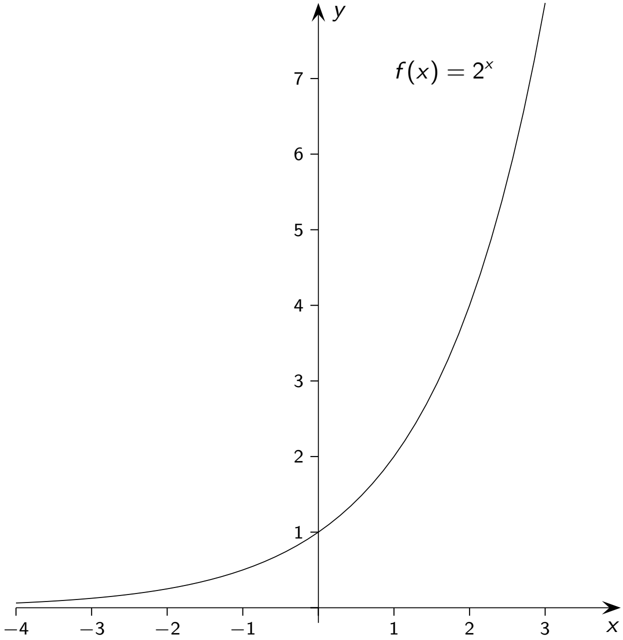
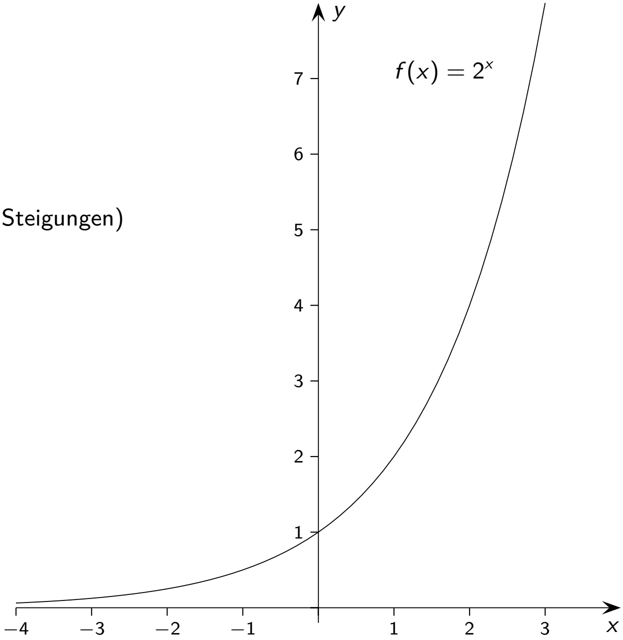
e-Funktion

groolfs.de

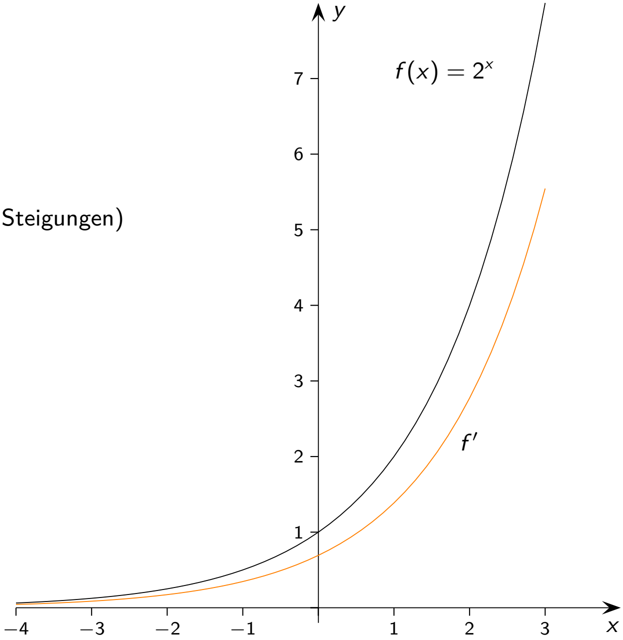
Graphische Differentiation



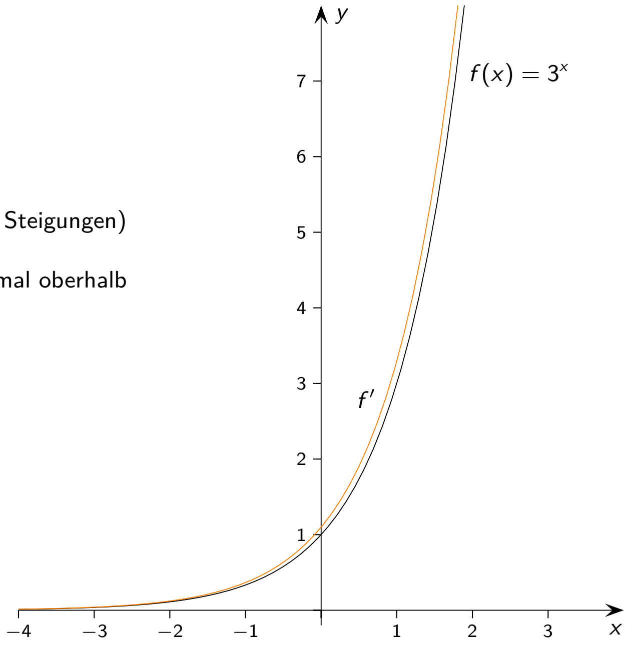
Graphische Differentiation
(Zeichnen der Tangenten und Ablesen der Steigungen)
der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$



Graphische Differentiation
(Zeichnen der Tangenten und Ablesen der Steigungen)
der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$
- die Ableitung liegt einmal unterhalb,

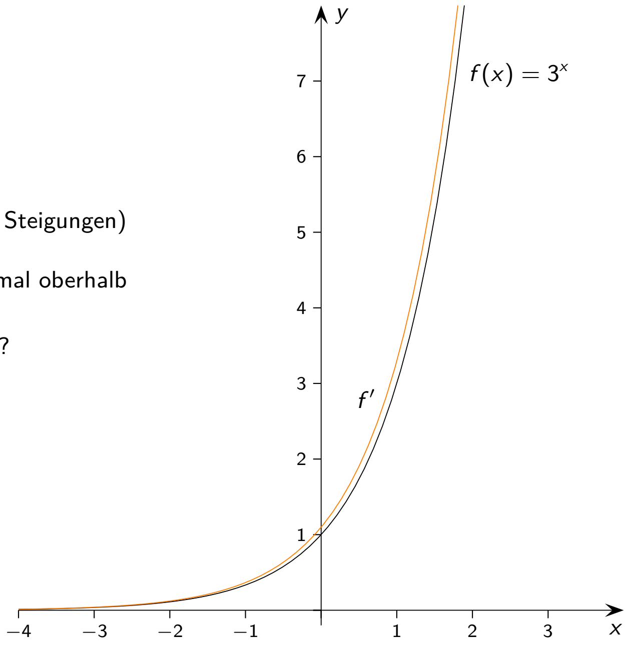


Graphische Differentiation
(Zeichnen der Tangenten und Ablesen der Steigungen)
der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$
- die Ableitung liegt einmal unterhalb, einmal oberhalb der jeweiligen Funktion - führt zur Frage:

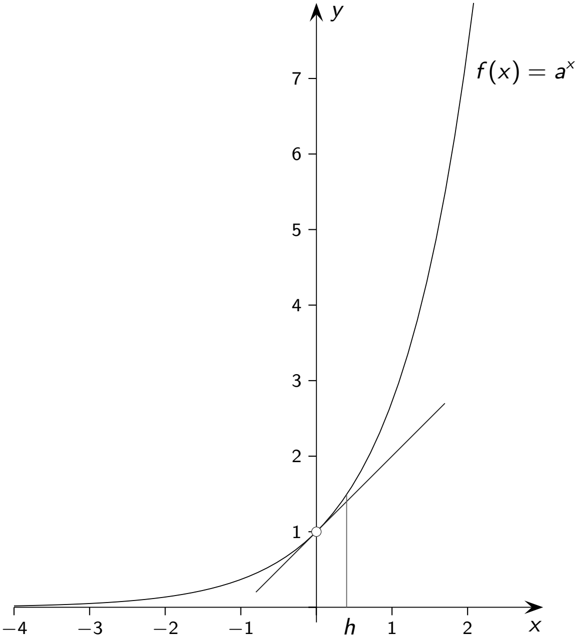


Graphische Differentiation
(Zeichnen der Tangenten und Ablesen der Steigungen) der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$
- die Ableitung liegt einmal unterhalb, einmal oberhalb der jeweiligen Funktion - führt zur Frage:

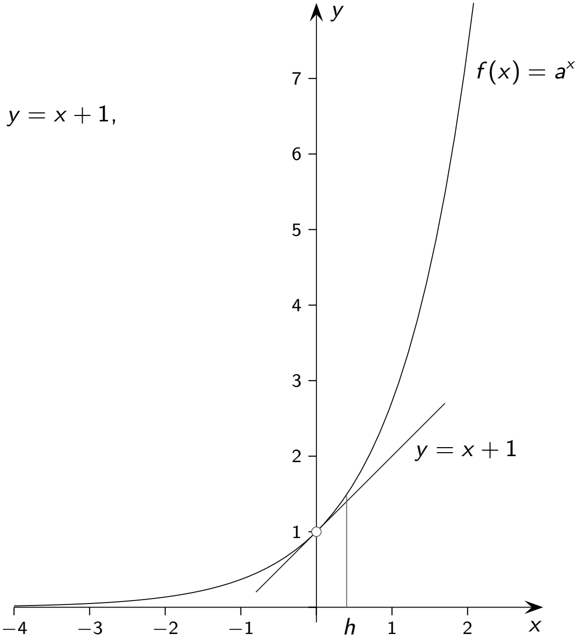
Gibt es ein a, für das gilt: $(a^x)' = a^x$?



Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre

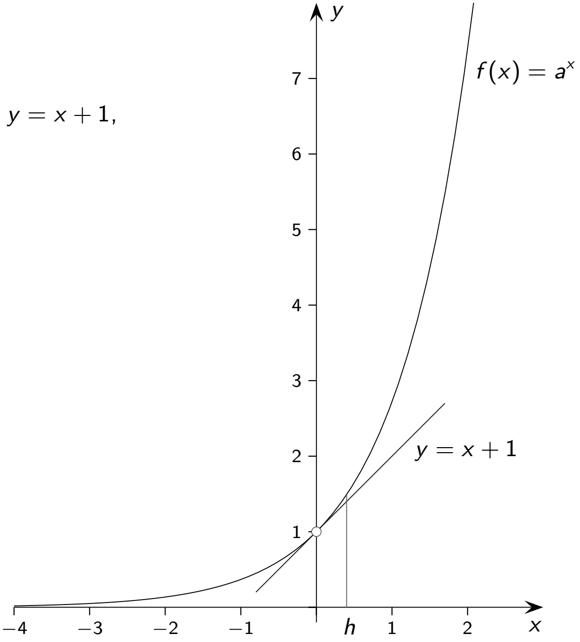


Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre $y = x + 1$, beachte $f'(0) = 1$ und $a^0 = 1$.



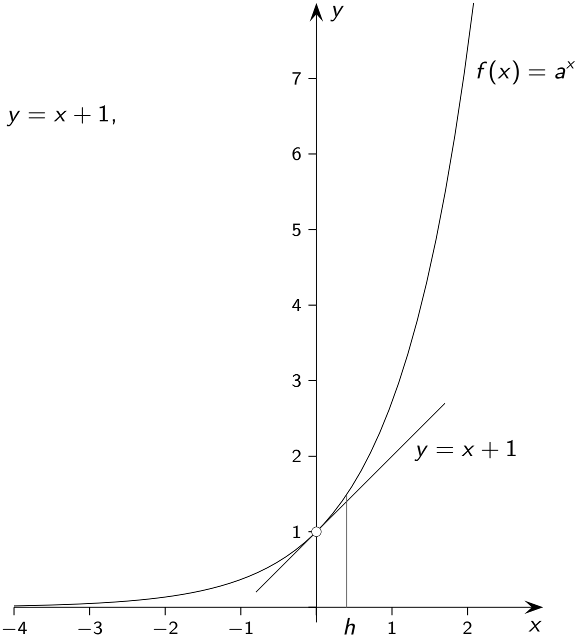
Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre $y = x + 1$,
beachte $f'(0) = 1$ und $a^0 = 1$.

Für kleine h müsste dann gelten:



Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre $y = x + 1$,
beachte $f'(0) = 1$ und $a^0 = 1$.

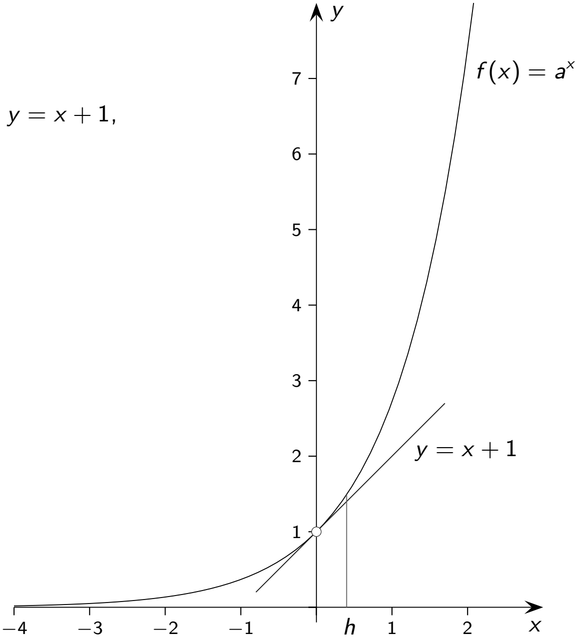
Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$



Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre $y = x + 1$,
beachte $f'(0) = 1$ und $a^0 = 1$.

Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \dfrac{1}{n}$ wäre für große n:

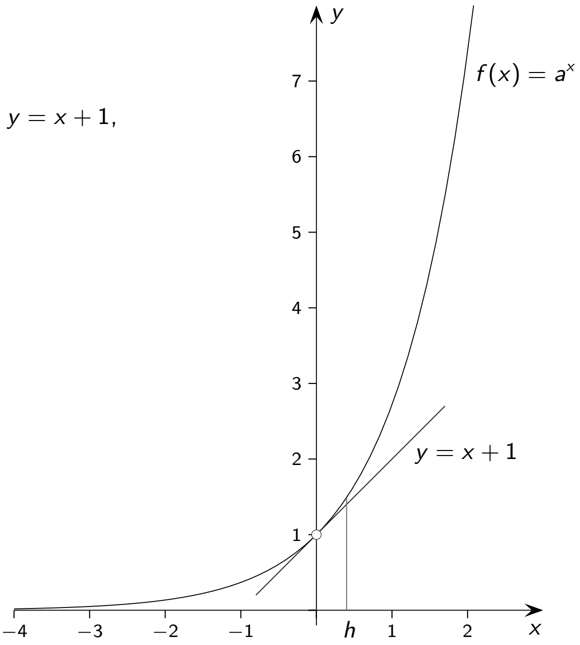


Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre $y = x + 1$,
beachte $f'(0) = 1$ und $a^0 = 1$.

Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \frac{1}{n}$ wäre für große n:

$$a^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n}$$

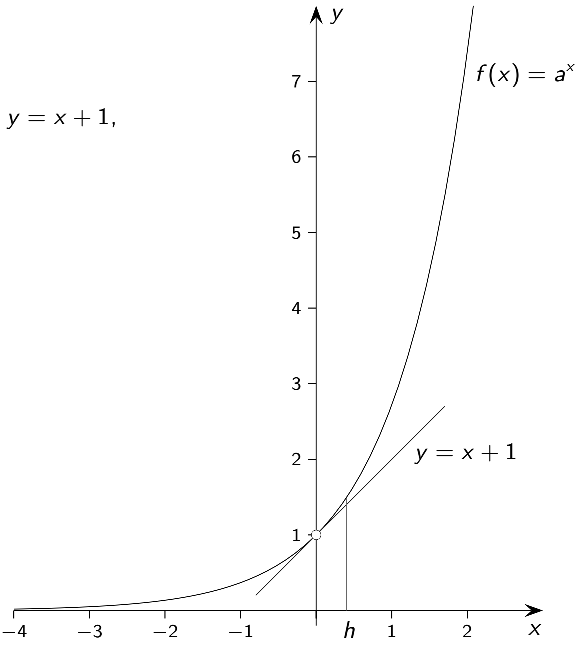


Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre $y = x + 1$,
beachte $f'(0) = 1$ und $a^0 = 1$.

Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \frac{1}{n}$ wäre für große n:

$$a^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n} \quad | \; (\;)^n$$

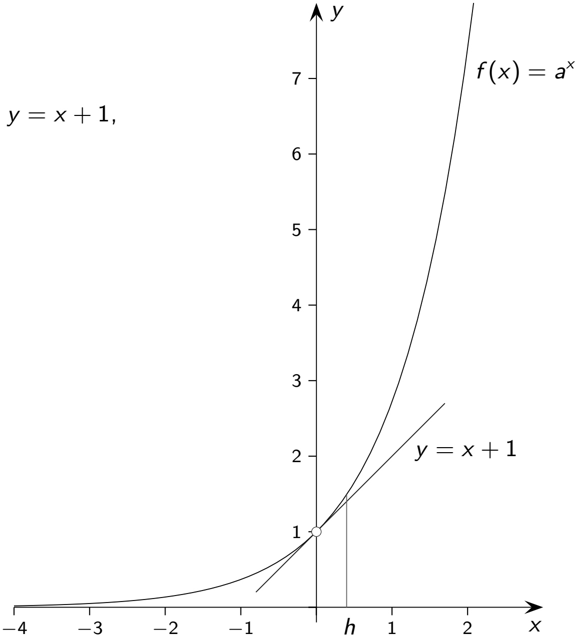


Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre $y = x + 1$,
beachte $f'(0) = 1$ und $a^0 = 1$.

Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \frac{1}{n}$ wäre für große n:

$$a^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n} \quad | \; (\;)^n \qquad \Longrightarrow$$

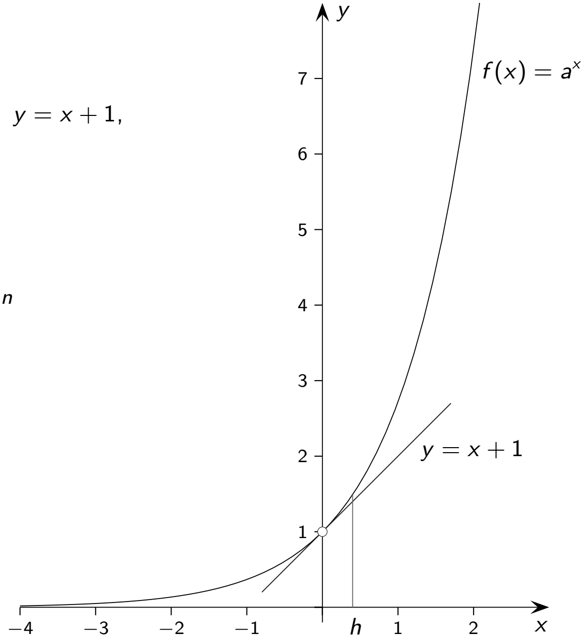


Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre $y = x + 1$,
beachte $f'(0) = 1$ und $a^0 = 1$.

Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \frac{1}{n}$ wäre für große n:

$$a^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n} \quad | \; (\;)^n \qquad \Longrightarrow \qquad a \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$



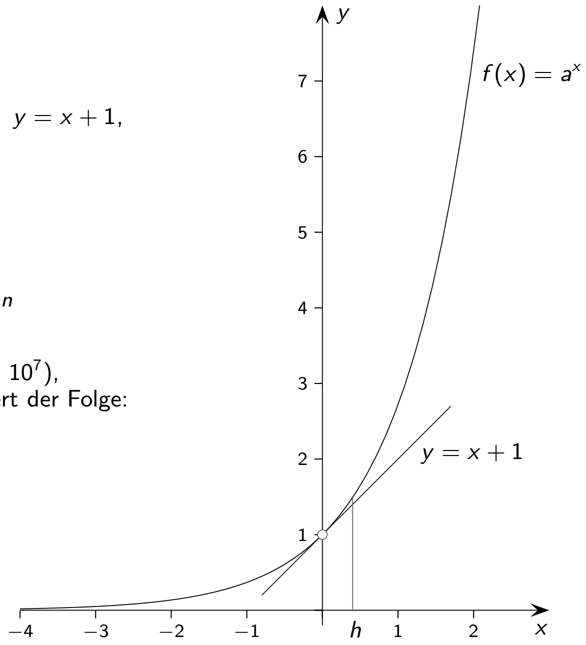
Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre $y = x + 1$, beachte $f'(0) = 1$ und $a^0 = 1$.

Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \frac{1}{n}$ wäre für große n:

$$a^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n} \quad | \; (\,)^n \qquad \Longrightarrow \qquad a \simeq (1 + \frac{1}{n})^n$$

Setzen wir für n große Zahlen ein $(10^4,\ 10^5,\ 10^6,\ 10^7)$, so erhalten wir gute Näherungen für den Grenzwert der Folge:



Die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$ wäre $y = x + 1$,
beachte $f'(0) = 1$ und $a^0 = 1$.

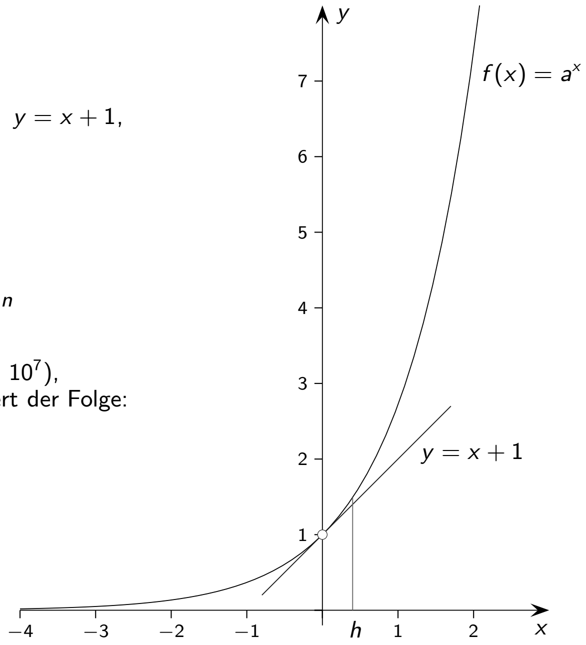
Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \frac{1}{n}$ wäre für große n:

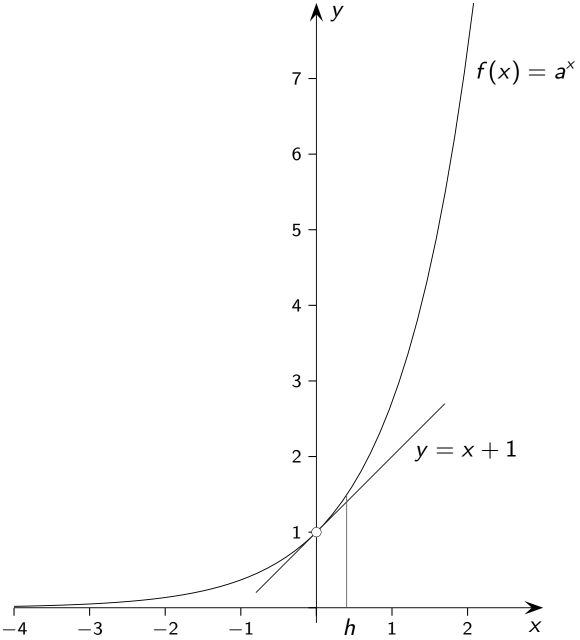
$$a^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n} \quad |\ (\ )^n \qquad \Longrightarrow \qquad a \simeq (1 + \frac{1}{n})^n$$

Setzen wir für n große Zahlen ein (10^4, 10^5, 10^6, 10^7),
so erhalten wir gute Näherungen für den Grenzwert der Folge:

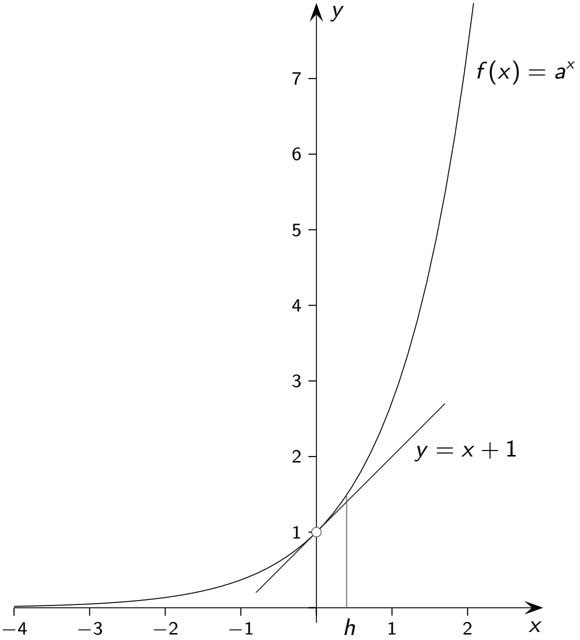
$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$



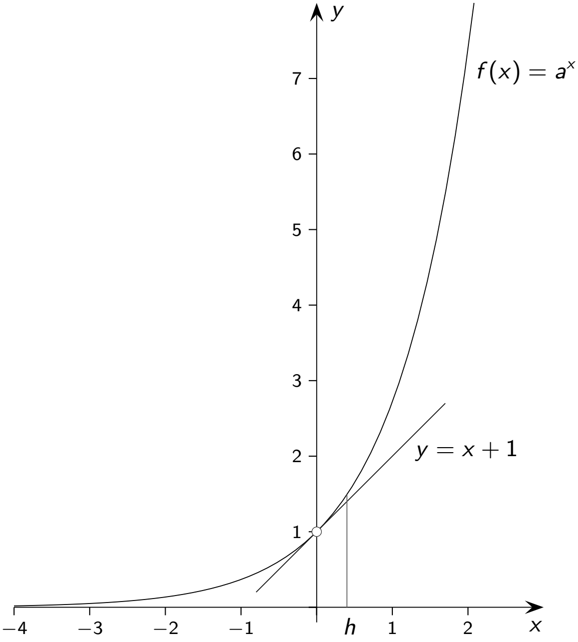
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	



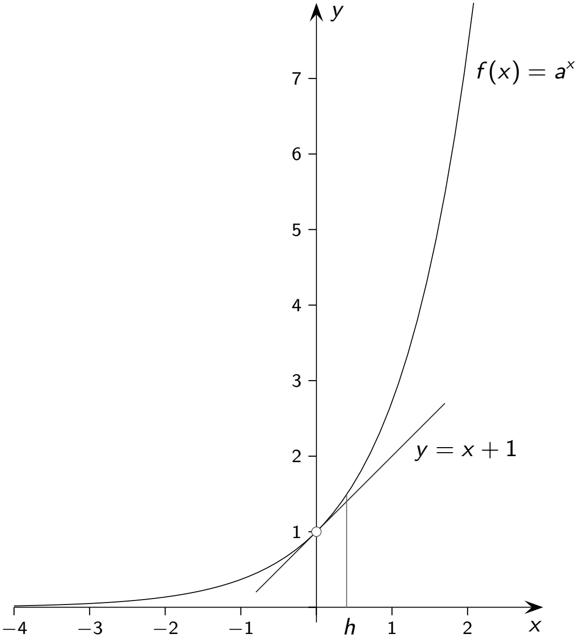
n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	



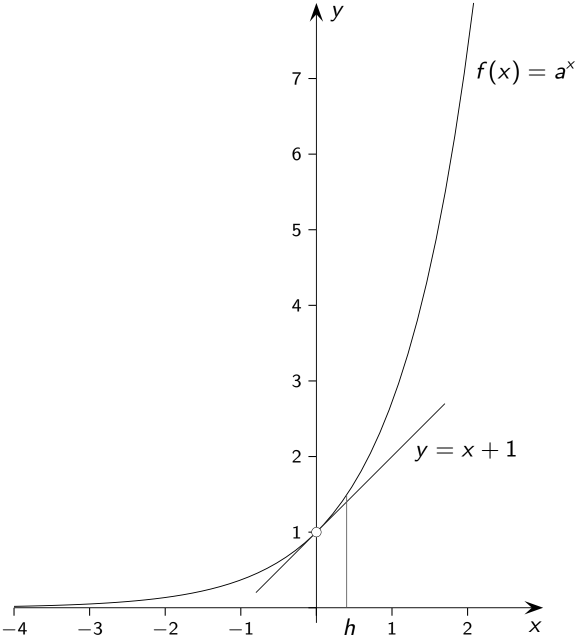
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	



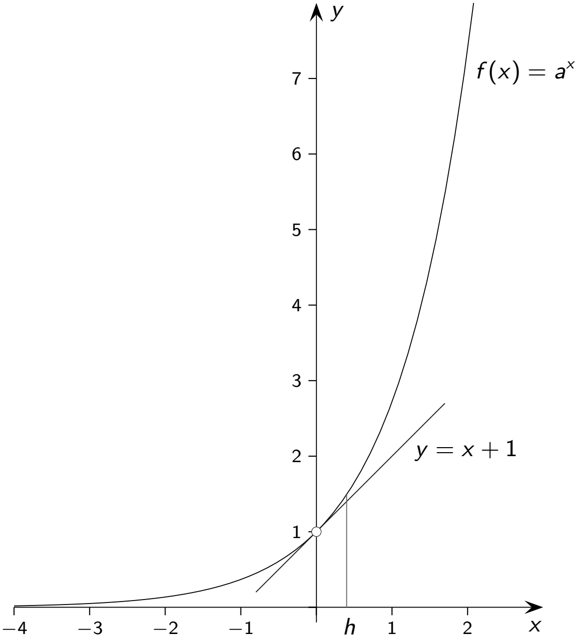
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	



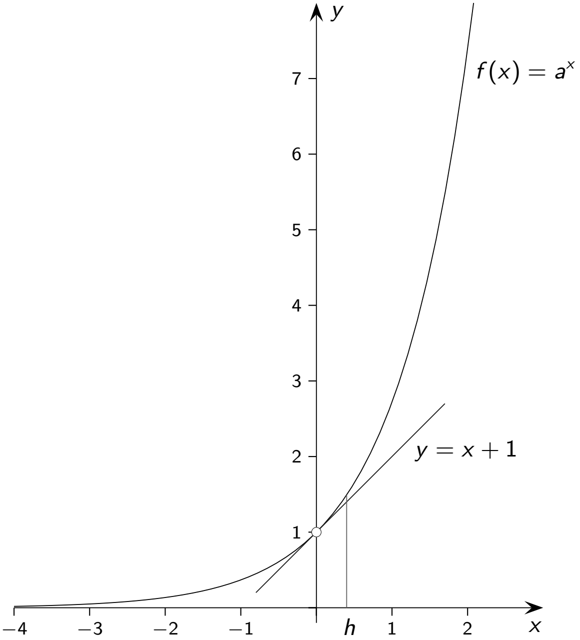
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	



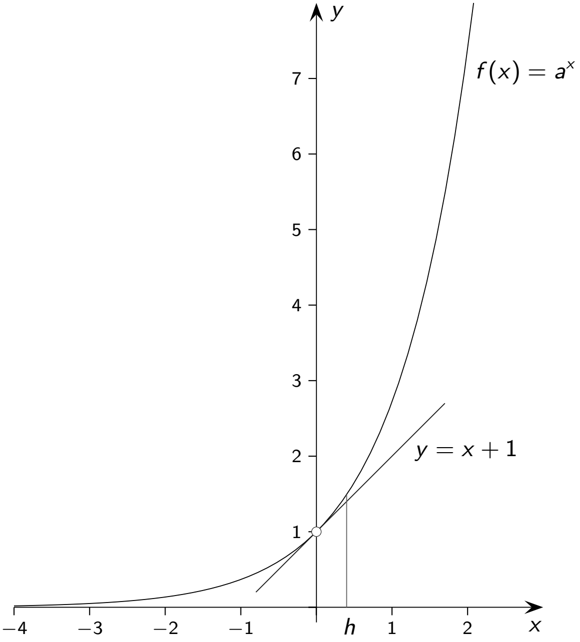
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	2,718 268 237
10^6	



n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	2,718 268 237
10^6	2,718 280 468
10^7	

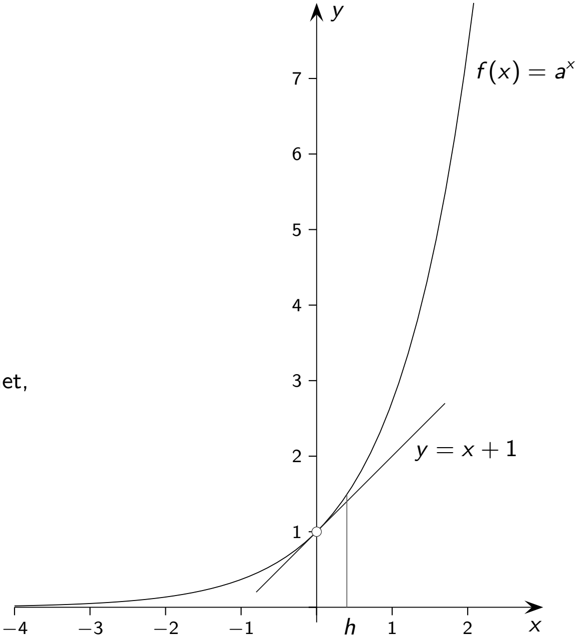


n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	2,718 268 237
10^6	2,718 280 468
10^7	2,718 281 763



n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	2,718 268 237
10^6	2,718 280 468
10^7	2,718 281 763

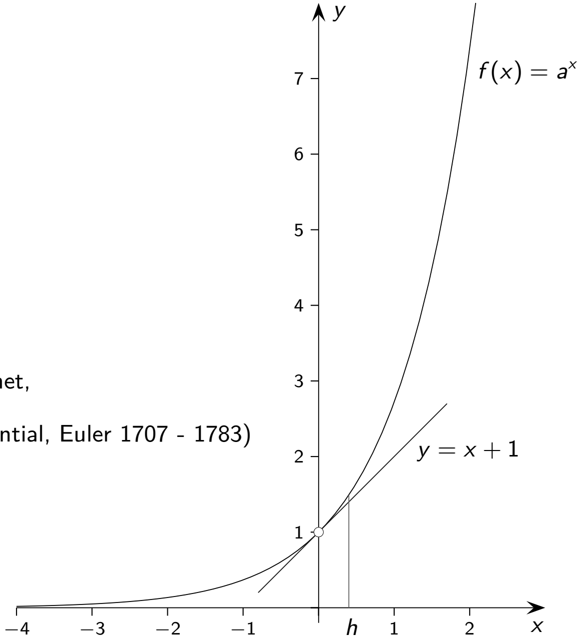
Der Grenzwert $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ wird mit e bezeichnet,



n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	2,718 268 237
10^6	2,718 280 468
10^7	2,718 281 763

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ wird mit e bezeichnet,

$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ \ldots$ (e von exponential, Euler 1707 - 1783)

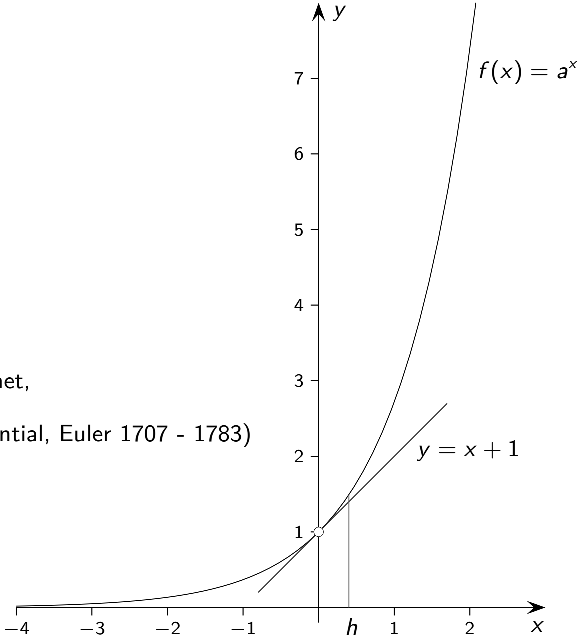


n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	2,718 268 237
10^6	2,718 280 468
10^7	2,718 281 763

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ wird mit e bezeichnet,

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ \ldots \qquad (e \text{ von exponential, Euler 1707 - 1783})$$

$(e^x)' = e^x$

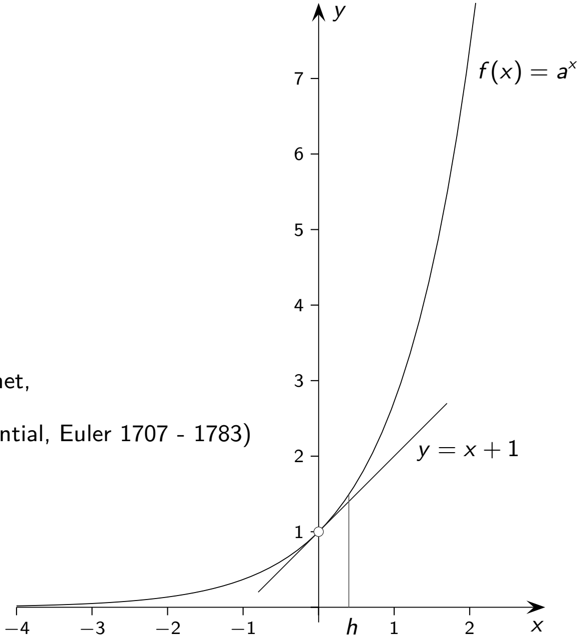


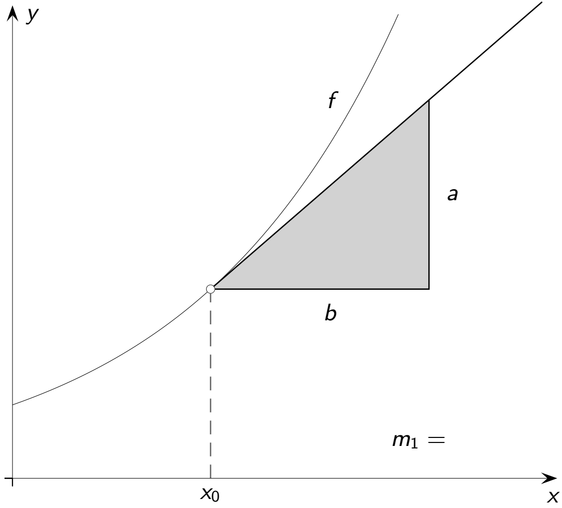
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	2,718 268 237
10^6	2,718 280 468
10^7	2,718 281 763

Der Grenzwert $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ wird mit e bezeichnet,

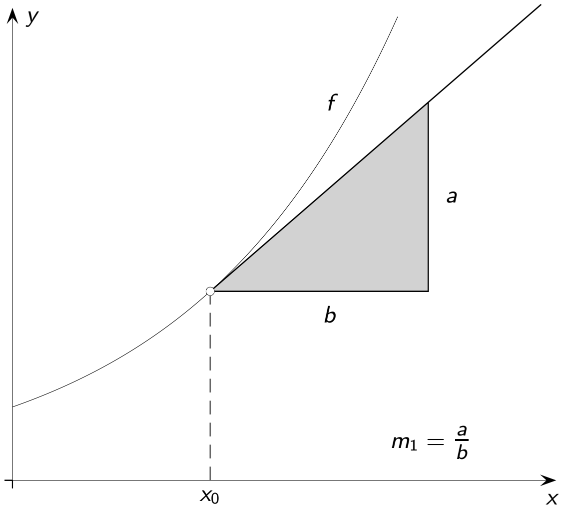
$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ \ldots$ (e von exponential, Euler 1707 - 1783)

$(e^x)' = e^x$ und $(e^{kx})' = ke^{kx}$

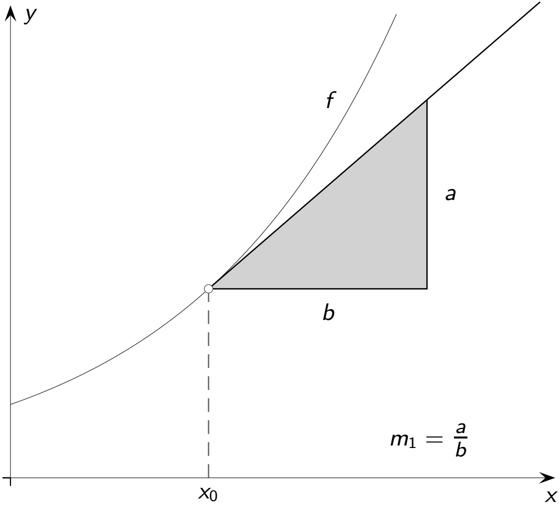


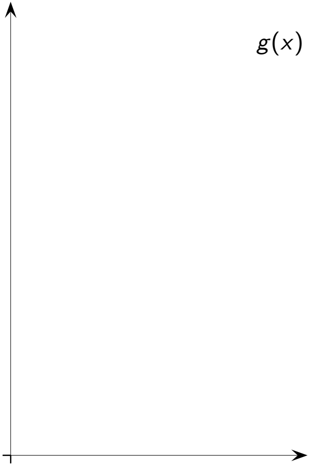


y
f
a
b
m₁ =
x₀
x

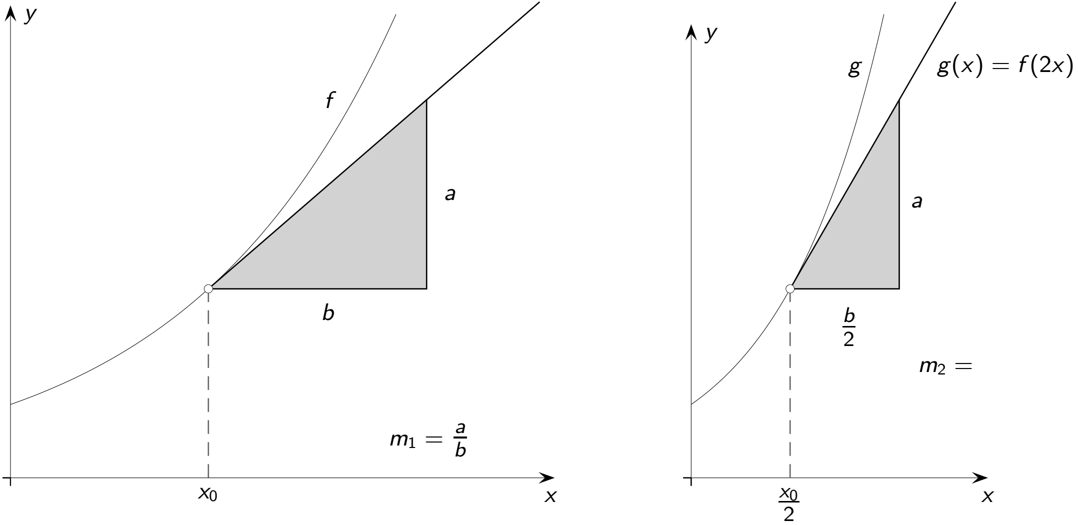


y
f
a
b
$m_1 = \frac{a}{b}$
x_0
x

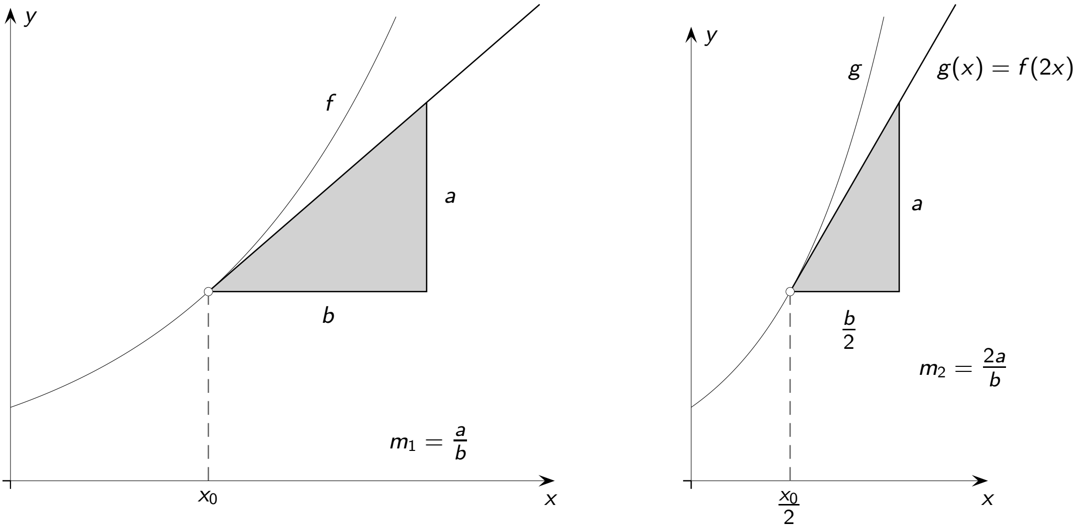




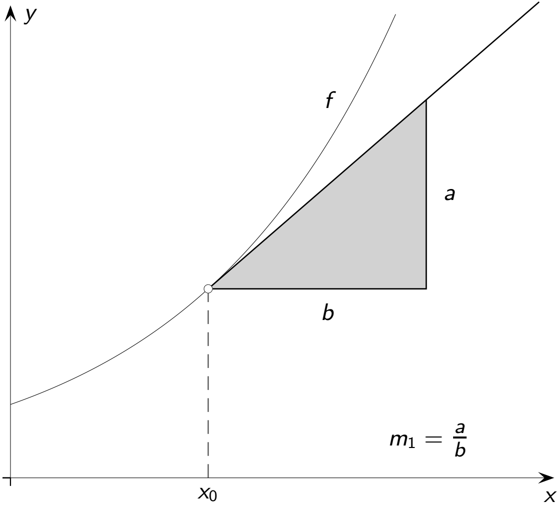
$$g(x) = f(2x)$$

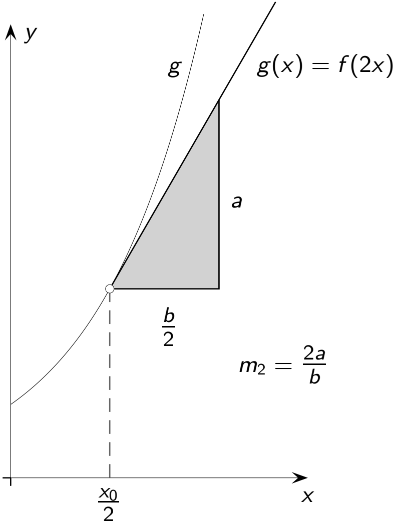


y
f
a
b
$m_1 = \frac{a}{b}$
x_0
x
y
g
$g(x) = f(2x)$
a
$\frac{b}{2}$
$m_2 =$
$\frac{x_0}{2}$
x

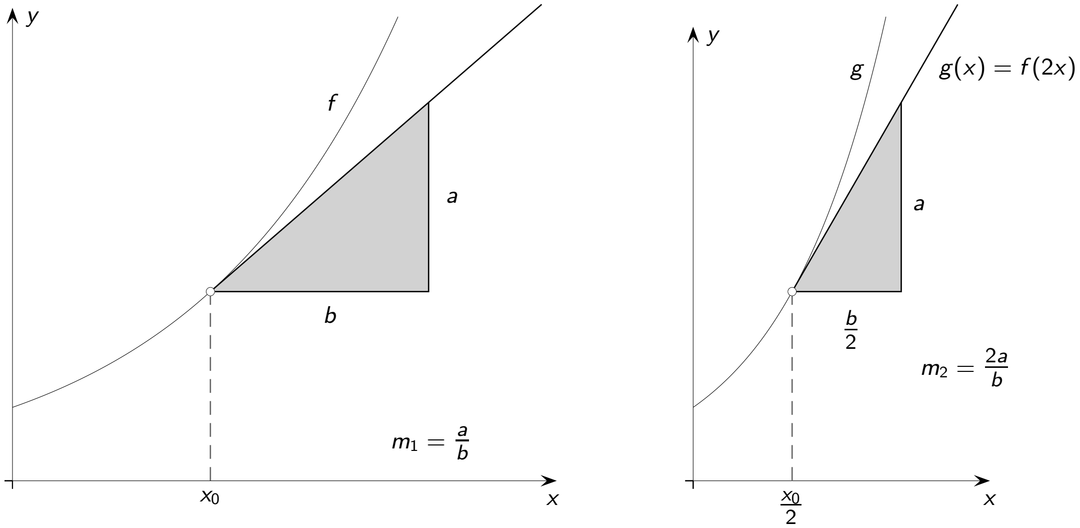


y
f
a
b
x_0
x
$m_1 = \frac{a}{b}$
y
g
$g(x) = f(2x)$
a
$\frac{b}{2}$
$m_2 = \frac{2a}{b}$
$\frac{x_0}{2}$
x

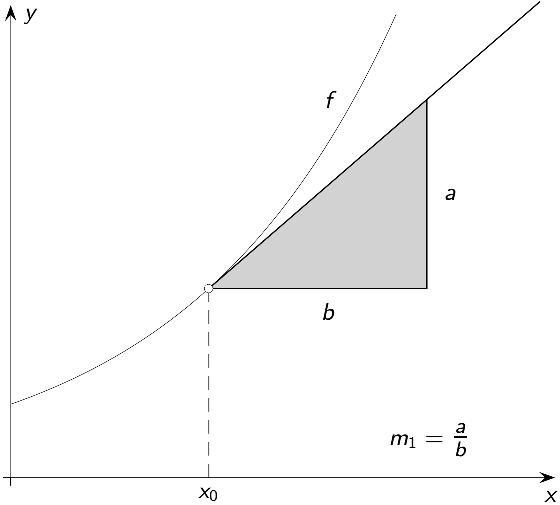


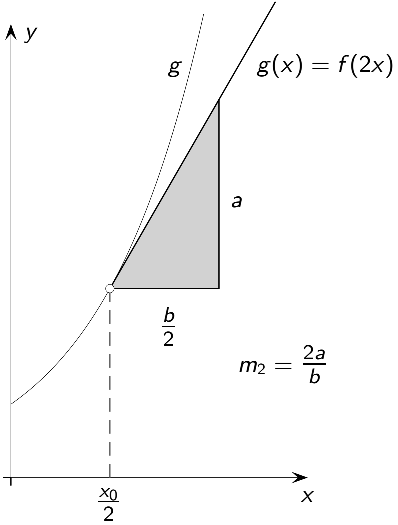


Der Graph von $g(x) = f(2x)$ ist gegenüber $f(x)$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung gestaucht.



Den Funktionswert, den f an der Stelle x_0 annimmt, nimmt g schon an der Stelle $\frac{x_0}{2}$ an.

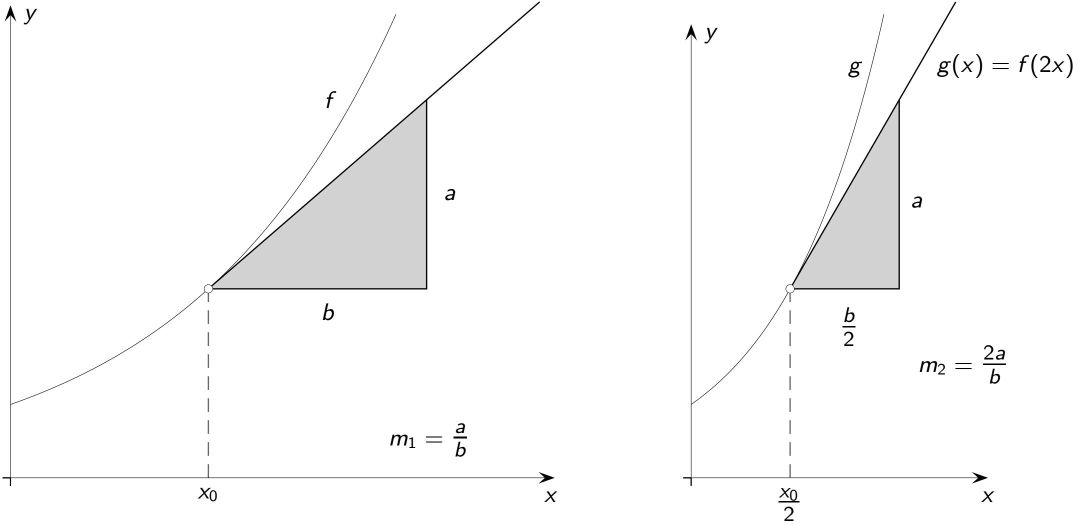




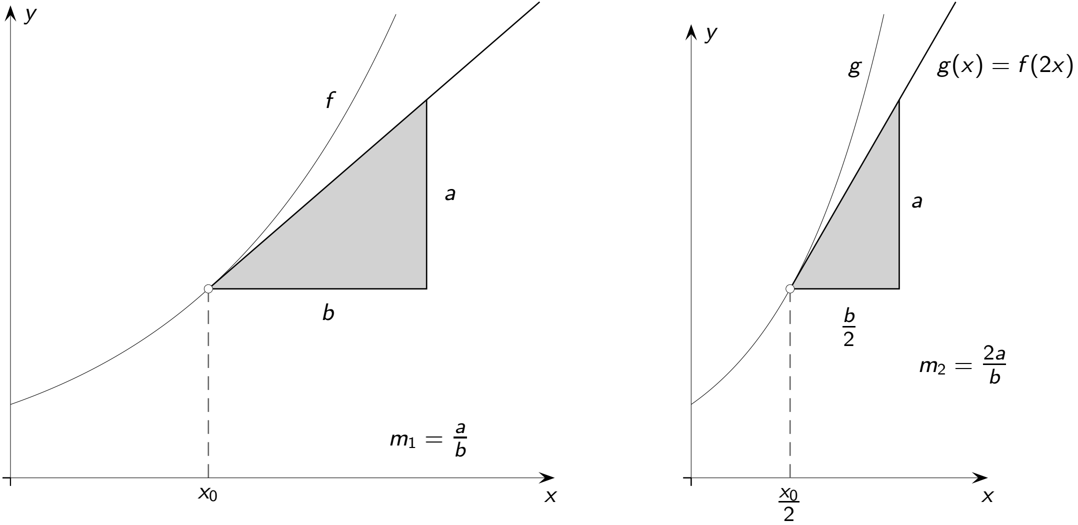
Die Steigungen an entsprechenden Stellen verdoppeln sich:

$$g'\left(\frac{x_0}{2}\right) = 2f'(x_0), \qquad 2x = x_0$$

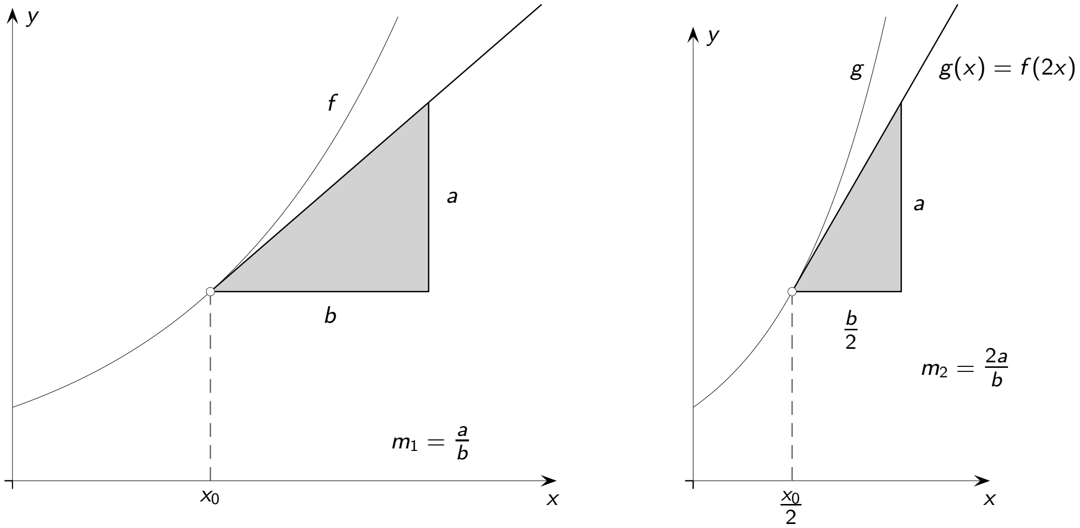
$$\Longrightarrow \quad g'(x) = 2f'(2x)$$



$$g(x) = f(2x) \implies g'(x) = 2f'(2x)$$



$$g(x) = f(kx) \implies g'(x) = k\,f'(kx)$$



$$g(x) = e^{kx} \implies g'(x) = k\,e^{kx}$$