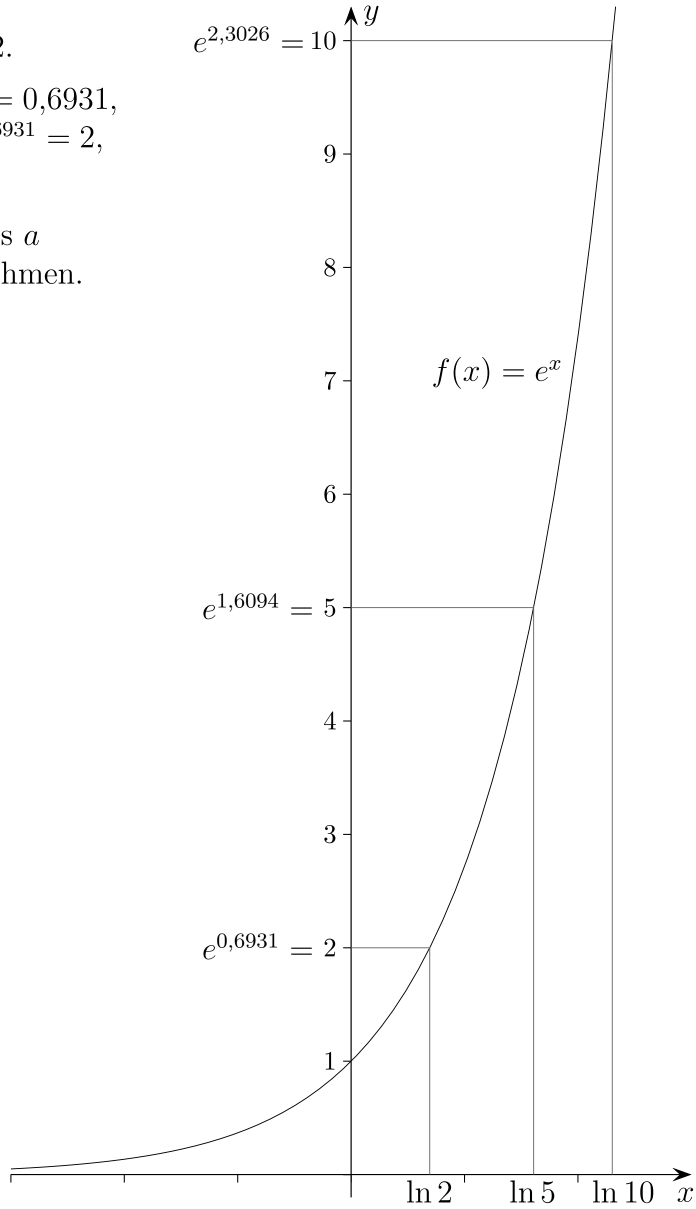
Natürlicher Logarithmus

Die Lösung der Gleichung $e^x = 2$ ist $x = \ln 2$.

Der natürliche Logarithmus von 2, kurz $\ln 2 = 0{,}6931$, ist also ein Exponent, für den gilt: $e^{\ln 2} = e^{0{,}6931} = 2$, allgemein: $e^{\ln x} = x$.

Werden (positive) Zahlen als Potenz zur Basis a dargestellt, so heißen die Exponenten Logarithmen.

$$\begin{aligned} e^{4x} &= 8 \cdot e^{x+1} \\ e^{4x} &= 8 \cdot e^{x} \cdot e \\ e^{3x} &= 8 \cdot e \\ 3x &= \ln(8 \cdot e) \\ x &= 1{,}026 \end{aligned}$$



$\ln 2 + \ln 5 = \ln(2 \cdot 5) = \ln 10$

Die *Logarithmenregeln* lauten:
(Es sind die Regeln für die Exponenten in der Potenzrechnung bei fester Basis.)

a) $\ln ab = \ln a + \ln b$

b) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

c) $\ln a^n = n \cdot \ln a \qquad a,\ b\ >\ 0$

$e^{\ln 2 + \ln 3} = e^{\ln 2} \cdot e^{\ln 3} = 2 \cdot 3 = 6 = e^{\ln 6}$

$\Longrightarrow \qquad \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$

Beachte:
$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$

Löse die Gleichungen:

a) $e^{2x} = 8$ b) $e^x = 2 \cdot e^{2x-1}$

c) $4e^x - e^{3x} = 0$ d) $e^{-x} = 3 \cdot e^{x-2}$

e) $\ln(x+1) = 2$ f) $e^{2x} - e^x = 1$

Vereinfache $e^{1+\frac{1}{2}\ln a}$

Natürlicher Logarithmus

Löse die Gleichungen:

a) $e^{2x} = 8$ b) $e^{x} = 2 \cdot e^{2x-1}$

c) $4e^{x} - e^{3x} = 0$ d) $e^{-x} = 3 \cdot e^{x-2}$

e) $\ln(x+1) = 2$ f) $e^{2x} - e^{x} = 1$

Vereinfache $e^{1+\frac{1}{2}\ln a}$

Lösungen:

a) $x = 1{,}0397$ b) $x = 0{,}3069$

c) $x = 0{,}6931$ d) $x = 0{,}4507$

e) $x = 6{,}3891$ f) $x = 0{,}4812$

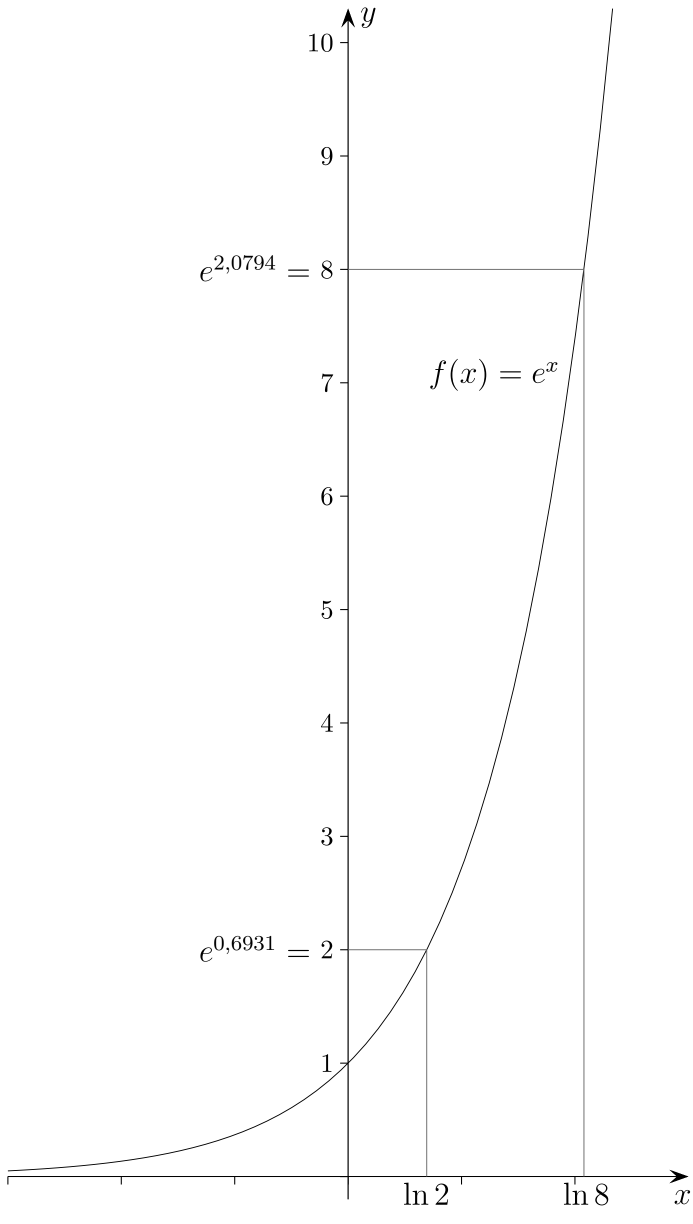
Tipp zu e) $e^{\ln(x+1)} = e^{2}$ (entlogarithmieren)

$e^{1+\frac{1}{2}\ln a} = e \cdot e^{\frac{1}{2}\ln a} = e \cdot a^{\frac{1}{2}} = e \cdot \sqrt{a}$

Natürlicher Logarithmus

$$
\begin{aligned}
e^{0,6931} &= 2 \\
e^{\ln 2} &= 2 \qquad \mid (\ )^3 \\
e^{3\cdot\ln 2} &= 2^3 \\
3\cdot\ln 2 &= \ln(2^3)
\end{aligned}
$$

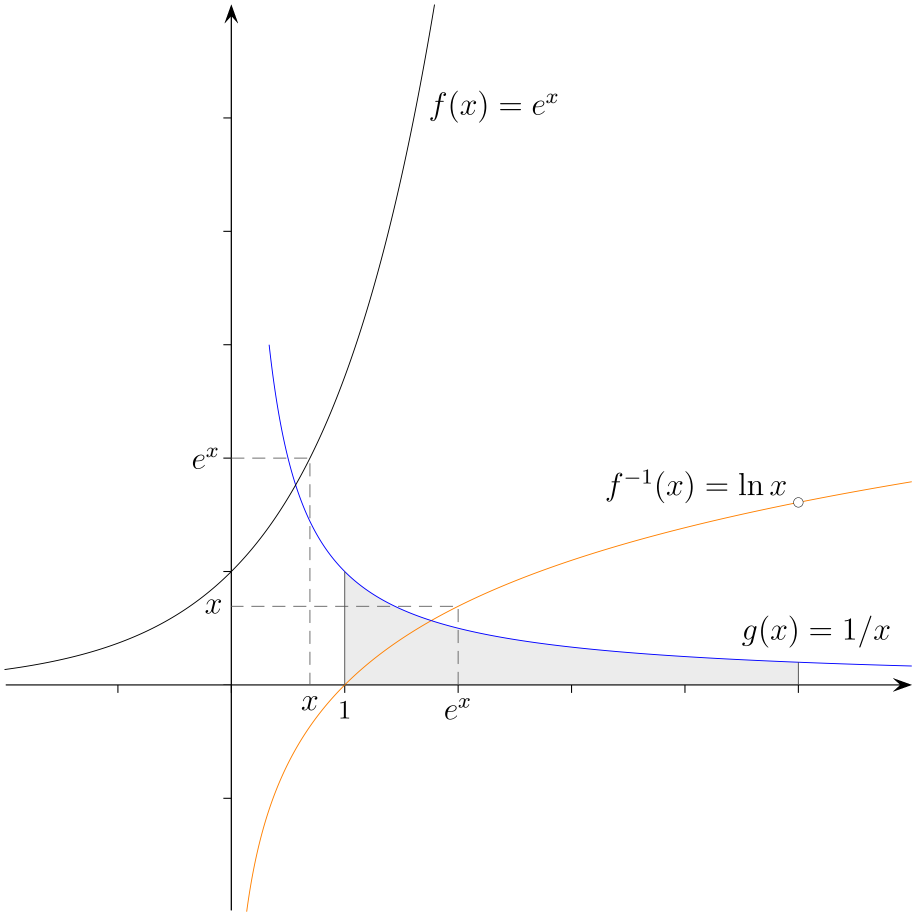
allgemein $\quad \ln a^n = n \ln a$



$3\cdot\ln 2 = \ln(2^3) = \ln 8$

Wir stellen uns vor, dass die positiven Zahlen in der Potenzschreibweise (Basis e) vorliegen.
Beim Multiplizieren werden die Exponenten addiert, beim Potenzieren mit n wird der Exponent mit n multipliziert.
Die Frage nach einem Logarithmus ist die Frage nach einem Exponenten (die Basis muss klar sein).

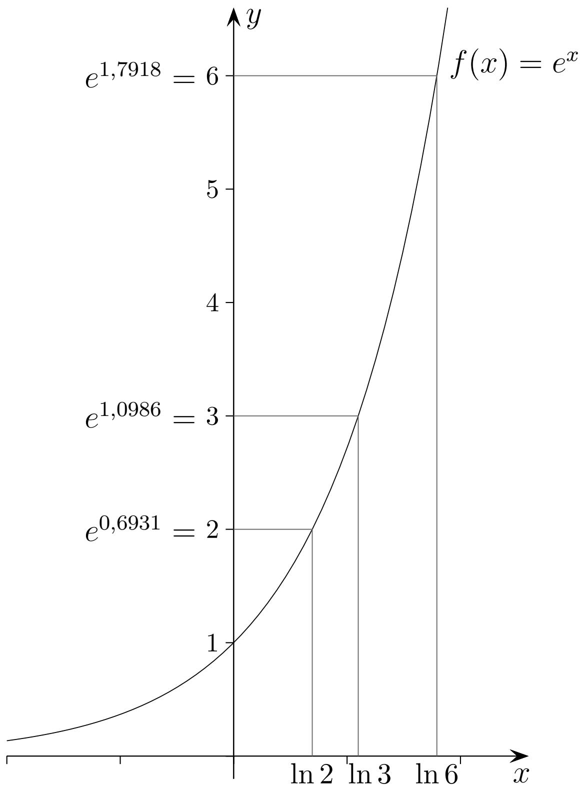
Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$



$$
\begin{aligned}
e^{\ln x} &= x \qquad |\ (\ )' \quad \text{linke Seite mit der Kettenregel} \\
e^{\ln x} \cdot (\ln x)' &= 1 \\
(\ln x)' &= 1/x \quad \text{mit} \quad e^{\ln x} = x
\end{aligned}
$$

$\ln x$ ist also die Aufleitung (Integralfunktion) von $1/x$ mit der Nullstelle $x = 1$.
Mit numerischer Integration kann $\ln x$ auf viele Nachkommastellen ermittelt werden, siehe das Python-Programm Numerische Berechnung von $\exp(x)$ und $\ln x$.

Natürlicher Logarithmus Einstieg



$$e^x = 3$$
$$x = 1{,}0986 \quad \text{genauer} \approx$$
$$x = \ln 3$$

Die Lösung der Gleichung $e^x = 3$ ist $x = \ln 3$, alternative Schreibweise $x = \ln(3)$.

Der natürliche Logarithmus von 3, kurz $\ln 3 = 1{,}0986$, ist also ein Exponent,
für den gilt: $e^{\ln 3} = e^{1{,}0986} = 3$

allgemein: $e^{\ln a} = a$ für $a > 0$.

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 12 \\ 2x &= \ln 12 \\ x &= \frac{\ln 12}{2} \\ x &= 1{,}2425 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^x &= 4 \cdot e^{2-x} \\ e^x &= e^{\ln 4} \cdot e^{2-x} \\ e^x &= e^{\ln 4 + 2 - x} \\ x &= \ln 4 + 2 - x \\ &\dots \\ x &= 1{,}6931 \end{aligned}$$

Wir gehen nun zu den Exponenten über.
Dieser Schritt heißt *logarithmieren.*

Die Logarithmenregeln sollten - wenn überhaupt im gA - erst dann eingeführt werden, wenn sie als Abkürzungen einer ausführlichen Rechnung (Umformungen mit den Potenzregeln, Basis e auf beiden Seiten, Übergang zu den Exponenten) erkannt werden.

ln-Folge

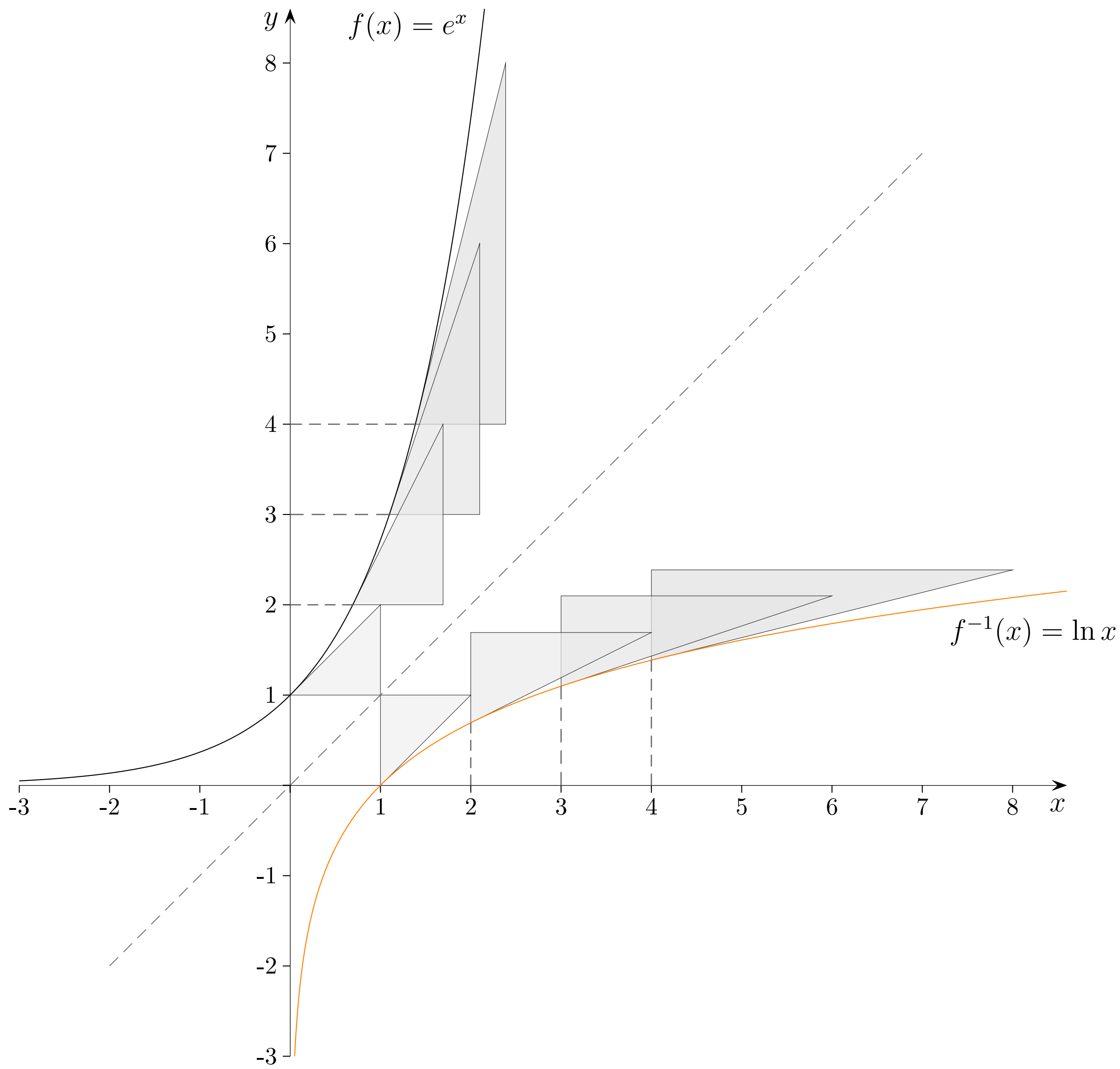
Mit $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n = e^a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{\ln(a)}{n})^n = e^{\ln(a)} = a$ und damit $\ln(a) = \lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)$.

$a = 3$

n	$n(3^{\frac{1}{n}}-1)$
10^{1}	1.16123174033904 ...
10^{2}	1.10466919378535 ...
10^{3}	1.09921598420405 ...
10^{4}	1.09867263832615 ...
10^{5}	1.09861832343501 ...
10^{6}	1.09861289214281 ...
10^{7}	1.09861234901555 ...
10^{8}	1.09861229470285 ...
10^{9}	1.09861228927158 ...
10^{10}	1.09861228872845 ...
10^{11}	1.09861228867414 ...
10^{12}	1.09861228866871 ...
10^{13}	1.09861228866817 ...
10^{14}	1.09861228866811 ...

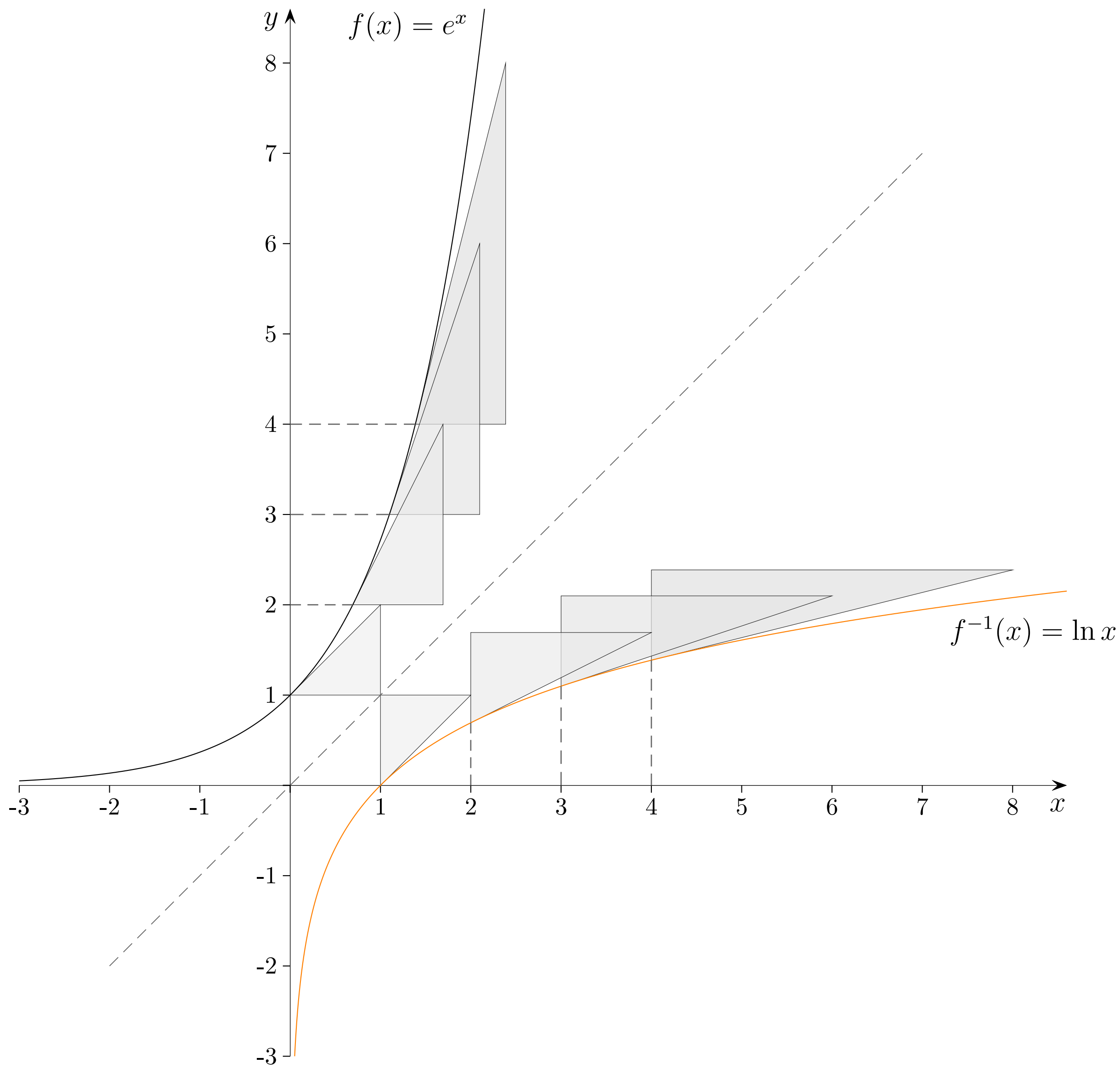
$$\ln(3) = 1{,}098612288668109691395245$$

Anschauliches



Stelle ein Vermutung über die Ableitung von $f^{-1}(x) = \ln x$ auf.

Anschauliches



Stelle ein Vermutung über die Ableitung von $f^{-1}(x) = \ln x$ auf.

$f(x_0) = 1$	$f'(x_0) = 1$	$f^{-1\prime}(1) = 1$
$f(x_1) = 2$	$f'(x_1) = 2$	$f^{-1\prime}(2) = \frac{1}{2}$
$f(x_3) = 3$	$f'(x_3) = 3$	$f^{-1\prime}(3) = \frac{1}{3}$

usw.

Bei der e-Funktion liegt beim y-Wert a die Steigung a vor.
Bei der Umkehrfunktion erhalten wir an der Stelle a die Steigung $\frac{1}{a}$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$

Die Funktion f $(b > 0)$ kann mit der Basis e geschrieben werden.

$$f(x) = a \cdot b^x = a \cdot e^{x \cdot \ln b}, \quad b = e^{\ln b}$$

Die Ableitung lautet dann:

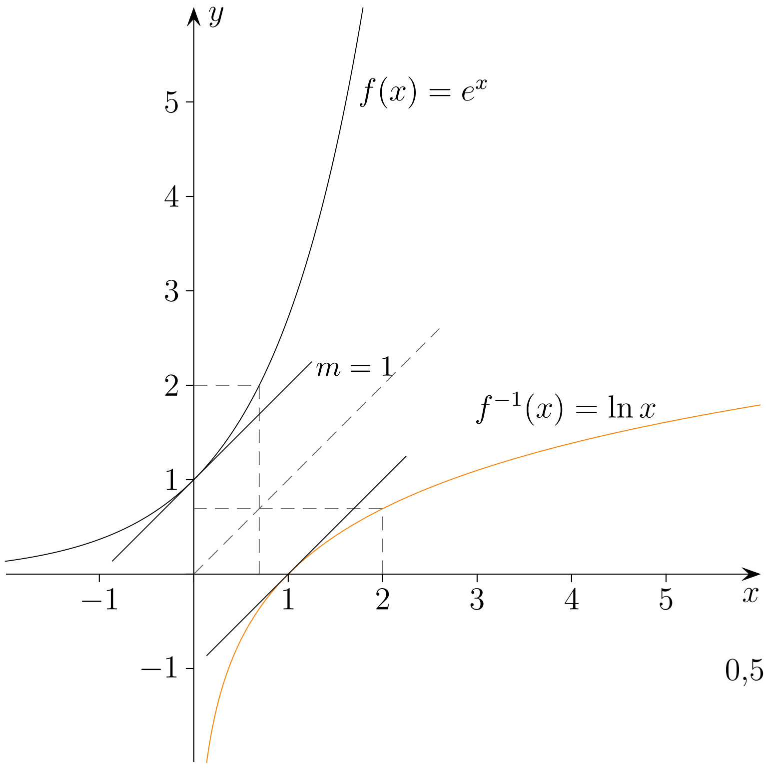
$$f'(x) = a \cdot e^{x \cdot \ln b} \cdot \ln b = a \cdot b^x \cdot \ln b$$

Beispiel

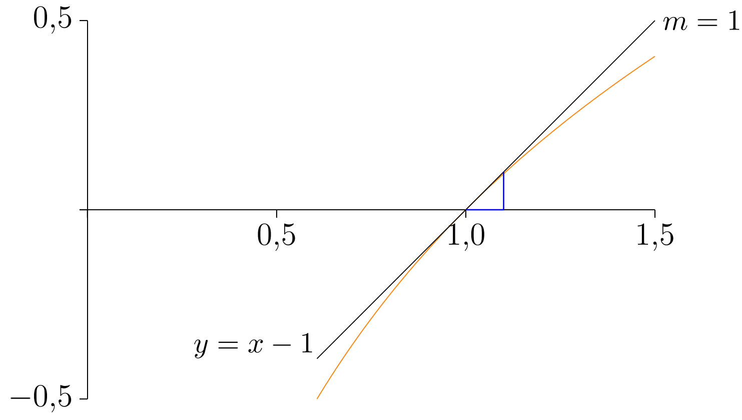
$$f(x) = 2 \cdot 1{,}03^x = 2 \cdot e^{x \cdot \ln 1{,}03} \approx 2 \cdot e^{0{,}02956 \cdot x} \approx 2 \cdot e^{0{,}03 \cdot x}$$

f ist die Funktion des exponentiellen Wachstums (Zinseszins) zu $p = 3\,\%$.

Beachte $\ln(1{,}03) = \ln(1 + 0{,}03) \approx 0{,}02956 \approx 0{,}03$. Das ist nicht zufällig so, siehe Grafik. Entscheidend ist die Tangentensteigung $m = 1$.



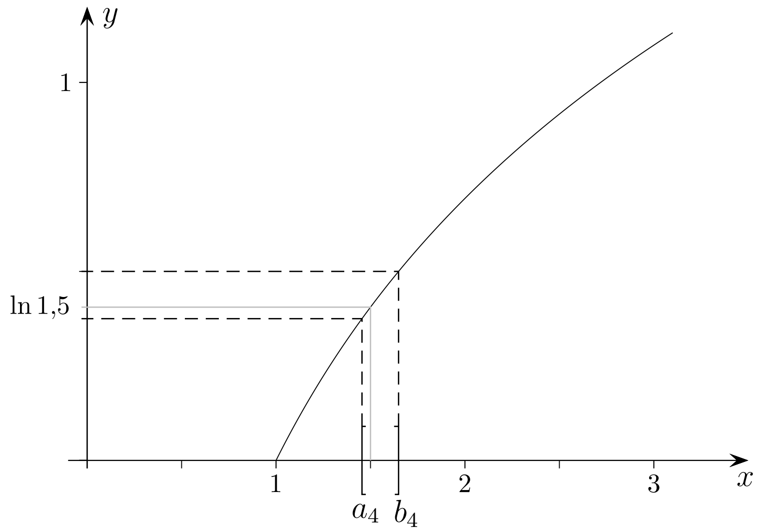
$$y = x - 1 \approx \ln x \;\text{ an der Stelle } x = 1$$
$$x = 1{,}03$$
$$y = 0{,}03 \approx \ln(1{,}03)$$



Berechnung natürlicher Logarithmen

$\ln 1{,}5 = ?$

Idee:
Mit Hilfe des geom. Mittels $\sqrt{a \cdot b}$ wird eine Intervallschachtelung $[a_n; b_n]$ von 1,5 erzeugt.
Wegen $\ln(\sqrt{a \cdot b}) = \dfrac{a+b}{2}$ werden die Logarithmen iterativ als arithmetisches Mittel bestimmt.



Beginn $[a_1; b_1] = [1; e]$

$[a_2; b_2] = [1; \sqrt{a_1 \cdot b_1}]$

weil $\sqrt{a_1 \cdot b_1} = 1{,}6487212 > 1{,}5$ ist.

Das Logarithmus-Intervall $[0; 1]$ verkleinert sich auf:

$$[\ln a_2; \ln b_2] = [0; \frac{\ln a_1 + \ln b_1}{2}] = [0; 0{,}5]$$

Falls $\sqrt{a_k \cdot b_k} < 1{,}5$, wird in $[a_k; b_k]$ die linke Grenze ersetzt, desgleichen erfolgt im Logarithmus-Intervall.
$[\ln a_k; \ln b_k]$ verkleinert sich auf:

$$[\ln a_{k+1}; \ln b_{k+1}] = [\frac{\ln a_k + \ln b_k}{2}; \ln b_k]$$

n	a_n	b_n	$\ln a_n$	$\ln a_n$
1	1	2,7182818	0	1
2	1	1,6487212	0	0,5
3	1,2840254	1,6487212	0,3	0,5
4	1,4549914	1,6487212	0,375	0,5
5	1,4549914	1,5488303	0,375	0,44
6	1,4549914	1,5011778	0,375	0,40625
7	1,4779042	1,5011778	0,3906	0,406250
8	1,4894955	1,5011778	0,3984375	0,406250
9	1,4953252	1,5011778	0,4023438	0,4062500
10	1,4982486	1,5011778	0,4042968	0,4062500
11	1,4997125	1,5011778	0,4052734	0,4062500
12	1,4997125	1,5004449	0,4052734	0,4057617
13	1,4997125	1,5000787	0,4052734	0,4055175
14	1,4998956	1,5000787	0,4053955	0,4055175
15	1,4999871	1,5000787	0,4054565	0,4055175
16	1,4999871	1,5000329	0,4054565	0,4054870
17	1,4999871	1,5000100	0,4054565	0,4054718
18	1,4999986	1,5000100	0,4054641	0,4054718
19	1,4999986	1,5000043	0,4054641	0,4054679
20	1,4999986	1,5000014	0,4054641	0,4054660
21	1,4999986	1,5000000	0,4054641	0,4054651

Die Tabelle lässt sich auf einfache Weise mit einer Tabellenkalkulation berechnen, siehe hier.

Exponentialgleichungen und Logarithmen, siehe letzte Seite
Startseite