Aufgaben   Analysis

1. Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch $f_k(x) = -\frac{k}{3}x^3 + 2k^2x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

   a) Untersuchen Sie die Graphen von f_k auf Symmetrie,
   Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.
   Zeichnen Sie die Graphen von f_1 und $f_{\frac{1}{2}}$ in dasselbe Koordinatensystem.

   b) Untersuchen Sie, ob es Parameterwerte k_1 und k_2 gibt, so dass sich die zugehörigen Graphen im Ursprung rechtwinklig schneiden.

   c) Bestimmen Sie die Stellen x der lokalen Extrema, an denen die Funktionswerte von $f_1(x)$ und $f_{\frac{1}{2}}(x)$ maximalen Abstand haben. (Notwendige Bedingung genügt.)

2. Das Höhenwachstum (in m) einer Pflanze ist gegeben durch $f(x) = \dfrac{3}{1 + e^{5-x}}\,, \quad x \geq 0.$

   a) Untersuchen Sie die Funktion, auch auf Monotonie und Krümmung.
   Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

   (Zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{3e^{5-x}}{(1 + e^{5-x})^2}$ *)*

   b) Errechnen Sie die Zeit *(x Zeit in Jahren)*, die eine Pflanze benötigt, um eine Höhe von $1\,m$ zu erreichen.

   c) Skizzieren Sie die Graphen von f'.

   d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f' mit der positiven x-Achse einschließt.

Lösungen:

1. a) <u>Symmetrie:</u> Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da
$f(-x) = -f(x)$. Es liegen nur ungerade Exponenten vor.

<u>Nullstellen:</u> $N_1(\,0 \mid 0\,)$, $N_{2/3}(\,\pm\sqrt{6k} \mid 0\,)$,

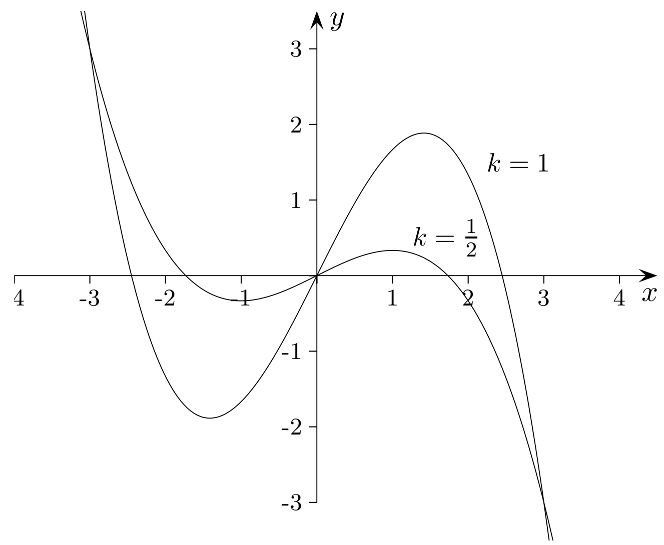
<u>Extrema:</u> $Min(\,-\sqrt{2k} \mid -\frac{4}{3}k^2\sqrt{2k})$, $Max(\,\sqrt{2k} \mid \frac{4}{3}k^2\sqrt{2k})$

$$f_k'(x) = -kx^2 + 2k^2, \quad f_k''(x) = -2kx$$

<u>Wendepunkt:</u> $W(\,0 \mid 0)$

b) $f_{k_1}'(0) = 2k_1^2$, $f_{k_2}'(0) = 2k_2^2$, $2k_1^2 \cdot 2k_2^2 = -1$, für keine Parameterwerte erfüllbar,

c) $d(x) = f_1(x) - f_{\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x$, notw. Bedingung: $d'(x) = 0$, $x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$



2. a) <u>Nullstellen:</u> keine

<u>Extrema:</u> keine, stets gilt: $f'(x) > 0$, f monoton steigend

<u>Verhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$</u> $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

<u>Wendepunkte:</u> $f''(x) = \dfrac{-3\,e^{5-x} + 3\,e^{2(5-x)}}{(1+e^{5-x})^3}$

Krümmung: f für $x < 5$ linksgekrümmt, f für $x > 5$ rechtsgekrümmt, $W\left(5 \mid \frac{3}{2}\right)$

b) $x = 4{,}3$ Jahre

c) siehe Graph

d) $\displaystyle\int_0^\infty f'(x)\,dx = \left[\frac{3}{1+e^{5-x}}\right]_0^\infty = 3 - \frac{3}{1+e^5}$