Doppelintegral

Durch die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\quad 0 \le x \le 1$ und $0 \le y \le 1$ ist ein Körper festgelegt, dessen Volumen wir berechnen wollen.
Hierzu ist die Querschnittsfläche $Q(y)$ nach y zu integrieren. Die Querschnittsfläche $Q(y)$ an der Stelle y ist die Fläche unter dem Graphen von $f(x,y) = x^2 + y^2$ für ein festes y.
Es gilt daher:

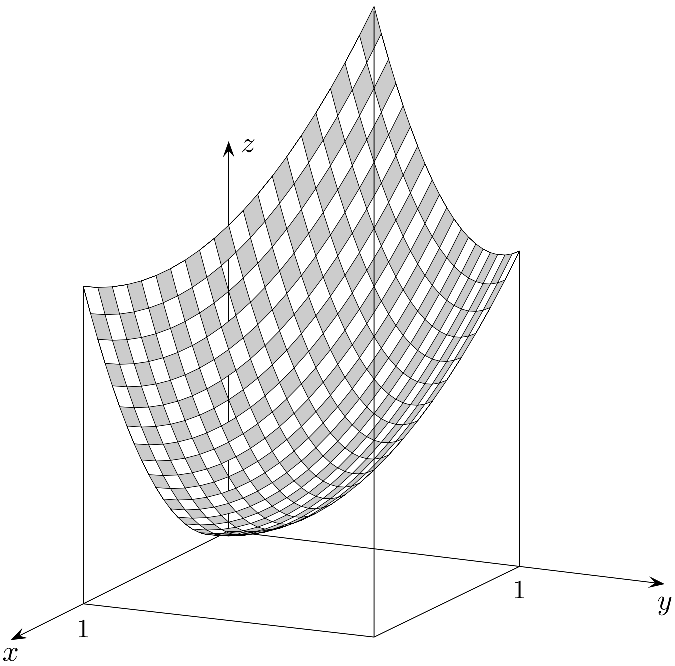
$$Q(y) \; = \; \int_0^1 f(x,y)\; dx \; = \; \int_0^1 (x^2 + y^2)\; dx \; = \; \Big[\tfrac{1}{3}x^3 + y^2 x\Big]_0^1 \; = \; \tfrac{1}{3} + y^2$$

Das Volumen beträgt daher:

$$V \; = \; \int_0^1 Q(y)\; dy \; = \; \int_0^1 (\tfrac{1}{3} + y^2)\; dy \; = \; \Big[\tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{3}y^3\Big]_0^1 \; = \; \tfrac{2}{3}$$

Das Volumen wird kurz als Doppelintegral geschrieben:

$$V \; = \; \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\; dx\; dy$$



Rechne aus

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y)\;\; dx\; dy$

b) $\displaystyle\int_3^4 \int_0^2 (2x + 3y)\;\; dx\; dy$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (xy + y^2)\;\; dx\; dy$

d) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^2 e^{x+y}\;\; dx\; dy$

Ergebnisse:

a) $\frac{14}{3}$

b) 25

c) $\frac{7}{12}$

d) $e^4 - 2e^3 + e^2$