Delta x$  erfolgt ein Zufluss von  $b\Delta x$ .  
Somit bezieht sich der Wert für  $b$  auf die Zeiteinheit.

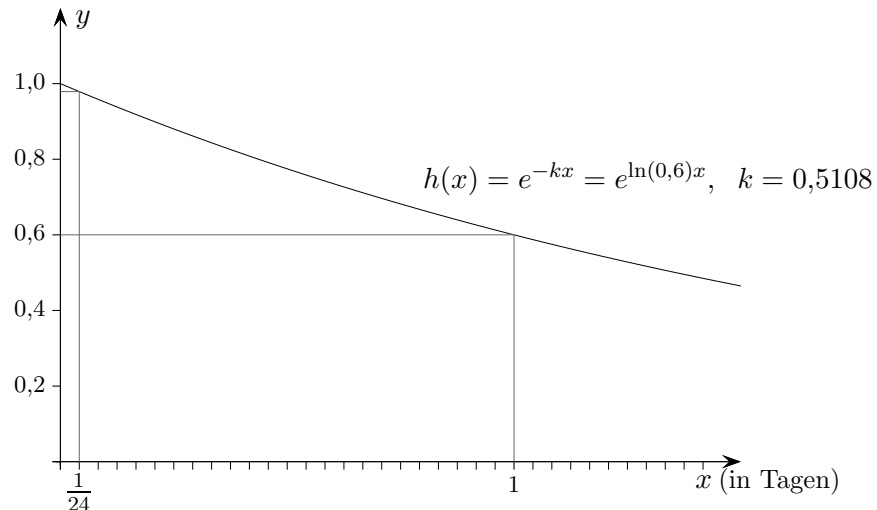
Bei einem Medikamentenabbau, der nur wenige Tage anhält, kann die Zeiteinheit soweit verkleinert werden, z. B. auf Stunden, dass  $k$  eine anschauliche Bedeutung gewinnt.

## ↑ Stündliche Abnahme

Die tägliche Dosis eines Wirkstoffs (wird vom Blut aufgenommen) beträgt  $2 \text{ mg}$ . Der Wirkstoff wird täglich zu  $40\%$  abgebaut. Zu Beginn der Beobachtung ist bereits  $1 \text{ mg}$  des Wirkstoffs im Blut.

$$f(x) = 3,915 - 2,915e^{-0,5108x}, \quad x \text{ in Tagen}$$

Wieviel Prozent werden stündlich abgebaut?



Antwort:  $1 - h\left(\frac{1}{24}\right) = 0,02106 = 2,1\%$

Die Funktion  $g$ , die die Wirkstoffmenge in Abhängigkeit von der Zeit (nun in Stunden) beschreibt, lautet:

$$g(x) = 3,915 - 2,915e^{-0,021x}, \quad x \text{ in Stunden}$$

$$g(x) = f\left(\frac{1}{24}x\right)$$

zugehörige DGL:

$$g'(x) = -k^* \cdot g(x) + m^*$$

$$k^* = \frac{-\ln(0,6)}{24} = \ln(1 - 0,021) = 0,021; \quad m^* = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$g'(x) = k^* \cdot \left(\frac{m^*}{k^*} - g(x)\right)$$

Grenze  $G = \frac{m^*}{k^*} = 3,915$



## ↑ Zu- und Abfluss vereinfacht

Die tägliche Dosis eines Wirkstoffs (wird vom Blut aufgenommen) beträgt  $2 \text{ mg}$ .  
Der Wirkstoff wird täglich zu  $40\%$  abgebaut.

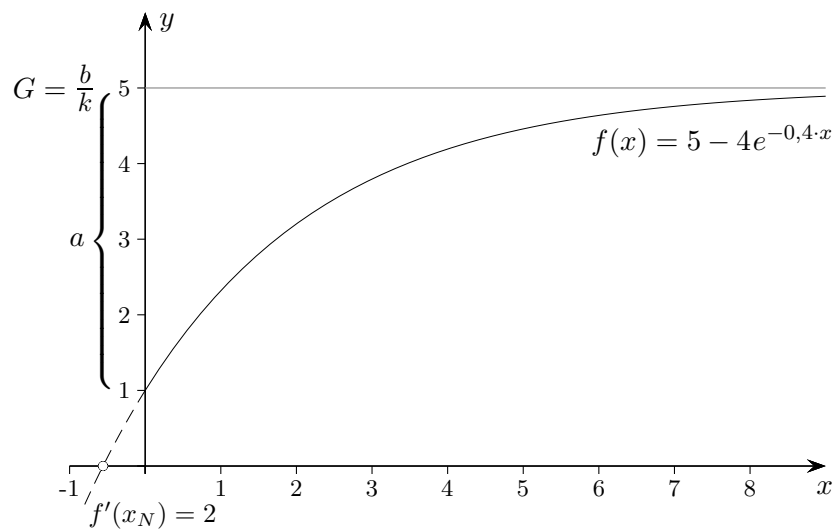
Für die Änderungsrate gilt:  $f'(x) = -0,4f(x) + 2$

$f'(x)$  strebt gegen Null, wenn  $f(x)$  gegen  $\frac{2}{0,4}$  strebt.

Die Grenze lautet daher  $G = \frac{2}{0,4} = 5$ , allgemein  $G = \frac{b}{k}$ .

$0,4G = 2$  bedeutet, dass sich Zu- und Abfluss ausgleichen.

Nun wird für die Lösungsfunktion  $f(x) = G - ae^{-kx}$  noch das  $a$  so angepasst, dass der Anfangsbestand  $G - a$  (zur Zeit  $x = 0$ ) der Aufgabenstellung entspricht. Hier ist die Anfangsbedingung  $f(0) = 1$ .



$f'(x_N) = -0,4f(x_N) + 2 = 2$  mit  $f(x_N) = 0$ .

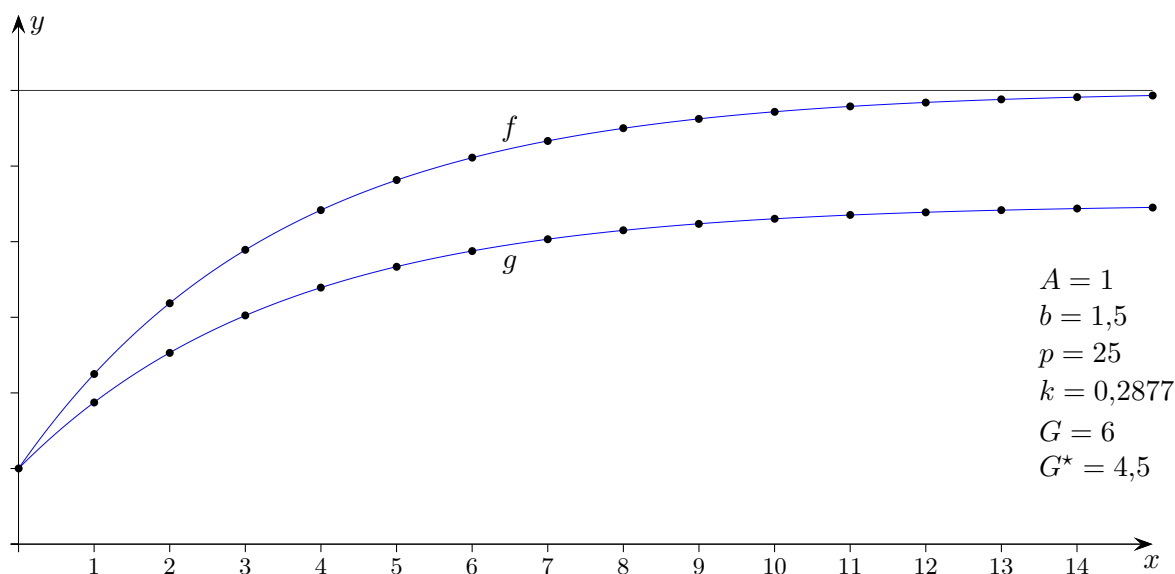
Der konstante Anteil  $b = 2$  der Änderungsrate (Zufluss) ist die Steigung von  $f$  in der Nullstelle.

## ↑ Iteration, diskrete Zunahme

Auf einem Acker werden jeden Monat  $b$  ME Dünger verteilt, von dem jede Woche  $p\%$  wieder abgebaut werden. Dieses Problem können wir diskret auffassen und nach einer auf  $\mathbb{N}$  definierten Funktion suchen, die das Geschehen modelliert. Mit unserem Kenntnisstand ist es eine Funktion der Form  $f(n) = G - ae^{-kn}$  mit der zugehörigen Iteration  $f(n+1) = (1 - \frac{p}{100})f(n) + b$ . Der Dünger wird hier jeweils am Ende des Monats verteilt. Wie sieht die Situation aus, falls dies jeweils am Monatsanfang erfolgt?

$$\begin{aligned}
 f(n) &= G - ae^{-kn} & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \\
 f(n) &= G - a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n & \text{unter der Bedingung } e^{-k} &= 1 - \frac{p}{100} \\
 f(n+1) &= \left(1 - \frac{p}{100}\right)f(n) + b & b &= \frac{p}{100}G, \quad f(0) = G - a \\
 \\
 g(n+1) &= \left(1 - \frac{p}{100}\right)(g(n) + b) & \text{neuer Ansatz, Düngung jeweils am Monatsanfang} \\
 &= \left(1 - \frac{p}{100}\right)g(n) + b^* & b^* &= \left(1 - \frac{p}{100}\right)b = \frac{p}{100}G^* \\
 g(n) &= G^* - a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n & G^* &= \frac{100}{p}\left(1 - \frac{p}{100}\right)b = \dots = G - b \\
 &= G^* - ae^{-kn}
 \end{aligned}$$

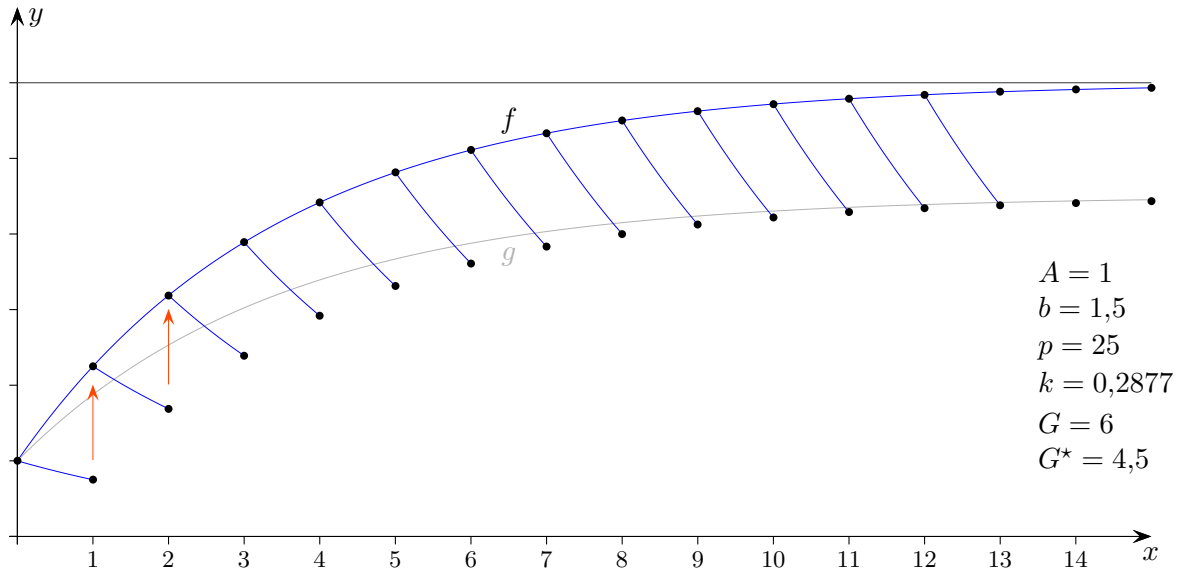
Der Anfangsbestand  $G - a$  soll unverändert bleiben.  
Damit gilt  $g(n) = G^* - (a - b)e^{-kn}$ ,  $G^* = G - b$ .



Mit einem Programm, das Tabellenkalkulation ermöglicht, wie z.B. GeoGebra, können die Iterationen  $f(n+1) = \dots$  und  $g(n+1) = \dots$  mit Werten für den Anfangsbestand  $A$ ,  $p$  und  $b$  durchgeführt werden. Es gibt dann Funktionen des begrenzten Wachstums  $f(x) = G - ae^{-kx}$  und  $g(x) = G^* - (a - b)e^{-kx}$ , mit denen die iterierten Werte exakt ermittelt werden können,  
 $G = \frac{100b}{p}$ ,  $a = G - A$ ,  $k = -\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ ,  $G^* = G - b$ .

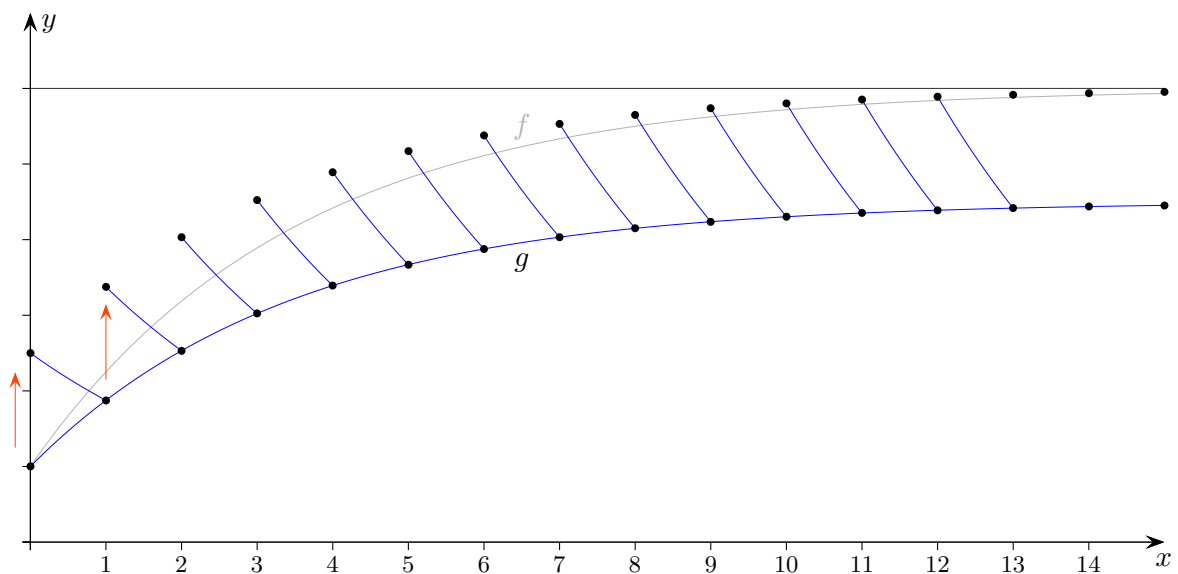
↑ Iteration, diskrete Zunahme Genaueres

Düngung am Monatsende,  $f(n+1) = (1 - \frac{p}{100})f(n) + b$ ,  $A = f(0)$



In der Grafik auf der vorigen Seite ist nicht der **ruckartige Anstieg** der Düngermenge am Ende bzw. Anfang des Monats und der exponentieller Abbau im Verlaufe des Monats zu sehen. Die Grafiken auf dieser Seite vermitteln einen genaueren Blick auf die Düngungsprozesse. Mit der Zeit findet erwartungsgemäß eine Angleichung statt. Für diese Überlegungen finden sich viele Anwendungen.

Düngung am Monatsanfang,  $g(n+1) = (1 - \frac{p}{100})(g(n) + b)$ ,  $A = g(0)$



↑ DGL  $f'(x) = kf(x) + b, f(0) = A$

$f'(x) = kf(x) + b$   $kf(x)$  exponentieller Anteil,  $b$  linearer Anteil

$f(x) = (A + \frac{b}{k})e^{kx} - \frac{b}{k}$   $f(0) = A$

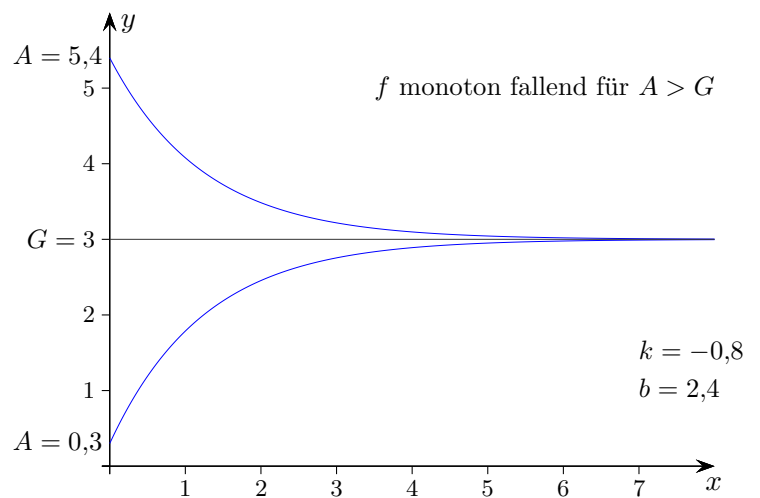
Die Lösung  $f$  kann durch Ableiten und Einsetzen verifiziert werden.

Für  $k < 0, b > 0$  ist das der Zu- und Abfluss-Prozess.

Für  $k > 0, b < 0$  liegt ein exponentielles Wachstum mit linearer Abnahme vor, z.B. fortwährender Ernte. Eine Fischpopulation wächst exponentiell, sie wird jedoch durch andauerndes Angeln dezimiert. Die langfristige Entwicklung kann vom Anfangsbestand abhängen.

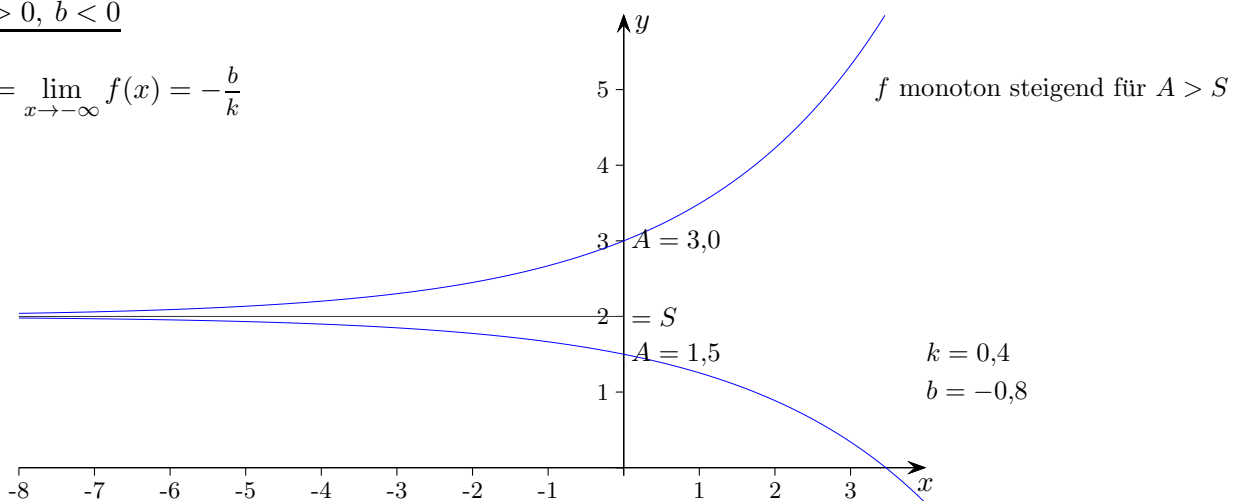
$k < 0, b > 0$

$G = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{b}{k}$



$k > 0, b < 0$

$S = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{b}{k}$



Falls nur die Vorzeichen von  $k$  und  $b$  gewechselt werden, liegt bei gleichem  $A$  Achsensymmetrie vor.

## ↑ Iteration, exponentielles Wachstum, diskrete Abnahme

Untersuchen wir ein exponentielles Wachstum, z.B. von Algen (in ME), bei dem die Ernte jeweils am Ende des Jahres erfolgt.

$$f'(x) = kf(x) - b$$

$kf(x)$  exponentieller Anteil,  $b$  linearer Anteil

$$f(x) = \left(A - \frac{b}{k}\right)e^{kx} + \frac{b}{k}$$

$$f(0) = A, \quad k = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

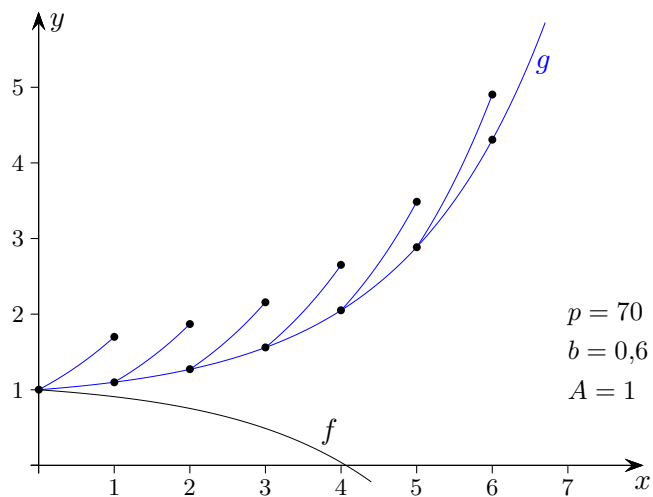
iterativ

$$g(n+1) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)g(n) - b$$

$$g(0) = A$$

$$g(n) = \left(A - \frac{100b}{p}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n + \frac{100b}{p}$$

Die explizite Darstellung von  $g(n)$  kann durch Einsetzen in die Iterationsgleichung verifiziert werden.



Dass die Verläufe voneinander abweichen, war zu erwarten.

Hier führen beide Modellierungen zu gänzlich unterschiedlichen Verläufen.

Tropfinfusion, Bevölkerungsschwund  
Startseite