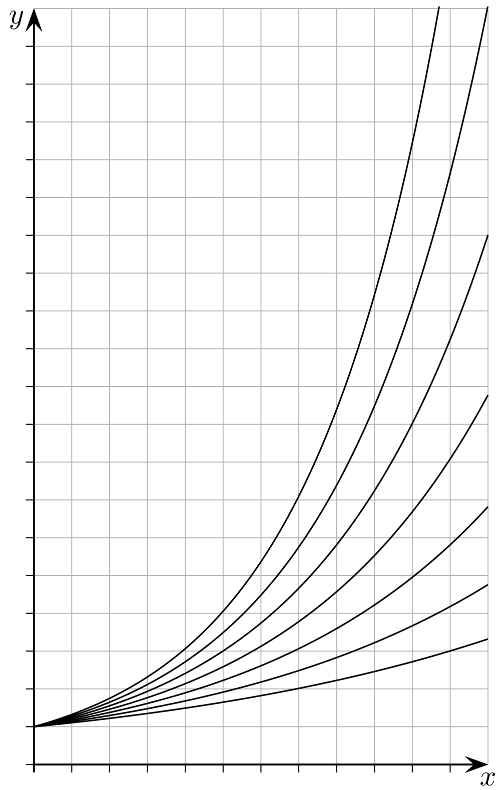
1. Weg zur e-Funktion   Wachstumsverläufe
2. Exponentielles Wachstum $f(x) = a \cdot 1{,}15^x, \ldots$
3. $f(x) = 2^x$
4. $f'(x) = f(x)$
5. Eulersche Zahl
6. $f'(x) = f(x)$ kurz gefasst
7. Anschauliches
8. $f(x) = e^x$,   Ableitung von $f(2x) = e^{2x}$
9. Exponentielles Wachstum $f(x) = a\,e^{kx}$
10. Begrenztes Wachstum
11. Temperaturzunahme
12. Zu- und Abfluss
13. Tropfinfusion
14. Möglicher Einstieg
15. Ausblick
16. Historisches

Für den Anfang geeignet

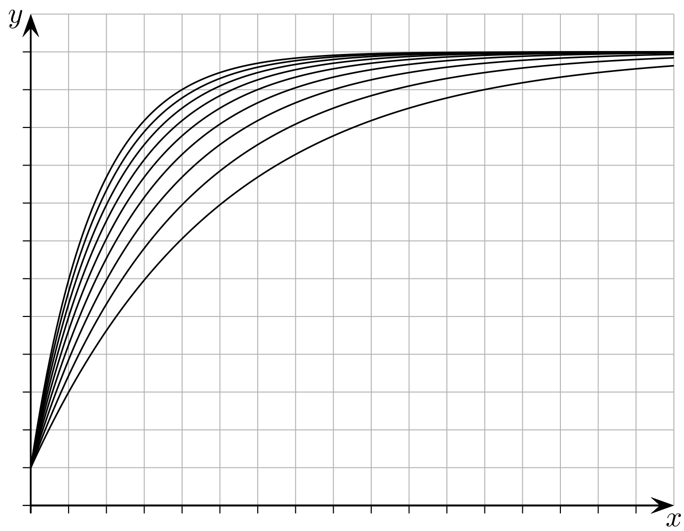
↑ Weg zur e-Funktion

Zur Einstimmung werden einige Wachstumsverläufe skizziert.

1. Exponentielles Wachstum

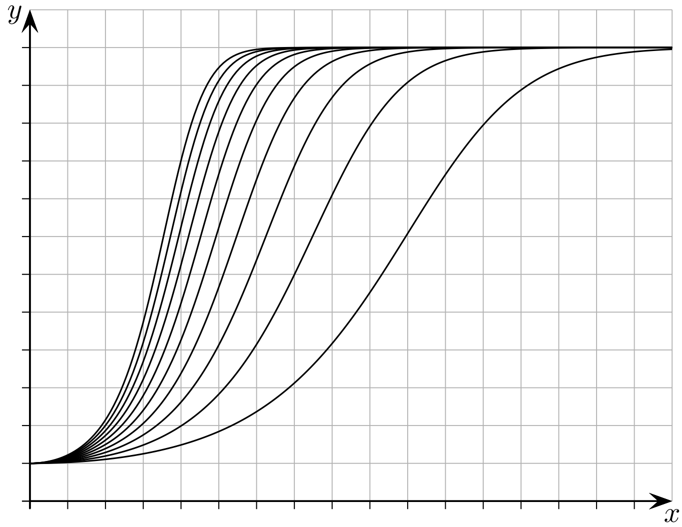


2. Begrenztes (beschränktes) Wachstum

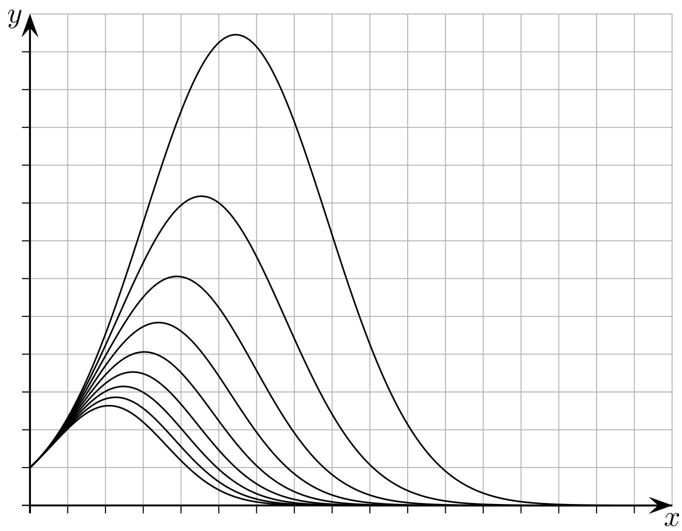


↑ Wachstumsverläufe

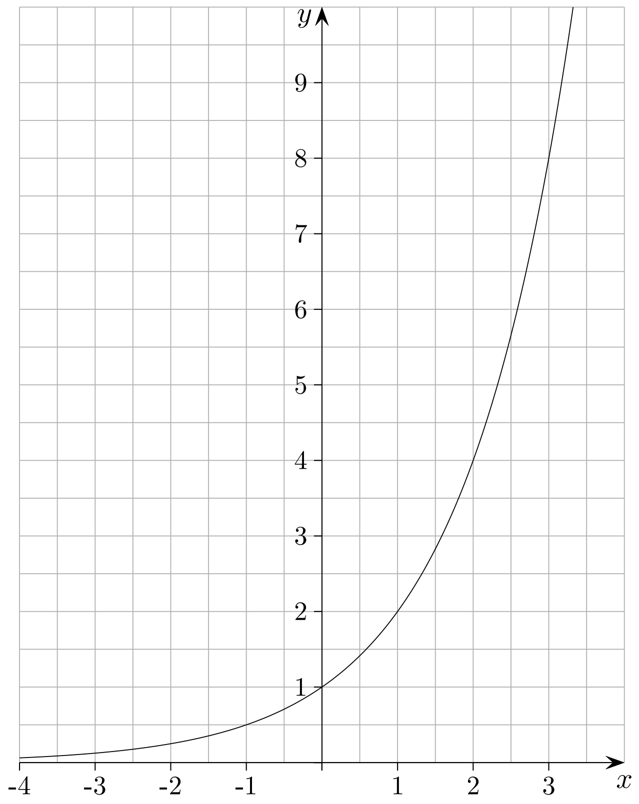
3. Logistisches Wachstum



4. Vergiftetes Wachstum



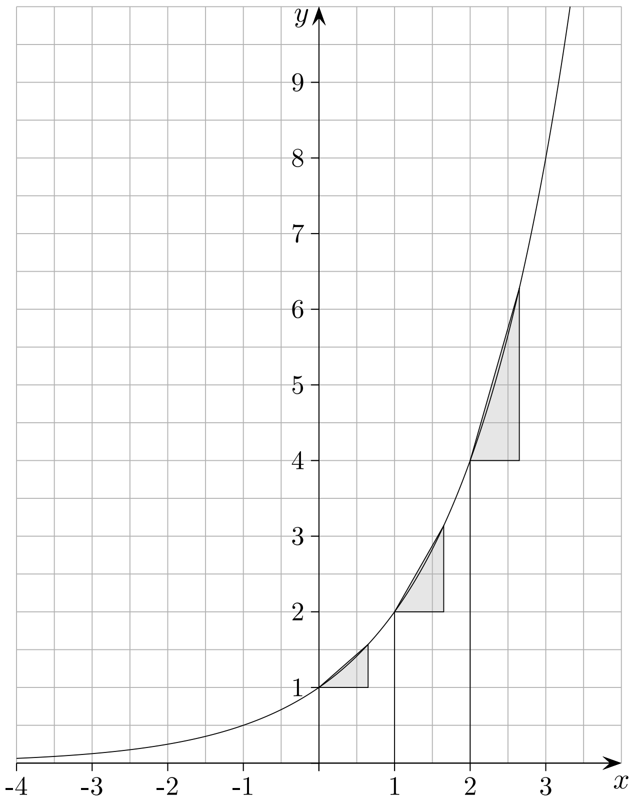
↑ Exponentielles Wachstum



Funktionen für exponentielles Wachstum, Beispiele:

1. $K_n = K_0 \cdot q^n$ Zinseszinsformel, $q = 1 + \frac{p}{100}$
2. $f(x) = a \cdot 2^x$ Verdopplung des Bestands pro Zeiteinheit, Anfangsbestand a
3. $f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}}$ Verdopplung in jeweils 3 Zeiteinheiten
4. $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ Halbierung des Bestands pro Zeiteinheit
5. $f(x) = a \cdot 1{,}15^x$ $1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$, 15 %-iger Zuwachs pro Zeiteinheit
6. $f(x) = a \cdot 0{,}85^x$ $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$, 15 %-ige Abnahme pro Zeiteinheit, 15 %-iger Zerfall

↑ $f(x) = 2^x$



Uns interessiert die Ableitung von $f(x) = 2^x$.

Das allgemeine Vorgehen (h-Methode), um die Ableitung an der Stelle x zu ermitteln, lautet:

$$m_{Tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m_{Tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = 2^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}}_{f'(0)}$$

Hieraus erkennen wir:

$f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$

Für die Ableitung der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ gilt:

$f'(x) = k \cdot f(x), \quad k = f'(0)$ ist ein Streckfaktor.

Erläutere:

Für das exponentielle Wachstum gilt:

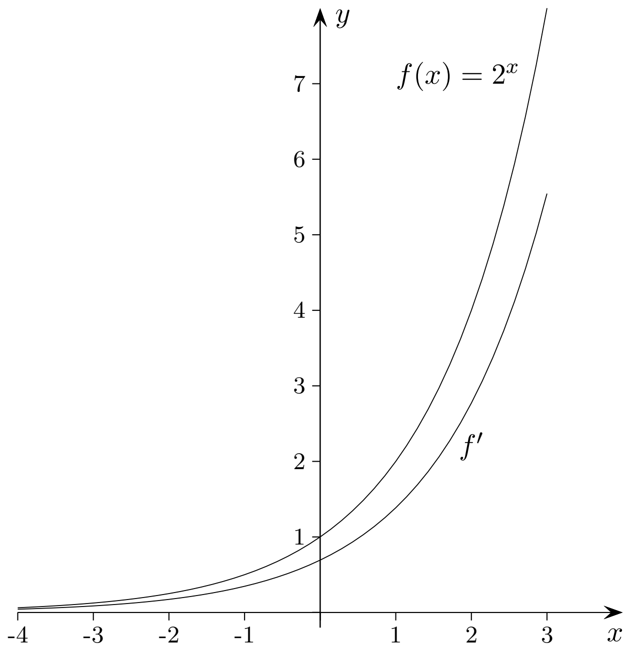
Der Zuwachs Δy ist proportional zum Bestand.

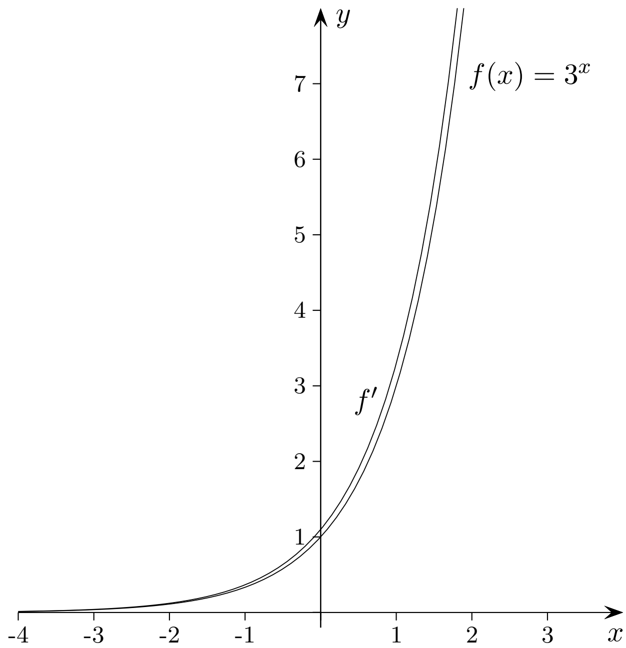
↑ $f'(x) = f(x)$

Graphische Differentiation (Zeichnen der Tangenten und Ablesen der Steigungen) der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$ - die Ableitung liegt einmal unterhalb, einmal oberhalb der jeweiligen Funktion - führt zur Frage:

Gibt es ein a, für das gilt: $(a^x)' = a^x$?

(Später kommen wir auf die Ableitung von $f(x) = 2^x$ zurück.)





Die Tangentengleichung im Ursprung wäre $y = x + 1$,
beachte $f'(0) = 1$.

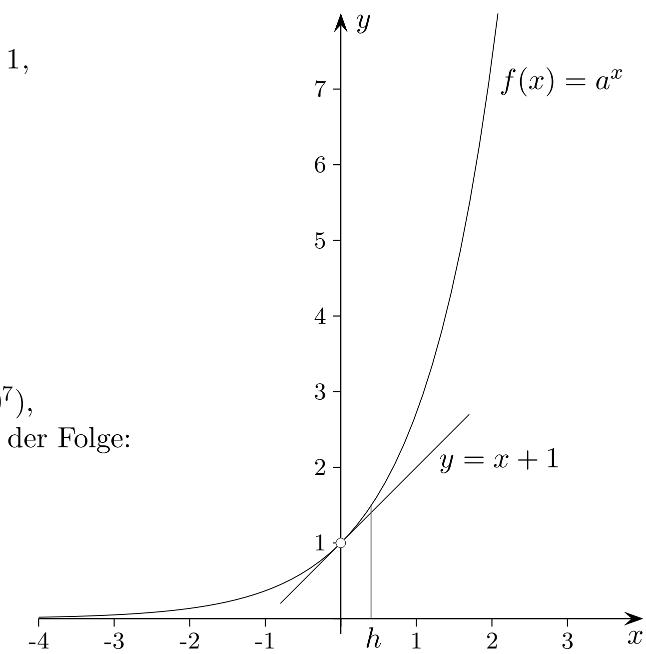
Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \frac{1}{n}$ wäre für große n:

$$a^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n} \quad | \ (\ )^n \qquad \Longrightarrow \qquad a \simeq (1 + \tfrac{1}{n})^n$$

Setzen wir für n große Zahlen ein $(10^4,\ 10^5,\ 10^6,\ 10^7)$,
so erhalten wir gute Näherungen für den Grenzwert der Folge:

$$a_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n$$



↑ Eulersche Zahl

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 46 …
10^2	2,704 813 82 …
10^3	2,716 923 93 …
10^4	2,718 145 92 …
10^5	2,718 268 23 …
10^6	2,718 280 46 …
10^7	2,718 281 69 …
10^8	2,718 281 81 …

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ wird nach Euler (1707 - 1783) mit e bezeichnet (e von exponential).

Für die e-Funktion $f(x) = e^x$ gilt: $\quad (e^x)' = e^x$.

$$e = 2{,}7182818284590452353602\ldots$$

An anderer Stelle (Approximation der e-Funktion) wird hergeleitet:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ \ldots$$

Erläutere den Bezug zu $(e^x)' = e^x$.

e kann mit der Reihendarstellung für $x = 1$ auf beliebig viele Stellen berechnet werden. Hierzu sind genügend Summanden mit der Grundschuldivision auf die geforderten Nachkommastellen zu ermitteln, siehe das Python-Programm e auf 1000 Nachkommatellen.

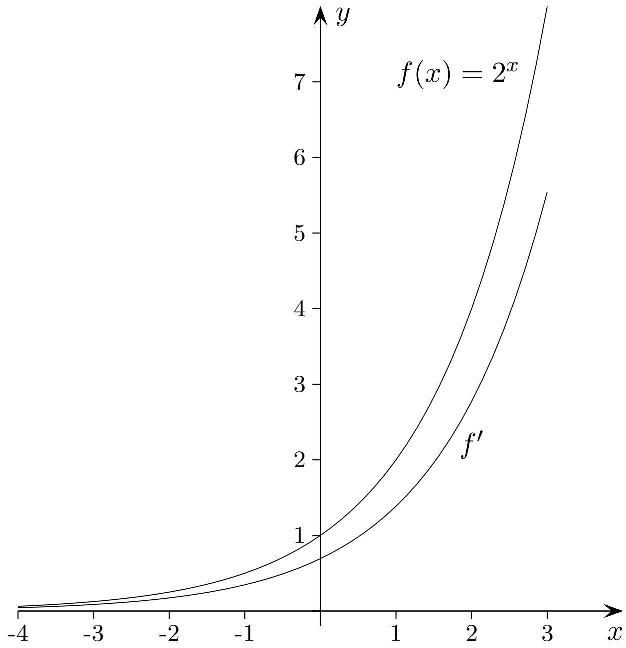
Wie lautet die Ableitung von $f(x) = e^{3x}$?

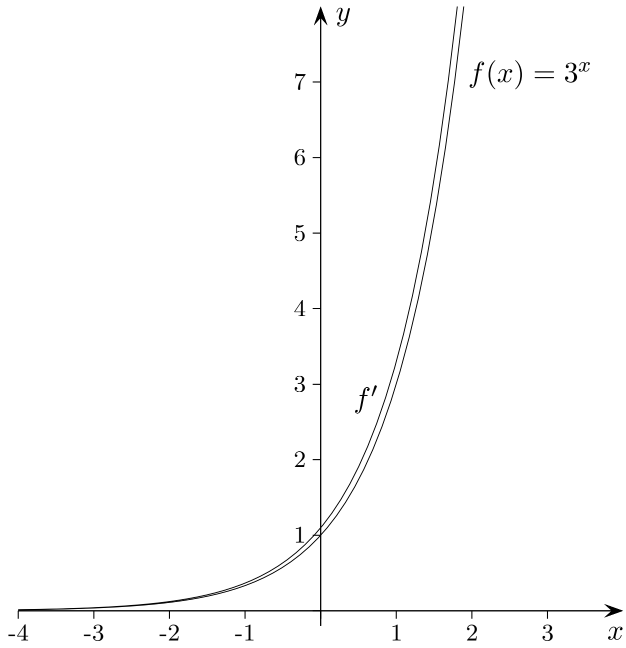
Erläutere:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{3(x+h)} - e^{3x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{3x+3h} - e^{3x}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{3x}\,\frac{e^{3h}-1}{h} = 3\cdot e^{3x}\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-1}{3h}}_{g'(0)=1,\ g(x)=e^x} = 3\cdot e^{3x}$$

Um $f(x) = 2^x$ abzuleiten, müssen wir uns zunächst mit Logarithmen zur Basis e befassen. Dann sind wir in der Lage, $f(x) = 2^x = e^{\ln 2\cdot x}$ mit der Kettenregel abzuleiten, $f'(x) = \ln 2\cdot 2^x$.

$\uparrow$ $f'(x) = f(x)$





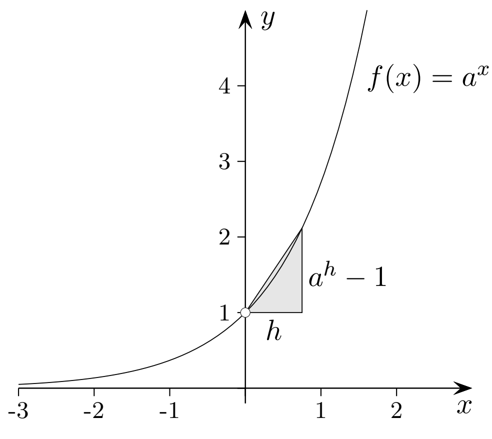
Graphische Differentiation der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$
- die Ableitung liegt einmal unterhalb, einmal oberhalb der jeweiligen Funktion - führt zur Frage:

Gibt es ein a, für das gilt: $(a^x)' = a^x$?

Die h-Methode, um die Ableitung an der Stelle x zu ermitteln, lautet:

$$m_{Tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m_{Tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{f'(0)}$$



$f'(0)$ muss 1 sein, damit $(a^x)' = a^x$ gilt.
Für a folgt:

$$a = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

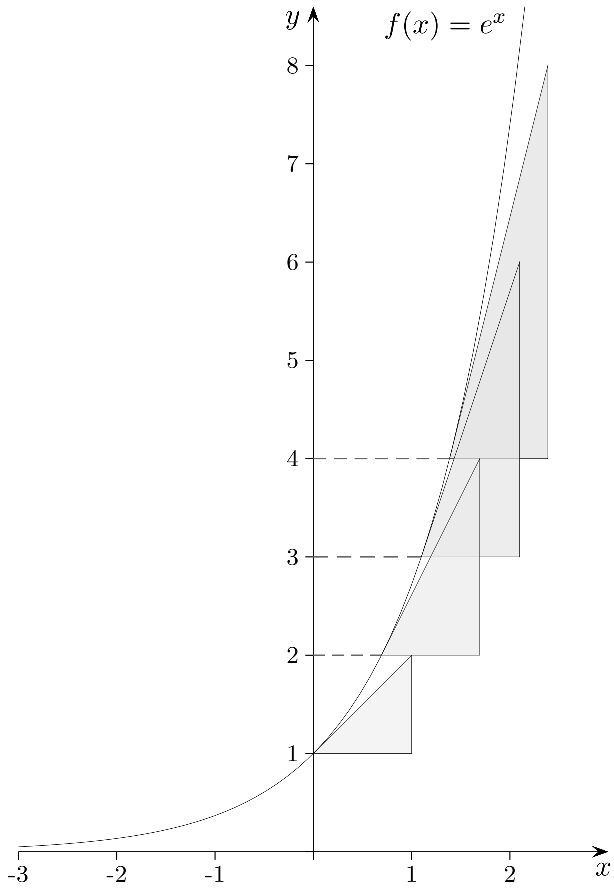
Setze $h = 0{,}001$, $\frac{1}{h} = 1000$

$h = 10^{-9}$, $\frac{1}{h} = 10^9$

Der Grenzwert a wird nach Euler (1707-1783) mit e bezeichnet.

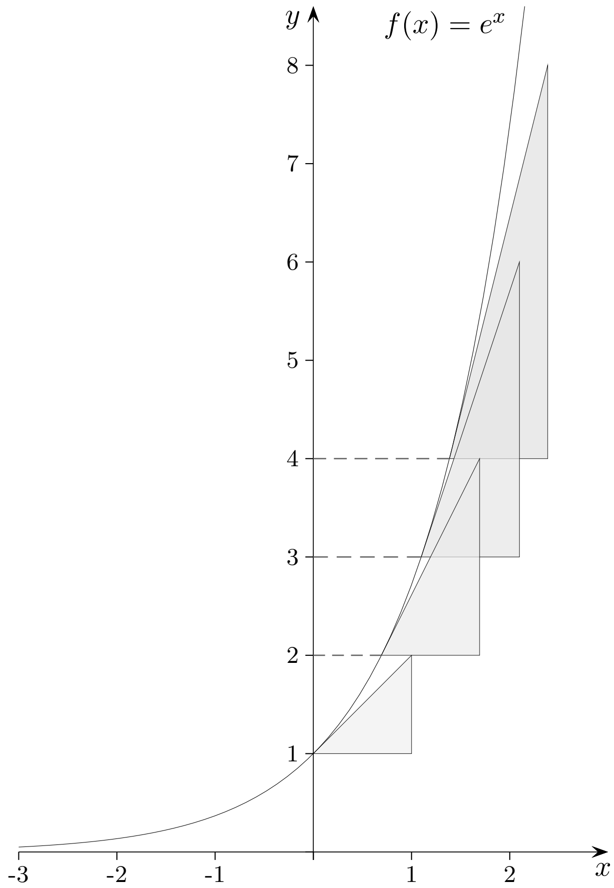
$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ \ldots$

↑ Anschauliches



Was kannst du aus der Grafik erkennen?

↑ Anschauliches



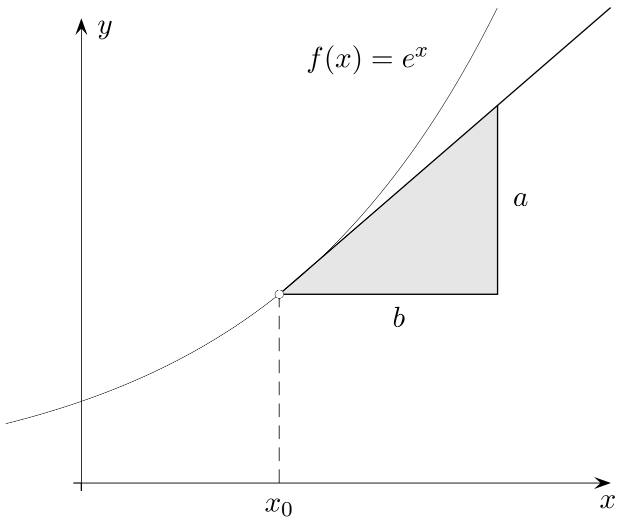
Was kannst du aus der Grafik erkennen?

$f(x_0) = 1$	$f'(x_0) = 1$
$f(x_1) = 2$	$f'(x_1) = 2$
$f(x_3) = 3$	$f'(x_3) = 3$
	usw.

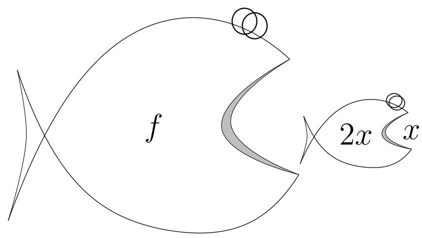
$x_0 = 0$ ist die Stelle, an der der Funktionswert 1 beträgt, die Steigung ist an dieser Stelle 1.
x_1 ist die Stelle, an ...
Funktionswert und Tangentensteigung stimmen an diesen Stellen überein.

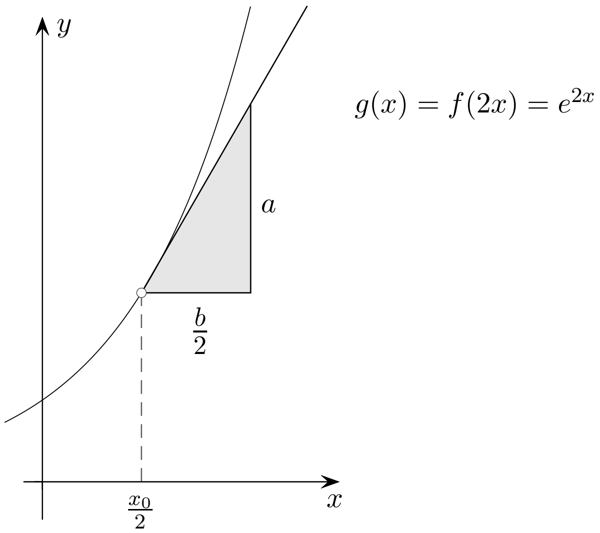
$$f(x_0) = f'(x_0)$$
$$f(x_1) = f'(x_1)$$
$$f(x) = f'(x) \qquad \text{mutmaßlich}$$

↑ $f(x) = e^x$, Ableitung von $f(2x) = e^{2x}$



$m_1 = \frac{a}{b}$





$m_2 = \frac{2a}{b}$

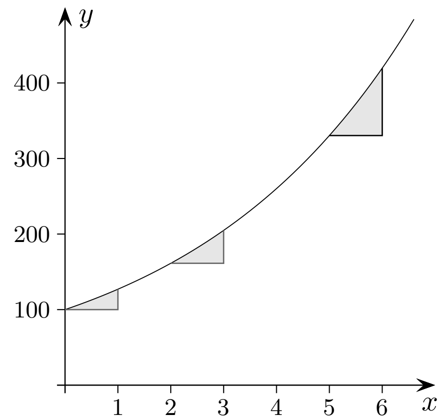
Der Graph von $g(x) = e^{2x}$ ist gegenüber $f(x) = e^x$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in Richtung Ursprung gestaucht. Den Funktionswert, den f an der Stelle x_0 annimmt, nimmt g schon an der Stelle $\frac{x_0}{2}$ an. Die Steigung m_1 verdoppelt sich auf m_2.

$$g'(\tfrac{x_0}{2}) = 2f'(x_0) = 2e^{x_0}$$

$$\Longrightarrow \quad g'(x) = 2e^{2x}, \qquad \text{setze } x = \tfrac{x_0}{2}. \qquad \text{Allgemein gilt: } \left(e^{kx}\right)' = e^{kx} \cdot k$$

↑ Exponentielles Wachstum

Mit den Funktionen $f(x) = ae^{kx}$ erfassen wir exponentielle Wachstumsvorgänge.
Hierbei ist a der Anfangsbestand zur Zeit $x = 0$.



$$\begin{aligned} f(x) &= ae^{kx} \\ f'(x) &= ae^{kx} \cdot k \\ f'(x) &= k\,f(x) \end{aligned}$$

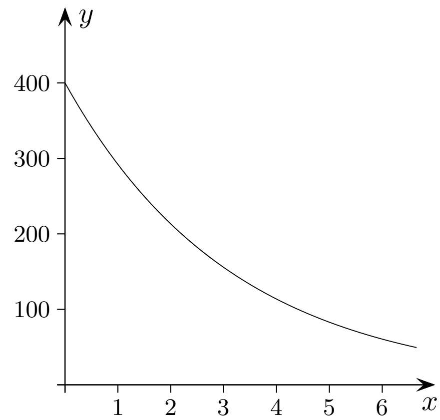
Die Wachstumsgeschwindigkeit (Änderungsrate)
ist proportional zum Bestand.

Mit $\quad f(x) = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^x$

erhalten wir den Zusammenhang zwischen der Wachstumskonstante k
und dem Prozentsatz des jährlichen Wachstums, es gilt

$$e^k = 1 + \frac{p}{100}.$$

Für einen Wachstumsprozess sei $p = 4\,\%$. Ermittle k.

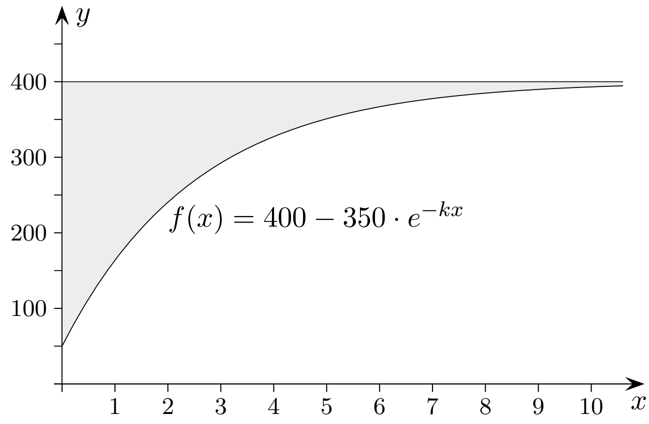


Für einen exponentiellen Abnahmeprozess $f(x) = ae^{-kx}$ bzw. $f(x) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})^x$
gilt entsprechend $\quad e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}.$

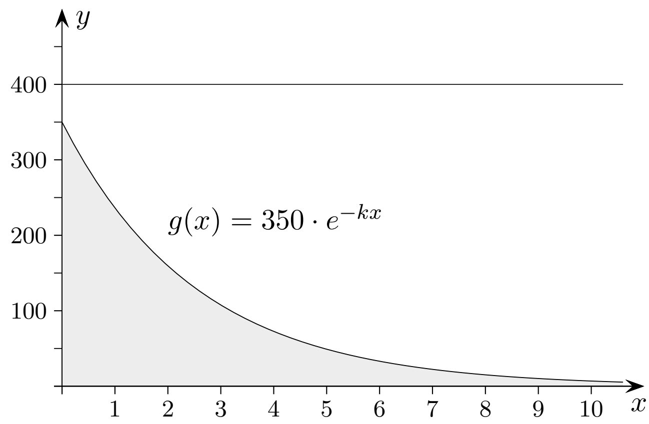
Zeige, dass für die Halbwertszeit T, das ist die Zeit, in der die Hälfte
der ursprünglich vorhandenen Stoffmenge zerfallen ist, gilt:

$$T = \frac{\ln 2}{k}$$

↑ Begrenztes Wachstum



Mit der Funktion $f(x) = G - ae^{-kx}$ erfassen wir begrenztes Wachstums.
Von der Grenze G wird eine Funktion $g(x)$ für die exponentielle Abnahme subtrahiert.
Hierbei ist $G - a$ der Anfangsbestand zur Zeit $x = 0$.



$$\begin{aligned} f(x) &= G - ae^{-kx} \\ f'(x) &= ae^{-kx} \cdot k \\ f'(x) &= k(G - f(x)) \end{aligned}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit (Änderungsrate)
ist proportional zur Differenz $G - f(x)$.

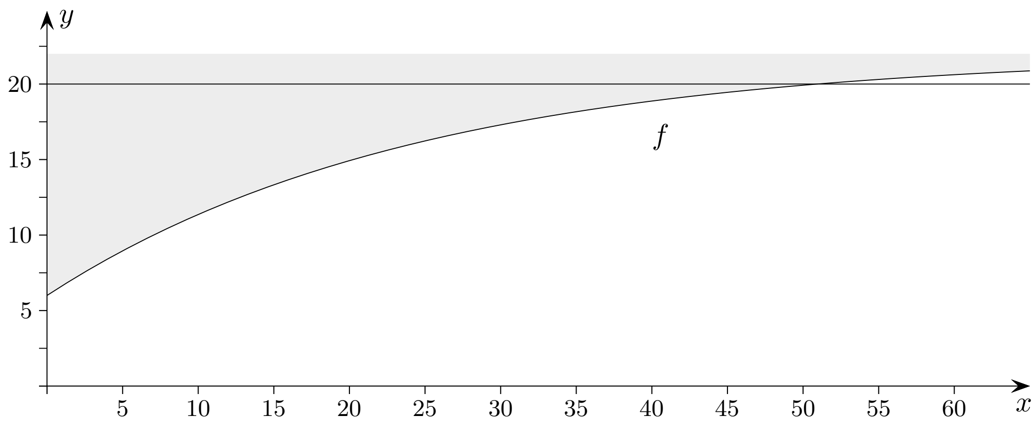
Für die exponentielle Abnahme $g(x) = a \cdot e^{-kx}$ bzw. $g(x) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})^x$ gilt $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$.

Eine Flasche Milch wird aus dem Kühlschrank ($6°C$) genommen. Die Temperatur in der Küche beträgt $22°C$. Anfangs nimmt die Temperatur der Milchflasche recht schnell zu. Je näher ihre Temperatur jedoch dem Wert $22°C$ kommt, desto langsamer erfolgt der weitere Temperaturanstieg. Die Temperaturzunahme kann als begrenztes Wachstum aufgefasst werden. Dabei soll angenommen werden, dass die Temperatur pro Minute um $4\,\%$ der noch bis $22°C$ fehlenden Temperaturdifferenz zunimmt. Wird lange dauert es, bis sich die Milchflasche auf $20°C$ erwärmt hat?

Eine Flasche Milch wird aus dem Kühlschrank ($6°C$) genommen. Die Temperatur in der Küche beträgt $22°C$. Anfangs nimmt die Temperatur der Milchflasche recht schnell zu. Je näher ihre Temperatur jedoch dem Wert $22°C$ kommt, desto langsamer erfolgt der weitere Temperaturanstieg. Die Temperaturzunahme kann als begrenztes Wachstum aufgefasst werden. Dabei soll angenommen werden, dass die Temperatur pro Minute um $4\,\%$ der noch bis $22°C$ fehlenden Temperaturdifferenz zunimmt. Wird lange dauert es, bis sich die Milchflasche auf $20°C$ erwärmt hat?

$f(x) = 22 - 16 \cdot 0{,}96^x$
$f(x) = 22 - 16e^{-0{,}0408x}$

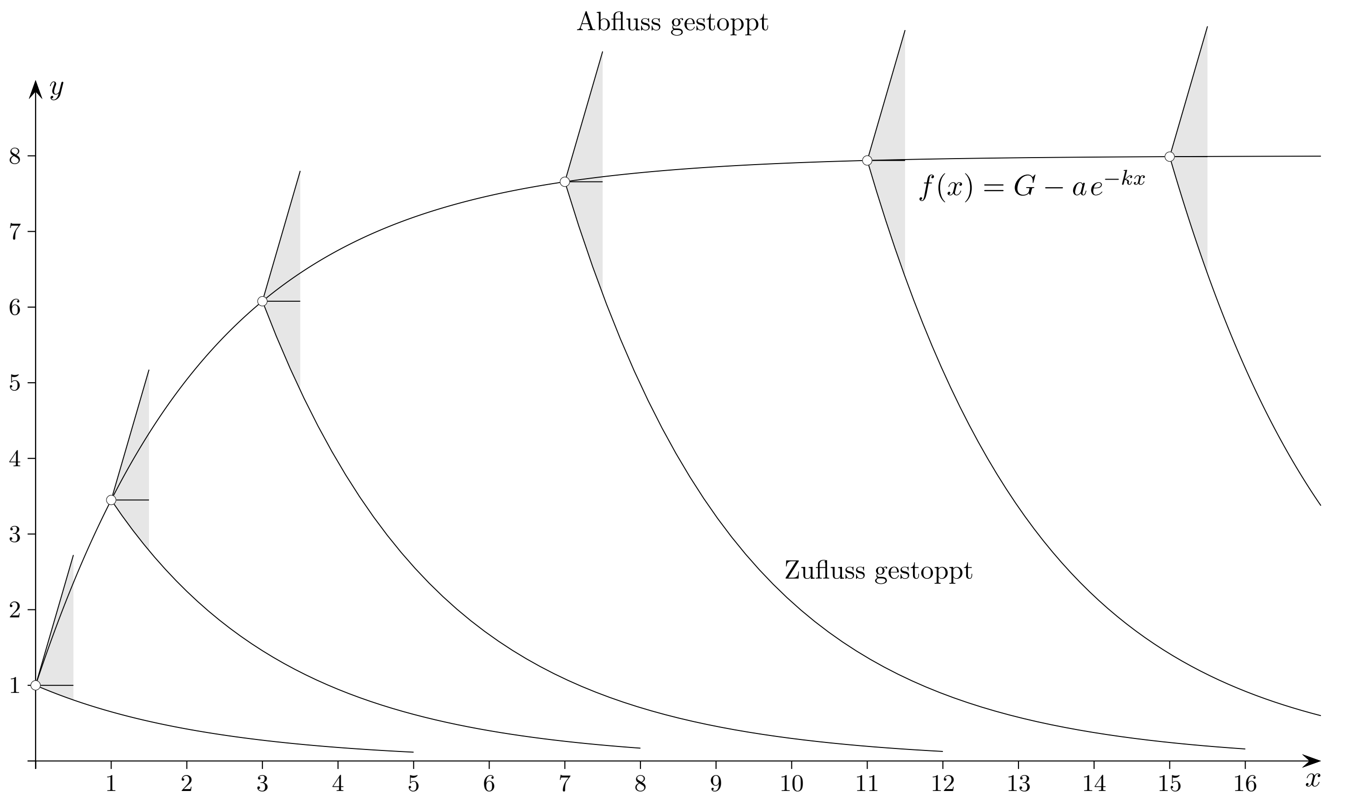
51 Minuten



↑ Zu- und Abfluss

Die DGL des beschränkten Wachstums $f'(x) = k \cdot (G - f(x)), \quad k > 0$,
lässt sich leicht umformen zu: $f'(x) = -kf(x) + k \cdot G$, bzw. $f'(x) = -kf(x) + b$

Die Änderungsrate setzt sich nun aus einem zum Bestand proportionalen Anteil (mit negativem Vorzeichen) und einer konstanten Zuflussrate $b = k \cdot G$ zusammen.



Zu jedem Zeitpunkt x_0 liegt ein Zufluss mit konstanter Änderungsrate b vor.
Gleichzeitig erfolgt eine exponentielle Abnahme gemäß $f(x_0) \cdot e^{-kx}$ bzw. $f(x_0) \cdot (1 - \frac{p}{100})^x$.
Es gilt $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$.

Da mit größer werdendem $f(x)$ der Abfluss ansteigt, wird schließlich ein Gleichgewichtszustand erreicht. Würde ab einem bestimmten Zeitpunkt entweder der Zu- oder Abfluss gestoppt, so verliefe die weitere Entwicklung gemäß des verbleibenden Graphen (siehe Abb.).

Bei einer Tropfinfusion werden konstant pro Minute $2\,mg$ eines Wirkstoffs zugeführt. Gleichzeitig baut der Körper pro Minute $4\,\%$ des jeweils im Blut vorhandenen Wirkstoffs über Leber und Niere wieder ab. Die Infusion wird nach einer Stunde abgebrochen. Wie hoch ist die erreichte Wirkstoffmenge?

Bei einer Tropfinfusion werden konstant pro Minute 2 mg eines Wirkstoffs zugeführt. Gleichzeitig baut der Körper pro Minute 4 % des jeweils im Blut vorhandenen Wirkstoffs über Leber und Niere wieder ab. Die Infusion wird nach einer Stunde abgebrochen. Wie hoch ist die erreichte Wirkstoffmenge?

$f'(x) = -kf(x) + 2, \quad k = -\ln(0{,}96) = 0{,}04082$

$f'(x) = k\big(G - f(x)\big), \quad G = \frac{b}{k} = 49{,}0$

$f(x) = G - Ge^{-kx}$

$f(60) = 44{,}8$

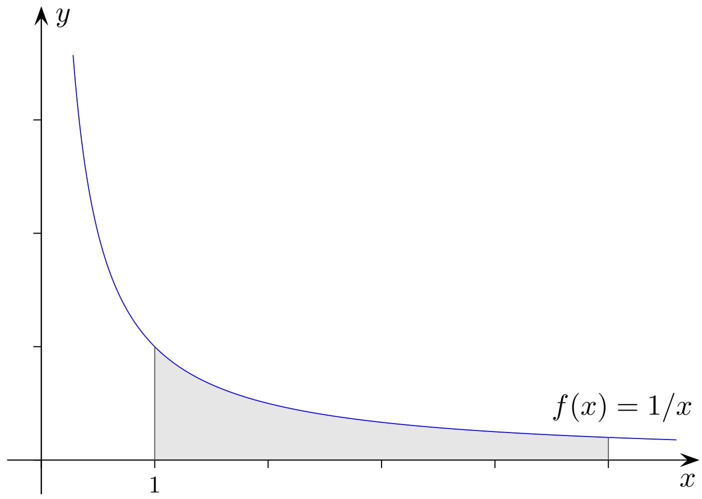
ungenau:

$k = 0{,}04$

$G = 50{,}0$ beachte: $\frac{4}{100}G = 2$

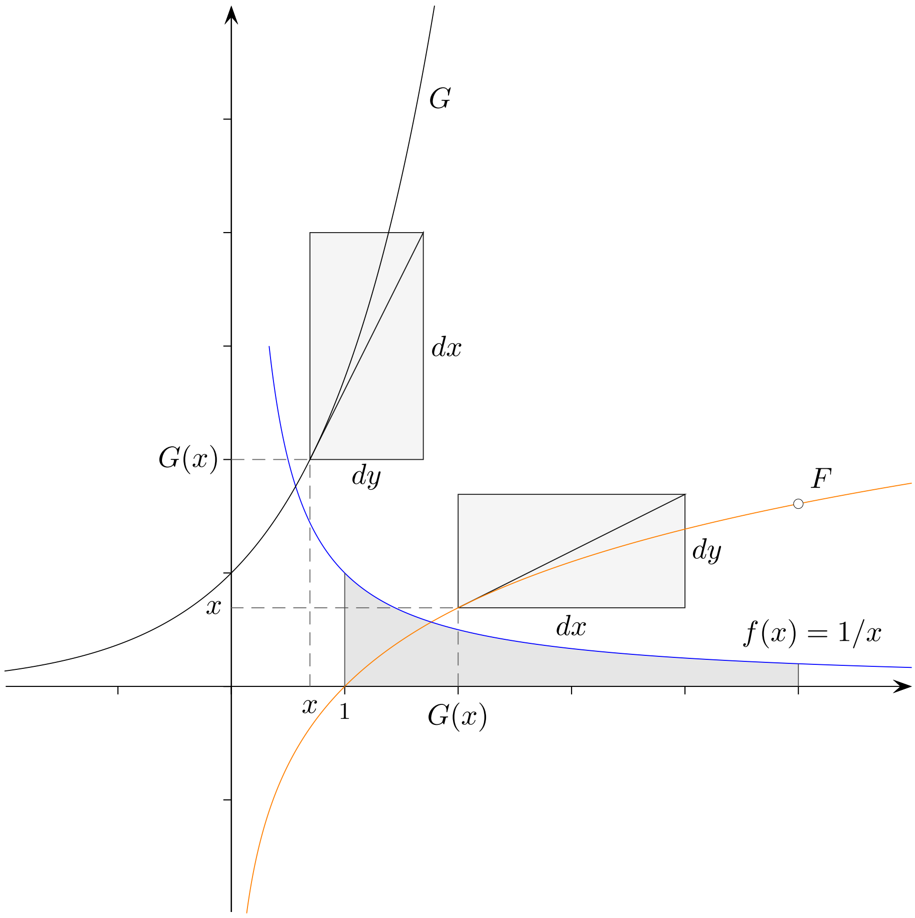
$f(60) = 45{,}5$

↑ $G'(x) = G(x)$ Möglicher Einstieg



Die Ermittlung einer Stammfunktion $F(x)$ (bzw. Integralfunktion, hier mit $F(1) = 0$) für $f(x) = 1/x$ stößt auf unerwartete Schwierigkeiten.
Wir können aber einige Zusammenhänge entdecken.

$\uparrow$ $G'(x) = G(x)$ Möglicher Einstieg



F muss monoton steigend sein, da $f(x) > 0$ ist. Der Graph (orange) kann skizziert werden. Zu F existiert die Umkehrfunktion G, Skizze (schwarz). G könnte eine Potenzfunktion wie $f(x) = 2^x$ sein.

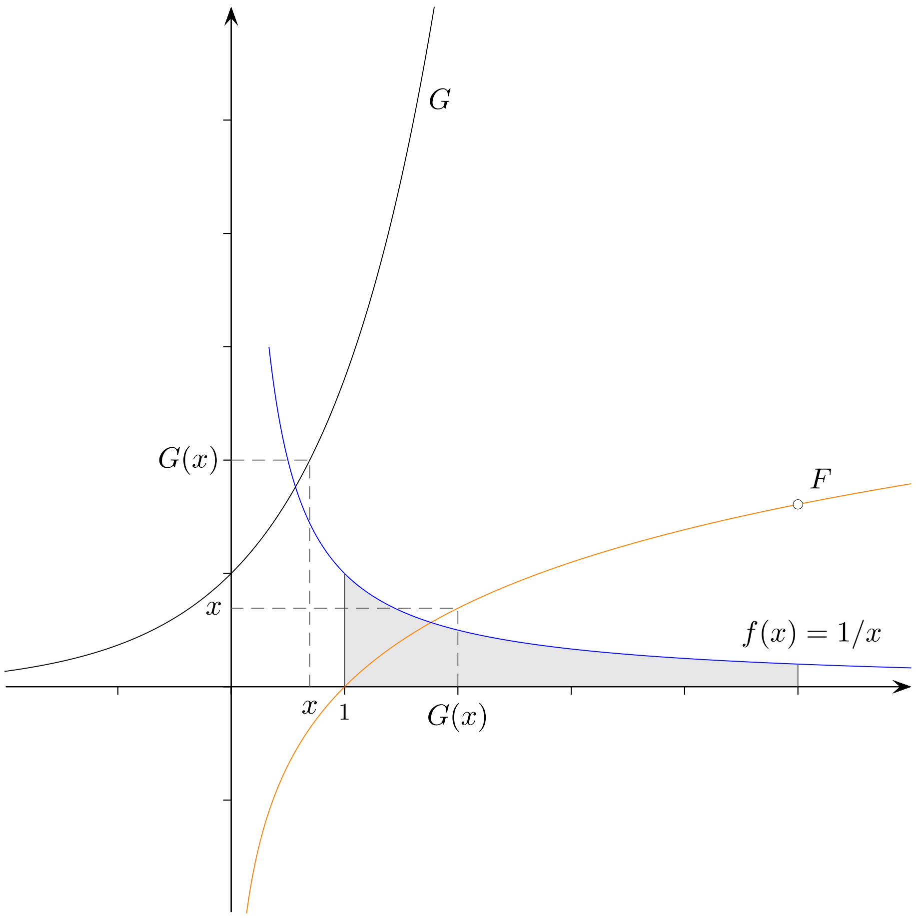
Für G gilt $G'(x) = G(x)$.

$$G'(x) \overset{1.}{=} \frac{1}{F'(G(x))} \overset{2.}{=} \frac{1}{f(G(x))} \overset{3.}{=} \frac{1}{\frac{1}{G(x)}} = G(x)$$

1. Der Graph von G ist das Spiegelbild an der Winkelhalbierenden des Graphen von F. Beachte den Zusammenhang der Steigung $G'(x) = \frac{dx}{dy}$ von G an der Stelle x und der Steigung $F'(G(x)) = \frac{dy}{dx}$ von F an der Stelle $G(x)$.
2. F ist eine Stammfunktion von f, $F'(x) = f(x)$.
3. $f(x) = 1/x$, $f(G(x)) = 1/G(x)$

Nun kann die Suche nach einer Funktion beginnen, für die $G'(x) = G(x)$ gilt.
Mit der Umkehrfunktion von G gelingt die Integration von $f(x) = 1/x$.

↑ $G'(x) = G(x)$ Möglicher Einstieg



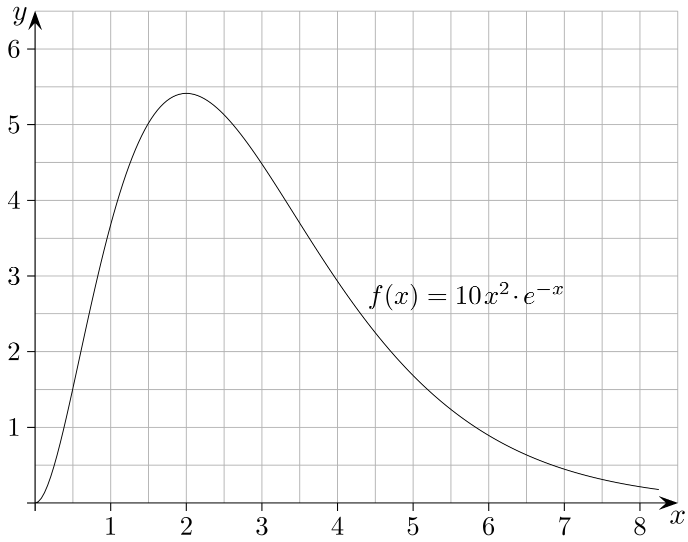
F muss monoton steigend sein. Der Graph (orange) kann skizziert werden.
Zu F existiert die Umkehrfunktion G, Skizze (schwarz).

Für G gilt $G'(x) = G(x)$.

$$\begin{aligned} F(G(x)) &= x && G \text{ ist die Umkehrfunktion von } F \text{ und umgekehrt.} \\ F'(G(x)) \cdot G'(x) &= 1 && \text{Beide Seiten wurden abgeleitet, links mit der Kettenregel.} \\ \frac{1}{G(x)} \cdot G'(x) &= 1 && F \text{ ist eine Stammfunktion von } f,\ F'(x) = f(x). \\ G'(x) &= G(x) \end{aligned}$$

Nun kann die Suche nach einer Funktion beginnen, für die $G'(x) = G(x)$ gilt.
Mit der Umkehrfunktion von G gelingt die Integration von $f(x) = 1/x$.

↑ Ausblick



Mit e-Funktionen werden Wachstums- und Zerfallsprozesse modelliert.
Für die Ableitung $f'(x) = 10x(2-x) \cdot e^{-x}$ wird die Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ benötigt, sowie $(e^{kx})' = e^{kx} \cdot k$, die e-Funktion bleibt stehen und wird mit der Ableitung des Exponenten multipliziert.
Mit den Logarithmen zur Basis e wird z. B. die Gleichung $e^x = 8$ von $x = \ln 8$ gelöst (der Logarithmus ist ein Exponent, ln Logarithmus naturalis).

↑ Historisches

Die Zahl e ging im 17. Jh. aus der Betrachtung der stetigen Verzinsung und aus der Berechnung der Fläche unter der Hyperbel $y = 1/x$ hervor. Diese gelang Grégoire de Saint-Vincent 1584-1667, nachdem Fermat 1607-1665 sich vergeblich darum bemüht hatte. Newton fand die Reihendarstellung von e. Ihm und Leibniz[1] war $(e^x)' = e^x$ bekannt. Euler 1707-1783 verwendete e als Basis für den natürlichen Logarithmus und entdeckte im Bereich der komplexen Zahlen den Zusammenhang $e^{\pi \mathrm{i}} + 1 = 0$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, sowie:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}}}}$$

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}}}}$$

↑

[1] Leibniz teilte seinem Florentiner Briefpartner v. Bodenhausen die zur Berechnung der Kettenlinie benötigte Zahl $e = 2{,}7182818$ mit. In seinem Nachlass findet sich die Berechnung. Sie ergäbe 12 korrekte Nachkommastellen, wenn Leibniz nicht einen Dezimalpunkt falsch platziert hätte.