Ableitungen

1. $f(x) = 4e^{-3x+1}$ $\qquad$ $f(x) = a\,e^{g(x)}, \quad f'(x) = a\,e^{g(x)} \cdot g'(x)$

2. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(x) = g\big(h(x)\big), \quad f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$

3. $f(x) = \cos(2x+1)$ $\qquad$ $\big(\sin(x)\big)' = \cos(x), \quad \big(\cos(x)\big)' = -\sin(x)$

4. $f(x) = 2^x$ $\qquad$ $e^{\ln a} = a$

5. $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$ $\qquad$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

6. $f(x) = (x^3+x)e^{-2x}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

1. $f(x) = 4e^{-3x+1}$ $\qquad$ $f'(x) = 4e^{-3x+1} \cdot (-3) = -12e^{-3x+1}$

2. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

3. $f(x) = \cos(2x+1)$ $\qquad$ $f'(x) = -\sin(2x+1) \cdot 2$

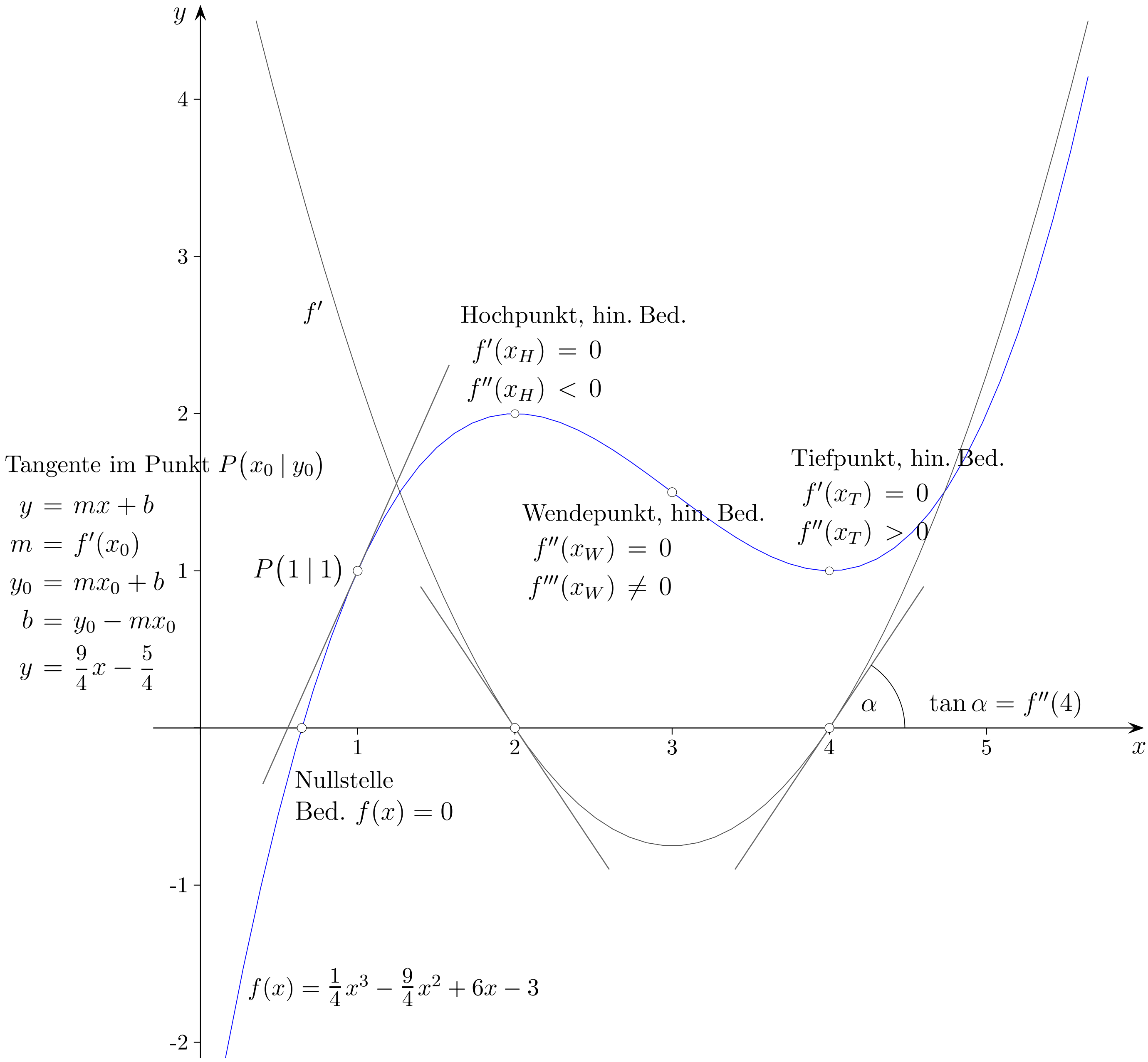
4. $f(x) = 2^x$ $\qquad$ $f(x) = e^{x \cdot \ln 2}, \quad f'(x) = e^{x \cdot \ln 2} \cdot \ln 2 = 2^x \cdot \ln 2$

5. $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$ $\qquad$ $f'(x) = x(3x+2)e^{3x}$

6. $f(x) = (x^3+x)e^{-2x}$ $\qquad$ $f'(x) = (3x^2+1)e^{-2x} - 2(x^3+x)e^{-2x} = e^{-2x}(\;\dots\;)$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad$ $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

Kurvendiskussion



$H(2 \mid 2)$, $T(4 \mid 1)$, $W\left(3 \mid \frac{3}{2}\right)$

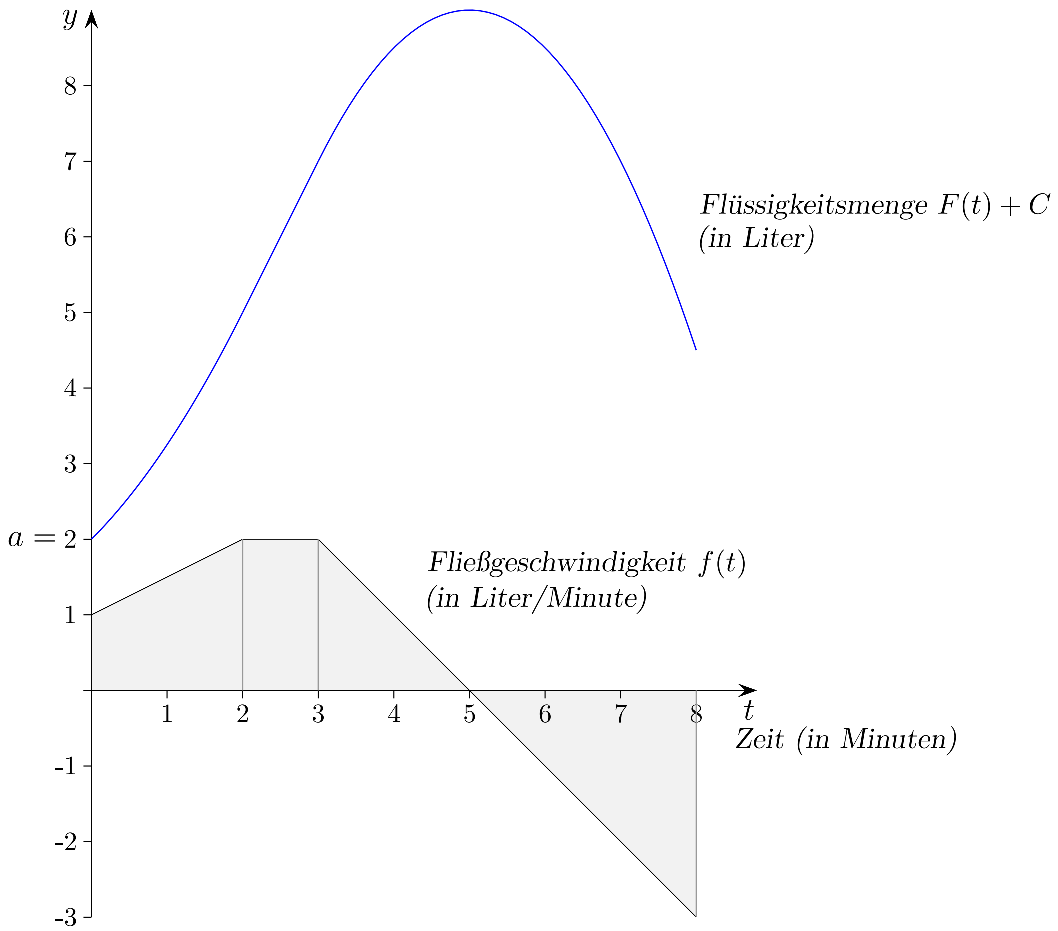
Mittlere Änderungsrate von f auf dem Intervall $[1;3]$: $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{1}{4}$

Die Nullstelle x_N wird hier mit dem GTR ermittelt, $x_N \approx 0{,}645$.

Bei der Bestimmung ganzrationaler Funktionen werden die Bedingungen $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ und $f''(x) \neq 0$ nicht verwendet.

Eine Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 schließt mit der x-Achse einen Winkel α mit $\tan\alpha = f'(x_0)$ ein. Hier liegt eine Tangente an den Graphen von f' vor, $\alpha \approx 56{,}3°$.

Momentane Änderungsrate, Bestandsfunktion



Die Bestandsfunktion $F(t) + C$ ist die Aufleitung von $f(t)$.
Mit der Konstanten C wird der Bestand a zu einer bestimmten Zeit (hier zur Zeit $t_0 = 0$, häufig Anfangsbestand) berücksichtigt.

$$\begin{aligned} F(t_0) + C &= a \\ C &= a - F(t_0) \end{aligned}$$

Bestandsfunktion

$$t \to F(t) + (a - F(t_0))$$

nebenbei gilt hier:

$$t \to \begin{cases} 1/4t^2 + t + 2 & 0 \le t < 2 \\ 2\,(t-2) + 5 & 2 \le t < 4 \\ -1/2\,(t-3)^2 + 2(t-3) + 7 & 4 \le t \le 8 \end{cases}$$

Wachstum

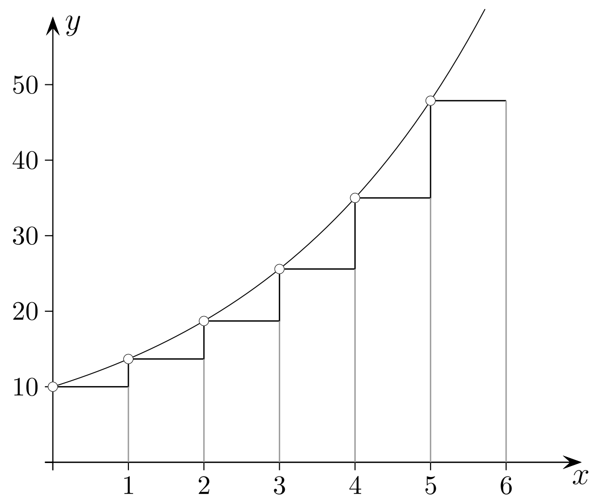
exponentielles Wachstum $f(x) = ae^{kx},\ k > 0$

a) Anfangsbestand 20, Wachstum 4 % pro Zeiteinheit, Funktion?

$$\begin{aligned} f(x) &= 20 \cdot 1{,}04^x && f(1) = 20 \cdot 1{,}04 = 20 + \frac{4}{100} \cdot 20,\ \ f(2) = f(1) \cdot 1{,}04 = 20 \cdot 1{,}04^2 \\ &= 20 \cdot e^{x \cdot \ln 1{,}04} && \text{exakte Version der Zinseszinsfunktion} \\ &= 20 \cdot e^{0{,}03922 \cdot x} && \\ &= 20 \cdot e^{0{,}04x} && \text{genähert} \end{aligned}$$

b) Anfangsbestand 10, nach 4 Zeiteinheiten beträgt der Bestand 35, Funktion?

$$\begin{aligned} 10 \cdot e^{k \cdot 4} &= 35 \\ e^{k \cdot 4} &= \tfrac{35}{10} \qquad |\ln \\ k \cdot 4 &= \ln 3{,}5 \\ k &\approx 0{,}3132 \\ f(x) &= 10 \cdot e^{0{,}3132x} \end{aligned}$$

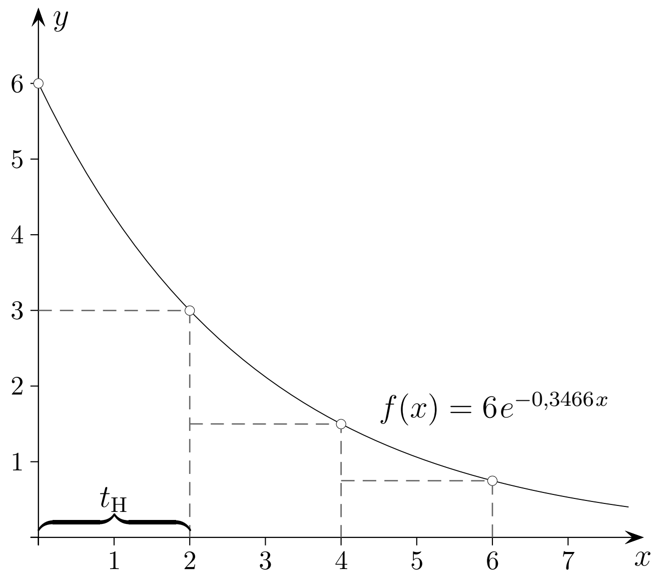


exponentielle Abnahme (Zerfall) $f(x) = ae^{-kx},\ k > 0$

Anfangsbestand 20, Abnahme 4 % pro Zeiteinheit, Funktion?

$$\begin{aligned} f(x) &= 20 \cdot 0{,}96^x && f(1) = 20 \cdot 0{,}96 = 20 - \frac{4}{100} \cdot 20,\ \ f(2) = f(1) \cdot 0{,}96 = 20 \cdot 0{,}96^2 \\ &= 20 \cdot e^{x \cdot \ln 0{,}96} && \text{exakt} \\ &= 20 \cdot e^{-0{,}04082 \cdot x} && \\ &= 20 \cdot e^{-0{,}04x} && \text{genähert} \end{aligned}$$

Bei der exponentiellen Abnahme wird der Wachstumsprozess von rechts nach links betrachtet, sein Graph also an der y-Achse gespiegelt.



Bei der exponentiellen Abnahme ist die Zeitspanne, in der sich ein Bestand halbiert, stets gleich und unabhängig vom Anfangswert, es gilt $1 = 2e^{-k\cdot t_{\mathrm{H}}}$, $t_{\mathrm{H}} = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{k}$ Halbwertszeit. Entsprechend ist beim exponentiellen Wachstum die Zeitspanne, in der sich ein Bestand verdoppelt, stets gleich und unabhängig vom Anfangswert, es gilt $2 = 1e^{k\cdot t_{\mathrm{V}}}$, $t_{\mathrm{V}} = \frac{\ln 2}{k}$ Verdopplungszeit.

a) Exponentieller Zerfall, Anfangsbestand 6, Halbwertszeit $t_{\mathrm{H}} = 2$ Zeiteinheiten , Funktion?

$f(x) = 6e^{-0{,}3466x}$

b) Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x) = e^{-3x}$ an der Stelle $x = 0$?

$y = -3x + 1$

c) Wie groß ist der Inhalt der Fläche unterhalb des Graphen von $f(x) = e^{2x}$ in den Grenzen von 0 bis 3?

$$\int_0^3 e^{2x}\,dx = \left|\frac{1}{2}e^{2x}\right|_0^3 = \frac{1}{2}e^6 - \frac{1}{2}$$

begrenztes Wachstum (z.B. Erwärmung) $f(x) = G - ae^{-kx}$

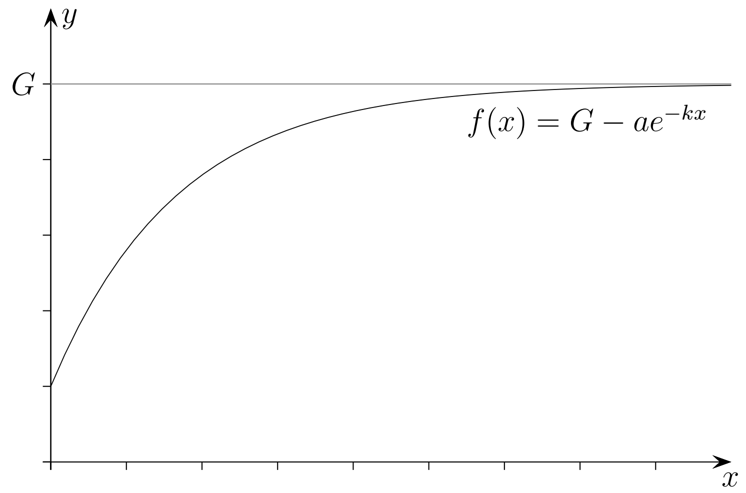
a) Anfangsbestand 8, Grenze $G = 40$,
Abnahme der Differenz Grenze − Bestand um 5% pro Zeiteinheit, Funktion?

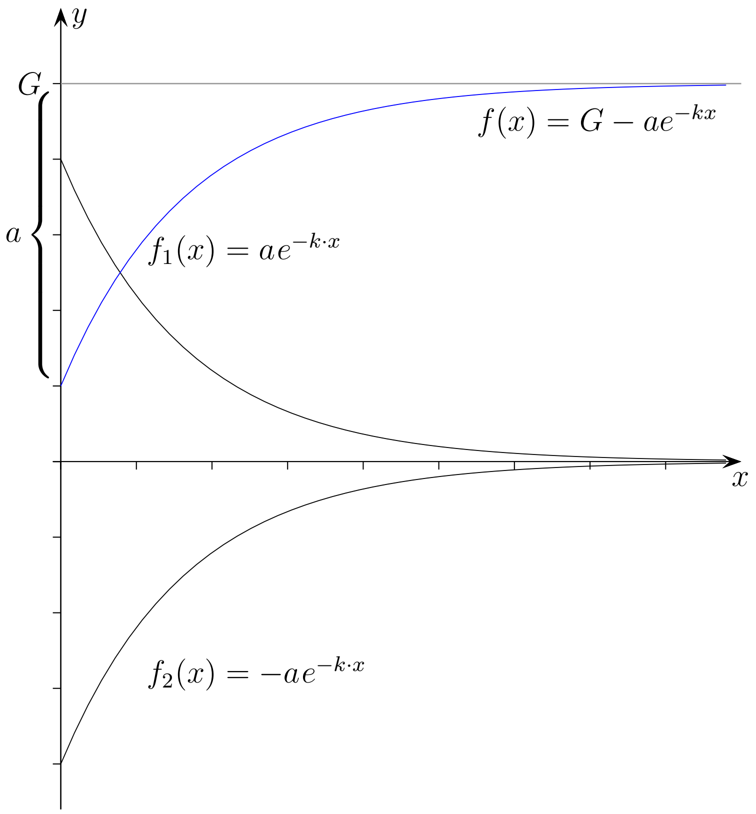
$$\begin{aligned} f(0) &= G - a = 8 \\ a &= 32 \\ f(x) &= 40 - 32 \cdot e^{-0{,}05\cdot x} \end{aligned}$$

b) Anfangsbestand 6, $G = 25$, nach 10 Zeiteinheiten beträgt der Bestand 20, Funktion?

$$\begin{aligned} f(x) &= 25 - 19 \cdot e^{-k\cdot x} \\ f(10) &= 25 - 19 \cdot e^{-k\cdot 10} = 20 \\ k &\approx 0{,}1335 \end{aligned}$$

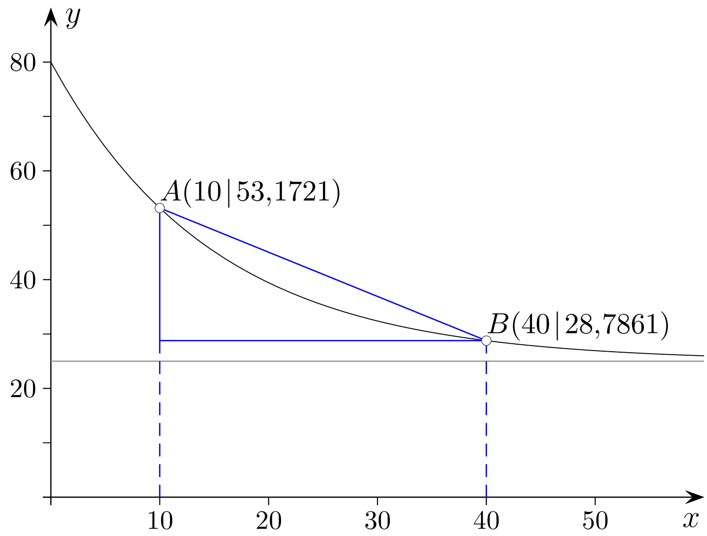
Begrenztes Wachstum





Aus der Abbildung ist ersichtlich, wie der Funktionsterm des begrenzten Wachstums durch Spiegelung und Verschiebung entsteht.

Abkühlung $\quad f(x) = G + ae^{-kx}, \quad f(x) = 25 + 55 \cdot e^{-0{,}0669\,x}$



Durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate auf dem Intervall $[a;b] = [10;40]$?

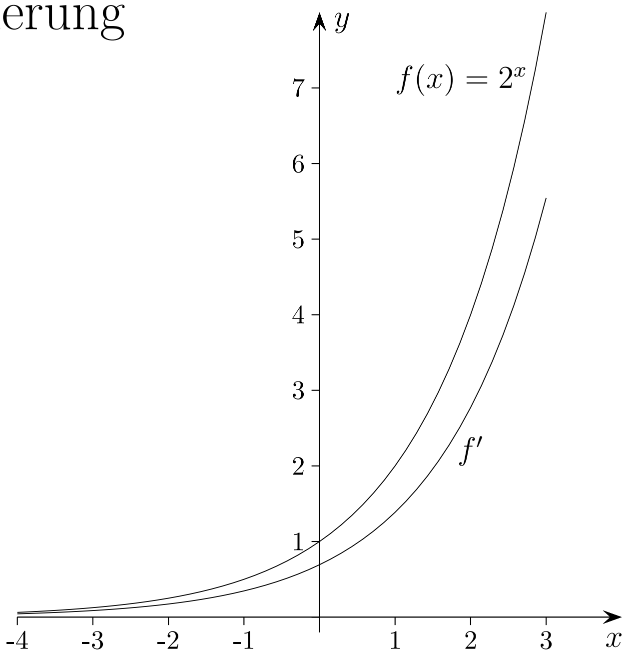
$$\text{Sekantensteigung} \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{28{,}7861 - 53{,}1721}{40 - 10} \approx -0{,}813$$

Statt auf dem Graphen von A nach B (mit unterschiedlichen lokalen Änderungsraten) zu gelangen, kann von A aus mit konstanter, negativer Steigung m (Änderungsrate) B erreicht werden.

Gleichungen

1. $5e^{-4x} = 20$ $\qquad x = -\dfrac{\ln 2}{2}$
2. $x \cdot e^{-x} = 0$ $\qquad x = 0, \quad e^{ax} > 0, \quad$ Satz vom Nullprodukt
3. $(x^2 - 2x)e^x = 0$ $\qquad x_1 = 0, \;\; x_2 = 2$
4. $(x^2 - 4x - 5)e^{-2x} = 0$ $\qquad x_1 = -1, \;\; x_2 = 5$
5. $\ln x = 2$ $\qquad x = e^2$

Zur Erinnerung

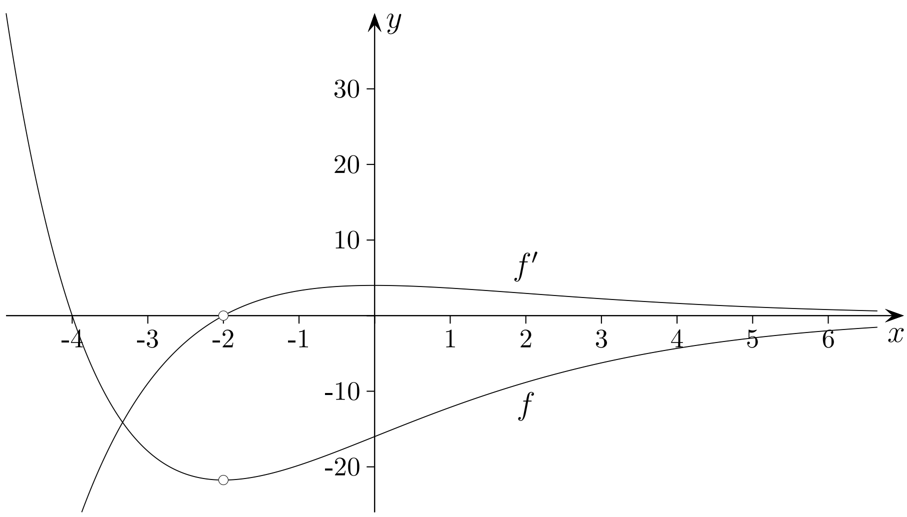


Mit e als Basis stimmt f' mit f überein.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+1)e^{-2x} = 0$ Die e-Funktion dominiert.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x^4)e^{0,1x} = \infty$

c) Bei der Kurvendiskussion kann für die hinreichende Bedingung für Extrema ein Vorzeichenwechsel von f' untersucht werden. Damit kann f'' eingespart werden, falls nicht noch die Wendestellen zu ermitteln sind, z. B.
$f(x) = (-4x-16)e^{-0,5x}$, $f'(x) = (2x+4)e^{-0,5x}$, $f'(-2) = 0$,
VZW an der Stelle $x = -2$ von $-$ nach $+$, daher Tiefpunkt von f an der Stelle $x = -2$.



Funktion $\quad f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

1. Symmetrie liegt nicht vor.

2. Nullstellen:
   Bed.: $f(x) = 0$
   $x = 0$

3. Extrema:
   notw. Bed.: $f'(x) = 0$

   $f'(x) = e^{-x}\,(2x - x^2) \qquad f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

   $x_1 = 0 \qquad f''(0) = 2 \qquad \mathrm{T}(\,0 \mid 0\,)$

   $x_2 = 2 \qquad f''(2) < 0 \qquad \mathrm{H}(\,2 \mid \frac{4}{e^2}\,)$

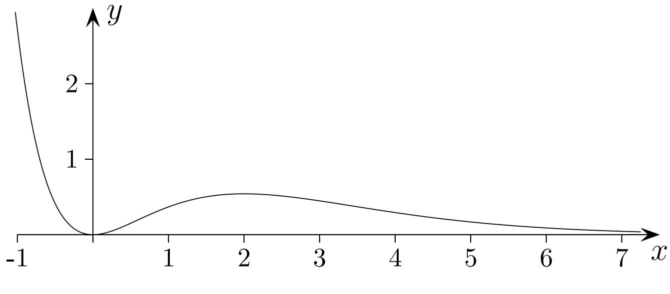
   alternative Begründung

   $y = 2x - x^2 = -x(x-2)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel.
   An der Nullstelle $x = 0$ liegt für die Parabel und damit für f' ein VZW von $-$ nach $+$ vor, f hat hier einen Tiefpunkt.
   An der Nullstelle $x = 2$ ist ein VZW von $+$ nach $-$, daher hat f an dieser Stelle einen Hochpunkt.

4. Verhalten von f für $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ (Globalverlauf)

   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$



5. Wendestellen:
   notw. Bed.: $f''(x) = 0$

   $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$

   Begründung für die Existenz der Wendepunkte:
   Zwischen Tief- und Hochpunkt muss ein Wendepunkt liegen.
   Ein Weiterer liegt wegen des Hochpunkts und dem Verhalten von f für $x \longrightarrow \infty$ vor.

6. Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 1$ $\qquad y = \frac{1}{e}x$

Skizziere den Graphen von

a) $f(x) = e^{-0{,}5x} + 1$

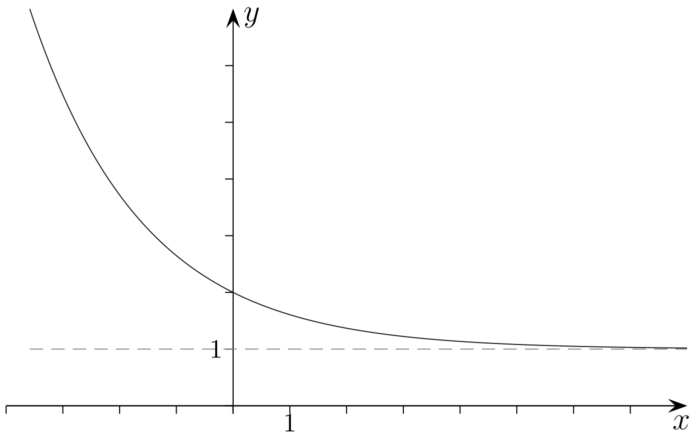
b) $f(x) = 5 - e^{-0{,}5x}$

c) $f(x) = e^{0{,}5x} - 1$

d) $f(x) = e^{0{,}5(x-3)} - 1$

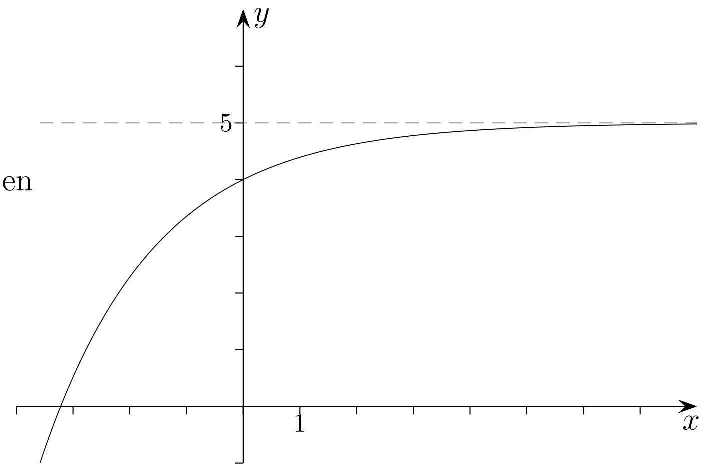
a) $f(x) = e^{-0,5x} + 1$

$f(x) = e^{-0,5x}$, Graph skizzieren und
in y-Achsenrichtung um 1 verschieben



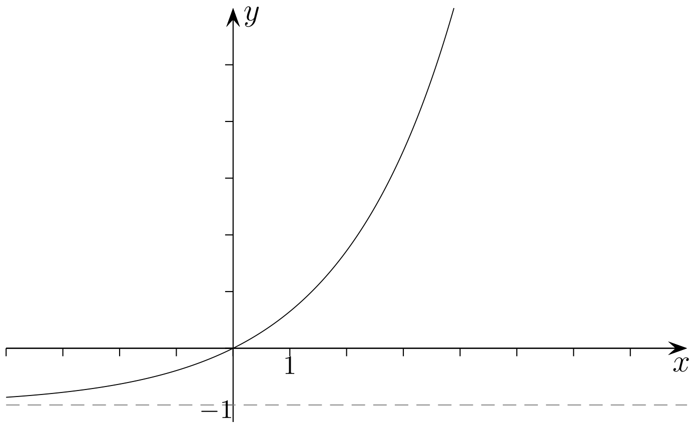
b) $f(x) = 5 - e^{-0,5x}$

$f(x) = e^{-0,5x}$, Graph skizzieren,
an der x-Achse spiegeln
und in y-Achsenrichtung um 5 verschieben



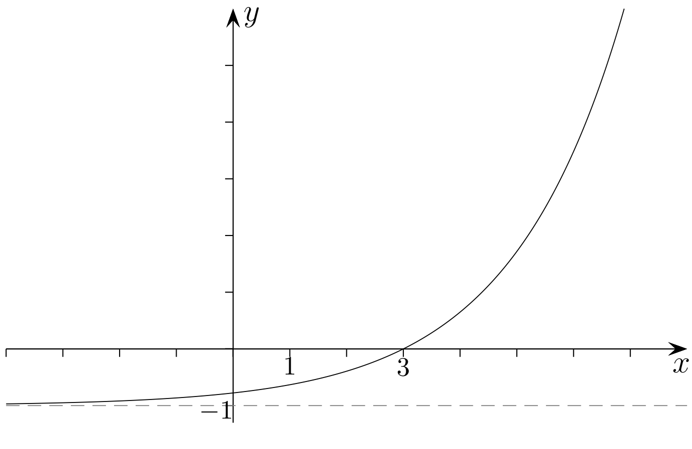
c) $f(x) = e^{0,5x} - 1$

$f(x) = e^{0,5x}$, Graph skizzieren und
in y-Achsenrichtung um -1 verschieben



d) $f(x) = e^{0,5(x-3)} - 1$

$f(x) = e^{0,5x} - 1$, Graph skizzieren und
in x-Achsenrichtung um 3 verschieben



1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = e^x + 1$.

   a) Bestimmen Sie: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

   b) Der Graph der Funktion g kann aus dem Graphen von f durch Spiegeln an der y-Achse und Verschieben um 3 in positive y-Richtung erzeugt werden. Geben Sie einen Funktionsterm von g an.

2. Betrachtet wird die Funktion $f(x) = x \cdot e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

   a) Geben Sie die Nullstelle von f an.

   b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F(x) = (x-1) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.

   c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse und den Geraden zu $x = 0$ und $x = 1$ eingeschlossen wird.

3. Zu Beginn einer Beobachtung befinden sich 20 Bakterien in einer Bakterienkultur. Diese Bakterien vermehren sich stündlich um 15 %.

   a) Welche e-Funktion beschreibt dieses Wachstum?

   b) Ermitteln Sie die Verdopplungszeit.

   c) Nach wie vielen Stunden sind 2000 Bakterien vorhanden?

4. Bei einem radioaktiven Stoff zerfällt jedes Jahr 10 % der noch vorhandenen Masse.

   a) Berechnen Sie (in Prozent), wie viel nach 10 Jahren noch vorhanden ist.

   b) Welche e-Funktion beschreibt diesen Zerfall?

   c) Ermitteln Sie die Halbwertszeit.

   d) Wieviel Prozent der jeweils vorhandenen Masse zerfällt pro Monat?

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = e^x + 1$.

   a) Bestimmen Sie: $\int_0^1 f(x)\,dx$ $\qquad$ $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[e^x + x\right]_0^1 = e$

   b) Der Graph der Funktion g kann aus dem Graphen von f durch Spiegeln an der y-Achse und Verschieben um 3 in positive y-Richtung erzeugt werden. Geben Sie einen Funktionsterm von g an. $\qquad$ $e^{-x} + 4$

2. Betrachtet wird die Funktion $f(x) = x \cdot e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

   a) Geben Sie die Nullstelle von f an. $\qquad$ Die Nullstelle ist 0.

   b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F(x) = (x-1) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.

   $$F'(x) = e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x = f(x)$$

   Damit ist F eine Stammfunktion von f.

   c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse und den Geraden zu $x = 0$ und $x = 1$ eingeschlossen wird.

   $$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[F(1) - F(0)\right]_0^1 = 0 - (-1) = 1$$

3. Zu Beginn einer Beobachtung befinden sich 20 Bakterien in einer Bakterienkultur. Diese Bakterien vermehren sich stündlich um $p = 15\,\%$.

   a) Welche e-Funktion beschreibt dieses Wachstum?

   $$f(t) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = 20 \cdot 1{,}15^t = 20 \cdot e^{\ln 1{,}15 \cdot t} \approx 20 \cdot e^{0{,}1398 \cdot t}$$

   b) Ermitteln Sie die Verdopplungszeit. $\qquad$ $2 = 1 \cdot e^{\ln 1{,}15 \cdot t_{\mathrm{V}}},\ t_{\mathrm{V}} \approx 4{,}96$ [h]

   c) Nach wie vielen Stunden sind 2000 Bakterien vorhanden? $\qquad$ 32,9 h

4. Bei einem radioaktiven Stoff zerfällt jedes Jahr 10 % der noch vorhandenen Masse.

   a) Berechnen Sie (in Prozent), wie viel nach 10 Jahren noch vorhanden ist.

   $$f(10) = a \cdot 0{,}9^{10} \approx a \cdot 0{,}349$$

   Nach 10 Jahren sind also etwa 34,9 % des ursprünglichen Materials vorhanden.

   b) Welche e-Funktion beschreibt diesen Zerfall?

   $$f(t) = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t = a \cdot 0{,}9^t = a \cdot e^{\ln 0{,}9 \cdot t} \approx a \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t}$$

   c) Ermitteln Sie die Halbwertszeit. $\qquad$ $1 = 2 \cdot e^{\ln 1{,}15 \cdot t_{\mathrm{H}}},\ t_{\mathrm{H}} \approx 6{,}6$ [Jahre]

   d) Wieviel Prozent der jeweils vorhandenen Masse zerfällt pro Monat?

   $$1 - e^{\ln(0{,}9) \cdot 1/12} \approx 0{,}87\,\%$$