Aufgaben 1 Analysis und Vektorrechnung

1. Eine Funktion f_k ist gegeben durch $f_k(x) = x - \dfrac{k}{x^2}$, $x \neq 0$.

   a) Untersuchen Sie für $k > 0$ die Graphen von f_k auf Symmetrie, Nullstellen und Extrema.

   b) Skizzieren Sie den Graphen von f_1.

   c) Wie lautet das unbestimmte Integral von f_k ?

2. Gegeben sind die Punkte $A(-1\,|\,-4\,|\,2)$, $B(-2\,|\,1\,|\,-3)$ und $C(1\,|\,-4\,|\,-4)$.

   a) Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene E, die durch A, B und C geht.

   b) Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$

   Für welches a verläuft die Gerade g senkrecht zur Ebene E, und für welches a parallel zur Ebene E?

3. Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch $f_k(x) = kx^4 - k^2\,x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

   a) Untersuchen Sie die Graphen von f_k auf Symmetrie, Nullstellen und Extrema.

   b) Zeichnen Sie die Graphen von f_1 und $f_{\frac{1}{2}}$ in dasselbe Koordinatensystem.

Aufgaben 1 Analysis und Vektorrechnung

1. Eine Funktion f_k ist gegeben durch $f_k(x) = x - \frac{k}{x^2}$, $x \neq 0$.

   a) Untersuchen Sie für $k > 0$ die Graphen von f_k auf Symmetrie, Nullstellen und Extrema.

   b) Skizzieren Sie den Graphen von f_1.

   c) Wie lautet das unbestimmte Integral von f_k ?

2. Gegeben sind die Punkte $A(-1\,|\,-4\,|\,2)$, $B(-2\,|\,1\,|\,-3)$ und $C(1\,|\,-4\,|\,-4)$.

   a) Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene E, die durch A, B und C geht.

   b) Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$

   Für welches a verläuft die Gerade g senkrecht zur Ebene E, und für welches a parallel zur Ebene E?

3. Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch $f_k(x) = kx^4 - k^2\,x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

   a) Untersuchen Sie die Graphen von f_k auf Symmetrie, Nullstellen und Extrema.

   b) Zeichnen Sie die Graphen von f_1 und $f_{\frac{1}{2}}$ in dasselbe Koordinatensystem.

Lösungen:

1. a) keine Symmetrie, $N\left(\sqrt[3]{k}\,|\,0\right)$, $f_k'(x) = \frac{x^3 + 2k}{x^3}$, $f_k''(x) = -\frac{6k}{x^4}$, $Max\left(-\sqrt[3]{2k}\,|\,-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2k}\right)$

b) $k = 1$: $N(1\,|\,0)$, $Max(-1{,}3\,|\,-1{,}9)$

c) $\int (x - \frac{k}{x^2})\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{k}{x} + C$

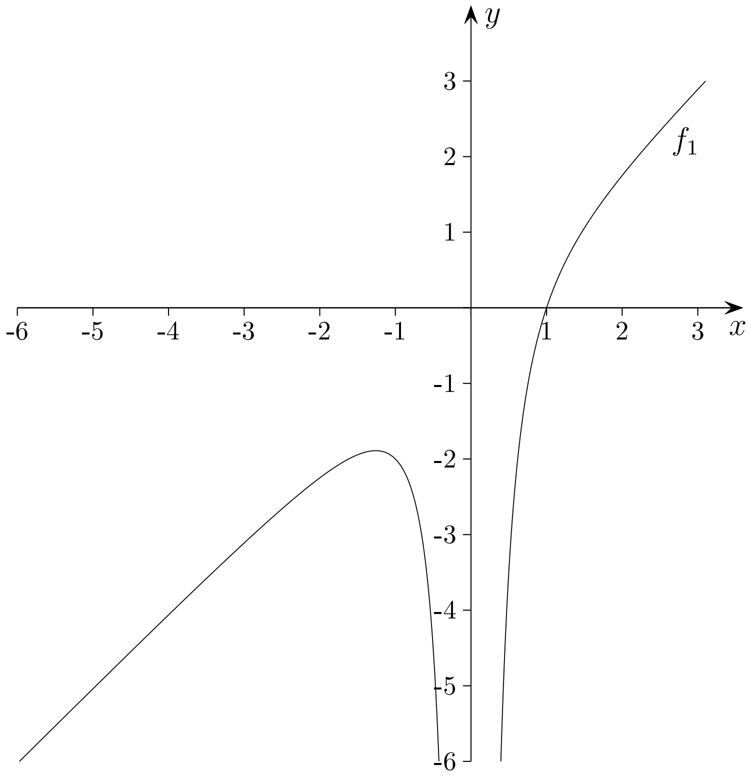
2. a) E: $\begin{pmatrix} -15 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 37 = 0$ *Achte auf die Schreibweise:* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ *usw.*

b) senkrecht für: $a = \frac{8}{5}$, *parallel für* $a = -\frac{50}{8}$

3. a) Graph achsensymmetrisch, da nur gerade Exponenten, es gilt: $f(x) = f(-x)$
$N(0\,|\,0)$, $N_{2/3}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right)$, $Max(0\,|\,0)$, $Min_{1/2}\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2k}\,|\,-\frac{1}{4}k^3\right)$

b) $k = 1$: $N_1(0\,|\,0)$, $N_{2/3}(\pm 1\,|\,0)$, $Max(0\,|\,0)$, $Min_{1/2}(\pm 0{,}7\,|\,-0{,}25)$
$k = \frac{1}{2}$: $N_1(0\,|\,0)$, $N_{2/3}(\pm 0{,}71\,|\,0)$, $Max(0\,|\,0)$, $Min_{1/2}(\pm 0{,}5\,|\,-0{,}031)$

1.



3.