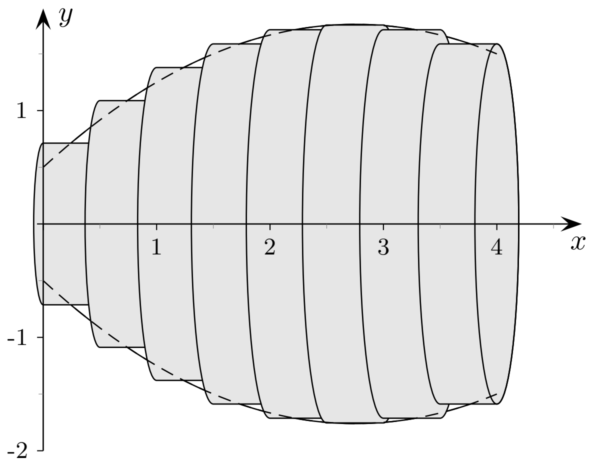
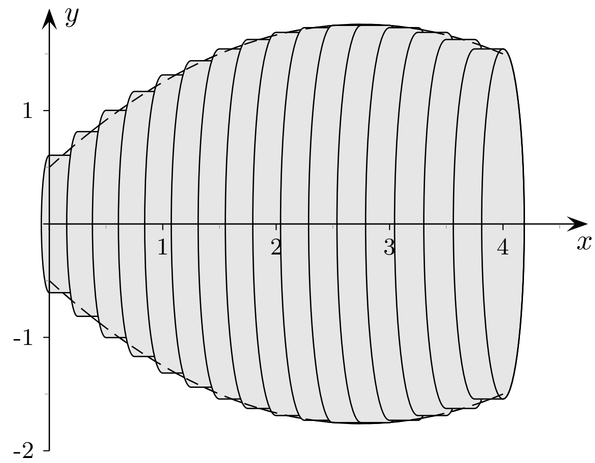
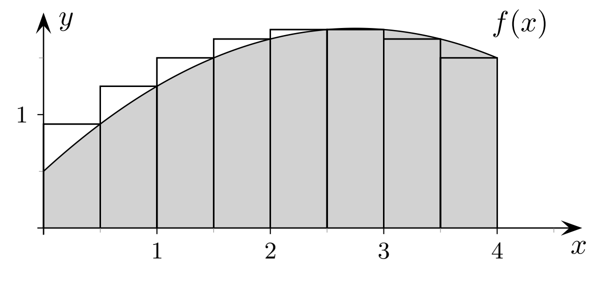
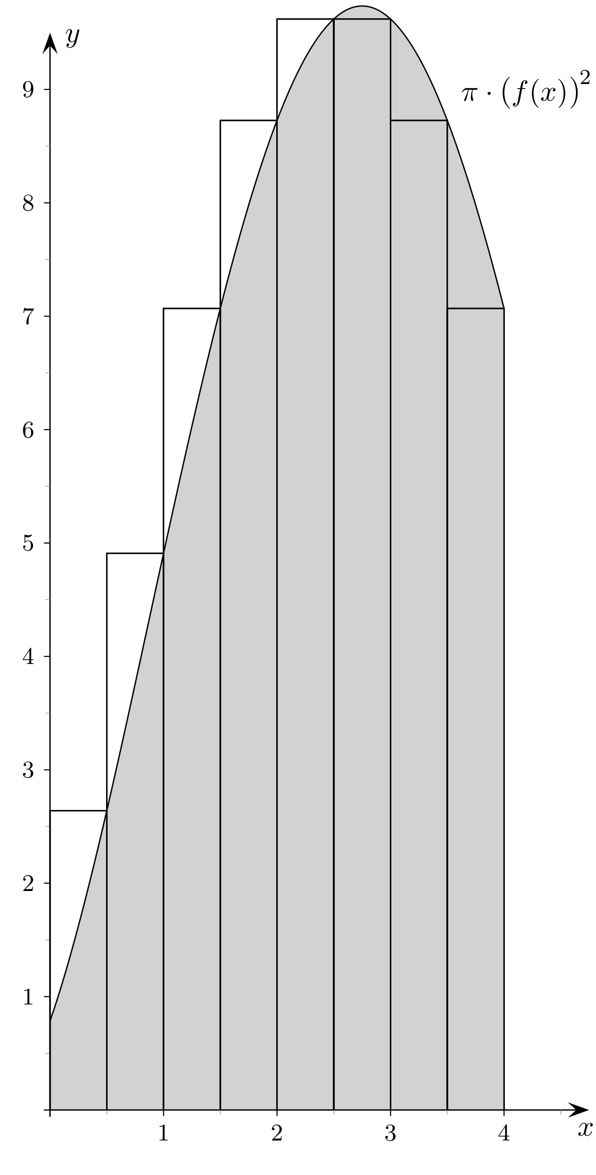
Rotationsvolumen









Rotationsvolumen

Begründen Sie den Satz:

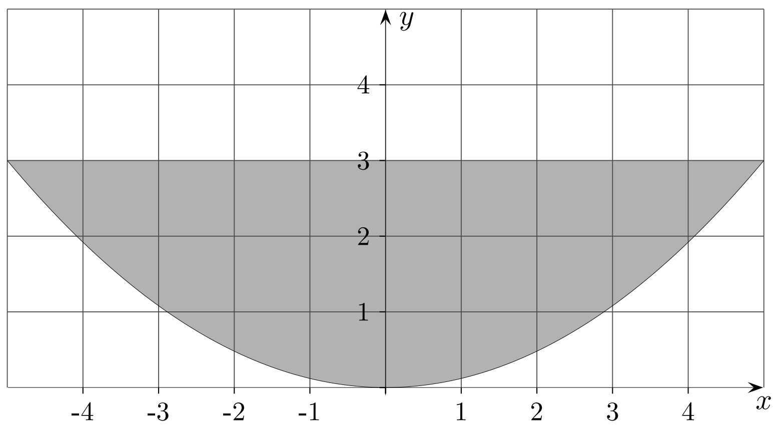
Rotiert der Graph einer Funktion f (differenzierbar, nicht negativ) über einem Intervall $[a, b]$ um die x-Achse, so beträgt das Volumen des Rotationskörpers:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \big(f(x)\big)^2 \, dx$$

Tipp: Welche anschauliche Bedeutung hat die Funktion $x \longrightarrow \pi \cdot \big(f(x)\big)^2$?
Betrachten Sie das Volumen einer Zylinderscheibe und die zugehörige Rechteckfläche.
Statt die Volumen der Zylinderscheiben zu summieren, kann ...?

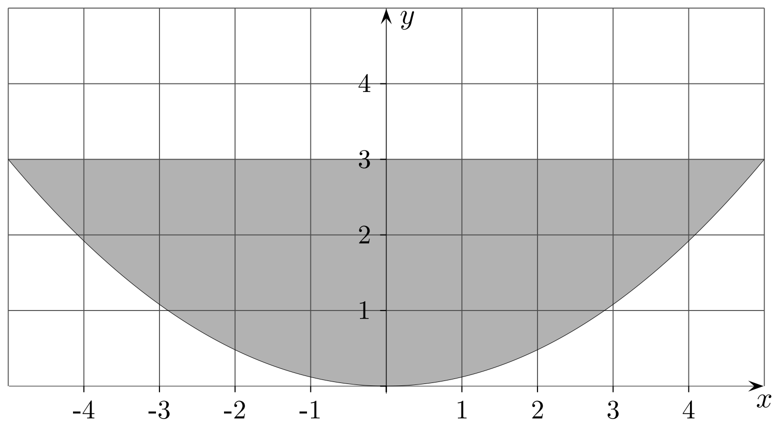
1. Ermitteln Sie für die (auf der vorigen Seite verwendete) Funktion $f(x) = -\frac{1}{6}x(x - 5{,}5) + 0{,}5$ das Volumen des Rotationskörpers, $I = [0, 4]$.

2. Bestimmen Sie mit der Volumenformel für Rotationskörper das Volumen eines Kegels (Höhe h, Grundkreisradius r) und das einer Kugel (Radius r).

3. 

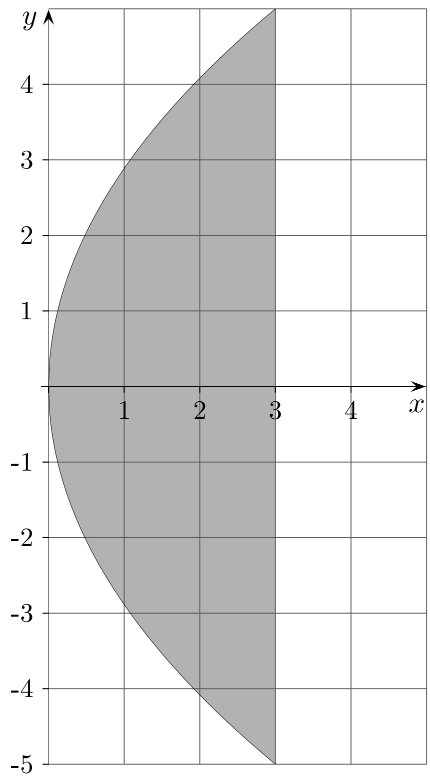
   Die farbige Fläche rotiere um die y-Achse.
   Ermitteln Sie das Rotationsvolumen.

Rotationsvolumen



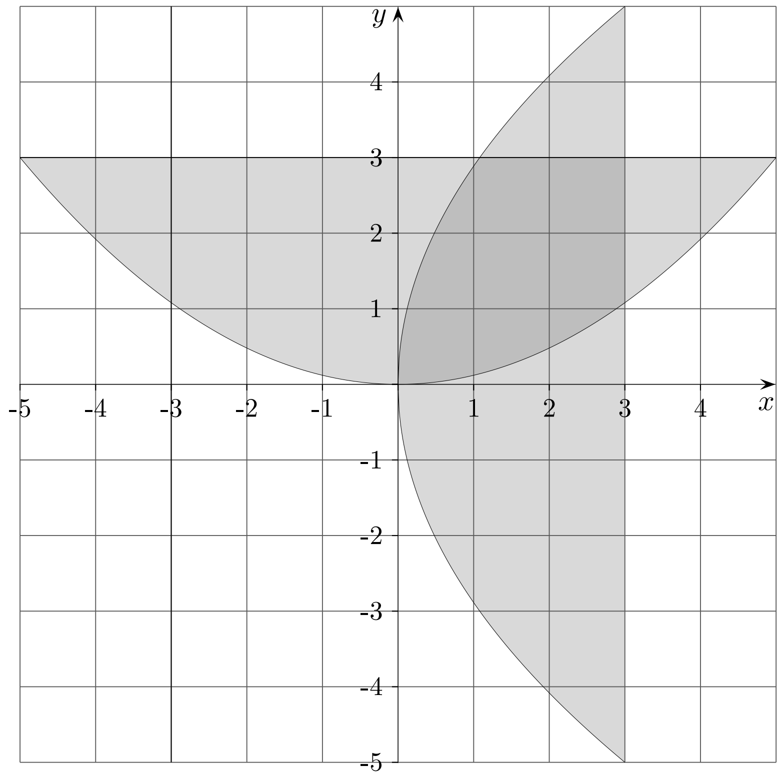
Die farbige Fläche rotiere um die y-Achse.
Ermitteln Sie das Rotationsvolumen.

Die Parabelgleichung lautet: $y = \dfrac{3}{25}x^2$.



Die Formel für das Rotationsvolumen bezieht sich auf die Rotation um die x-Achse.

Rotationsvolumen



Eine Vertauschung von x und y bewirkt eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

Aus $y = \frac{3}{25}x^2$ erhalten wir $x = \frac{3}{25}y^2$.

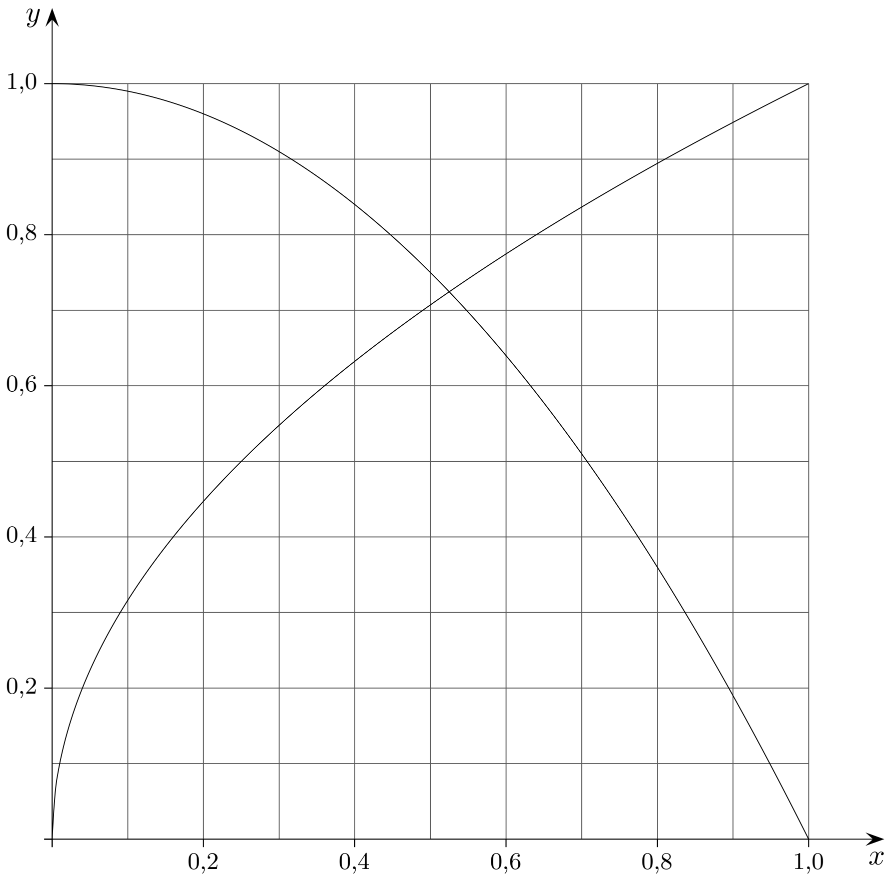
Für die Auflösung nach y ergeben sich die beiden Möglichkeiten: $y = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}\sqrt{x}$

Dies sind die beiden Zweige der Funktionsgraphen oberhalb und unterhalb der x-Achse.

Genauer ist $f^{-1}(x) = \frac{5}{\sqrt{3}}\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{3}{25}x^2$, begrenzt auf den Definitionsbereich $\mathbb{D} = [0; 5]$, entsprechend ist

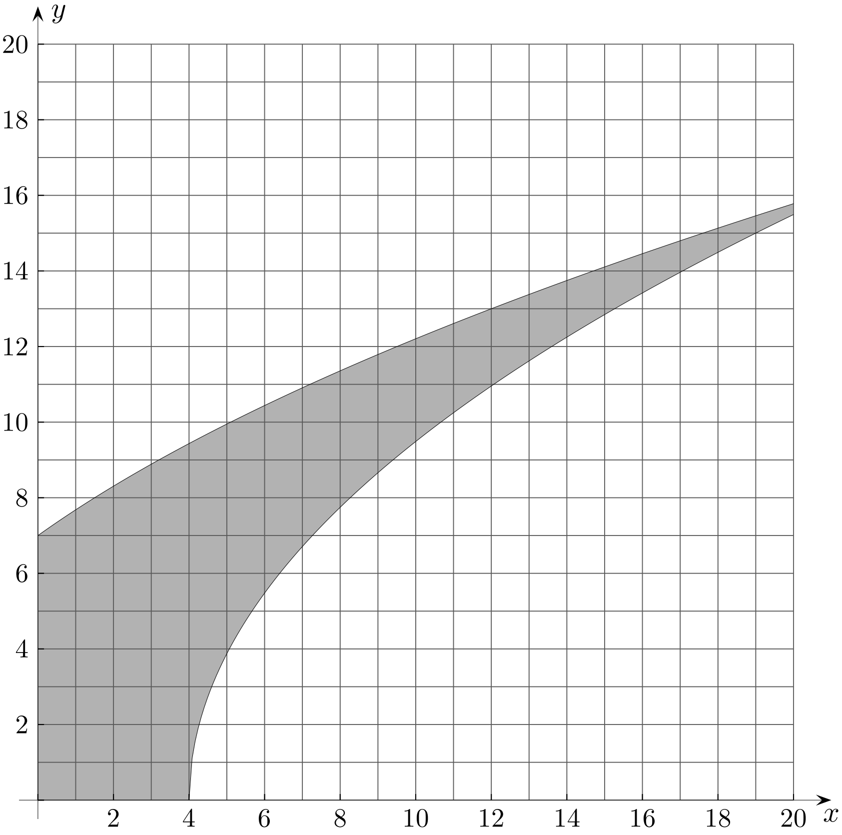
$g^{-1}(x) = -\frac{5}{\sqrt{3}}\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von $g(x) = \frac{3}{25}x^2$, begrenzt auf den Definitionsbereich $\mathbb{D} = [-5; 0]$.

Rotationsvolumen



Gegeben sind auf dem Intervall $[0, 1]$ die Funktionen $f(x) = 1 - x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$.
Berechnen Sie die Flächeninhalte, die die Graphen mit der x-Achse einschließen, sowie die Volumina, die sich durch Rotation der Graphen um die x-Achse ergeben.

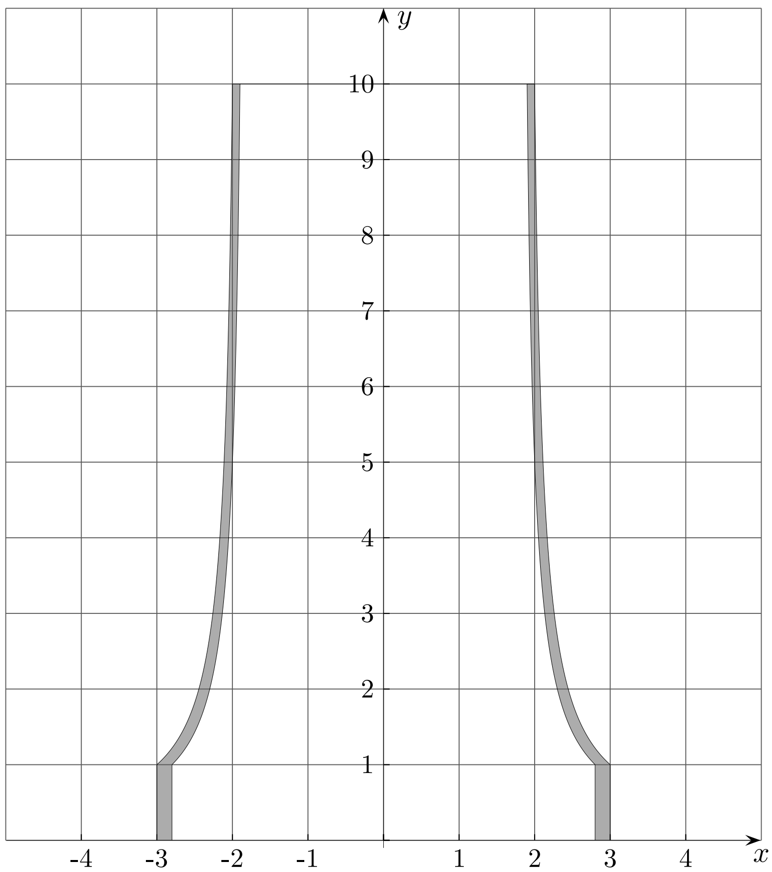
Rotationsvolumen



Gegeben sind auf dem Intervall $[0, 20]$ die Funktion $f(x) = \sqrt{10x + 49}$
und auf $[4, 20]$ die Funktion $g(x) = \sqrt{15x - 60}$.

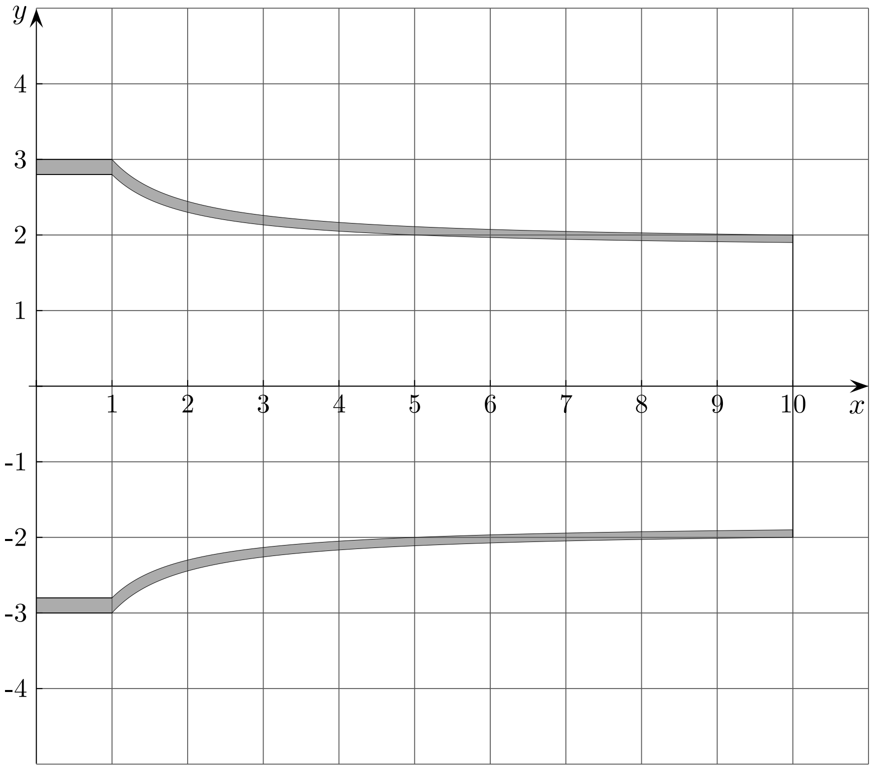
Die Graphen schließen mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht.

Kühlturm



Der krummlinige Teil der Kühlturmwand (1. Quadrant) wird außen durch die Funktion $f(x) = \frac{10}{9x-17}$ und innen durch $g(x) = \frac{10}{10x-18}$ beschrieben, $1\,LE = 5\,m$.
Der rotationssymmetrische Kühlturm verfügt über einen ringförmigen Sockel.
Ermitteln Sie die Wandstärke des Sockels sowie das gesamte Wandvolumen.

Kühlturm



Ergebnisse

Farbige (orange) Fläche, Rotation um die y-Achse

$g^{-1}(x) = \frac{5}{3}\sqrt{3x}$

$V = 117{,}810\ VE$

Farbige (blau) Fläche, Rotation um die x-Achse

$V = 3330{,}09\ VE$

Kühlturm

$f^{-1}(x) = \frac{17x+10}{9x}$

$g^{-1}(x) = \frac{9x+5}{5x}$

$V_{\text{Sockel}} = 3{,}644\, VE$

$V_{\text{gesamt}} = 17{,}901\, VE$