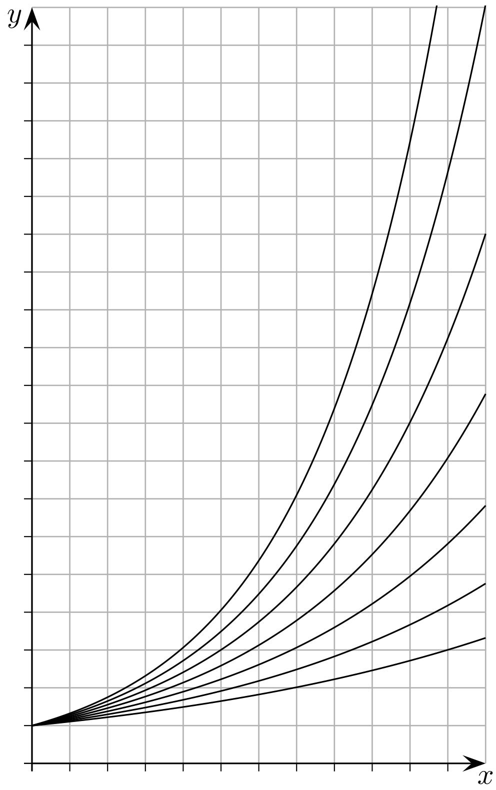
Wachstumsprozesse



1. Exponentielles Wachstum

   $f'(x) \; = \; k \cdot f(x)$ $\qquad\qquad$ $f(x) \; = \; a\,e^{kx} \quad \text{mit} \quad f(0) = a$

   $\Delta y \; \approx \; k \cdot f(x) \quad \text{mit} \quad \Delta x = 1$

   Der Zuwachs ist proportional zum Bestand.

2. Begrenztes (beschränktes) Wachstum

   $f'(x) \; = \; k \cdot (G - f(x))$ $\qquad\qquad$ $f(x) \; = \; G - a\,e^{-kx} \quad \text{mit} \quad f(0) = G - a$

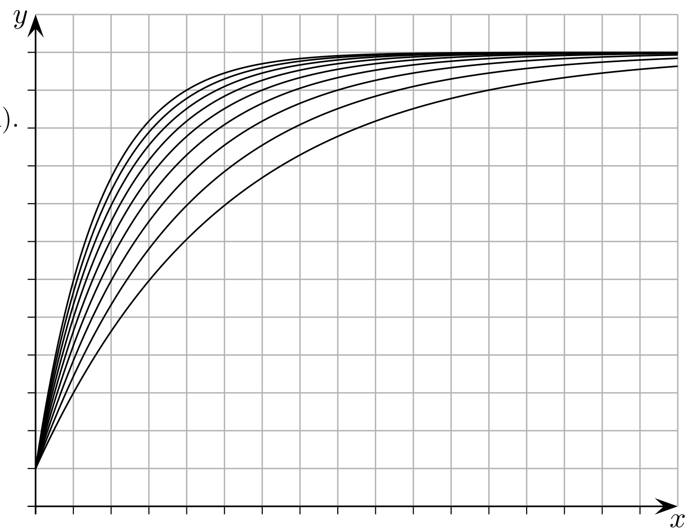
   $\Delta y \; \approx \; k \cdot (G - f(x)) \quad \text{mit} \quad \Delta x = 1$

   Der Zuwachs ist proportional zum Sättigungsmanko (Differenz Grenze G minus Bestand).

   2. Sichtweise (Klammern wurden aufgelöst):

   $f'(x) \; = \; \underbrace{k \cdot G}_{m} - k \cdot f(x)$

   Ein konstanter Zuwachs wird um einen zum Bestand proportionalen Betrag verringert (siehe Tropfinfusion).



Wachstumsprozesse

3. Logistisches Wachstum

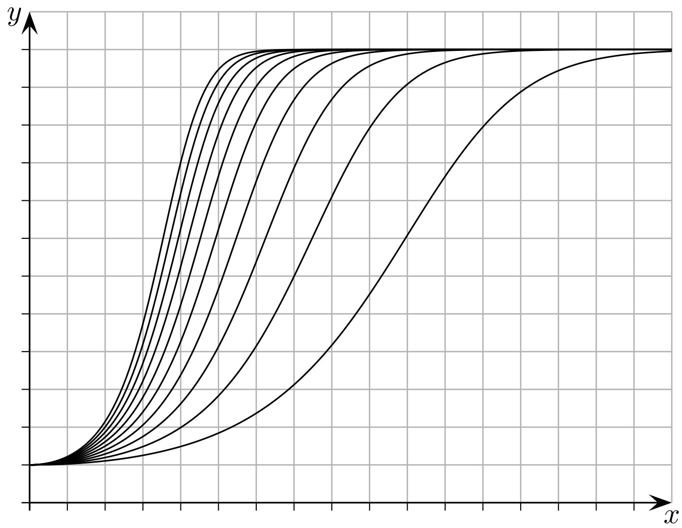
$$\begin{aligned} f'(x) &= k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x) \\ &= \underbrace{k \cdot G}\cdot f(x) - k \cdot f(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Begründe:
Anfänglich liegt ein nahezu exponentielles Wachstum vor.
$f(x)$ strebt gegen G für $x \longrightarrow \infty$.

$$f(x) = \frac{G}{1 + ae^{-kGx}} \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{G - f(0)}{f(0)}$$

oder umgeformt

$$f(x) = \frac{G \cdot e^{bx}}{a + e^{bx}} \qquad \text{mit} \qquad b = kG$$

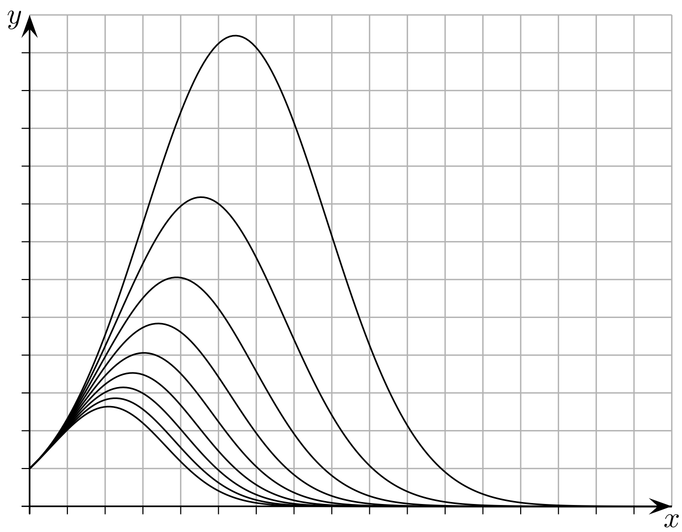


4. Vergiftetes Wachstum

$$f'(x) = (g - s\,x) \cdot f(x)$$

Im Gegensatz zum exponentiellen Wachstum
nimmt hier der Wachstumsfaktor mit der Zeit ab.

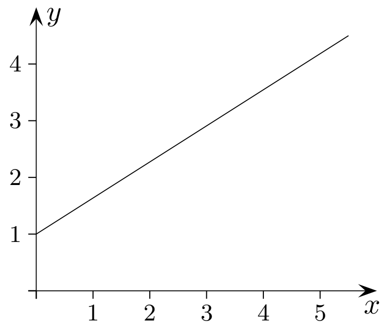
$$f(x) = a e^{gx - \frac{1}{2}sx^2}$$



Wachstumsprozesse

1. lineares Wachstum
   Die Änderungsrate ist konstant.

   $f'(x) = k \qquad f(x) = kx + c$



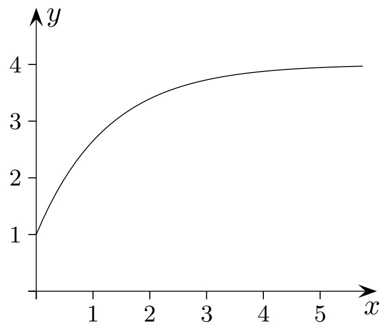
2. begrenztes Wachstum
   Die Änderungsrate ist anfänglich konstant, strebt dann gegen null (warum?).

   $f'(x) = k\,(1 - \frac{f(x)}{G}) \qquad f(x) = G - ae^{-k^* x}$

   $f'(x) = k\,\frac{G - f(x)}{G}$

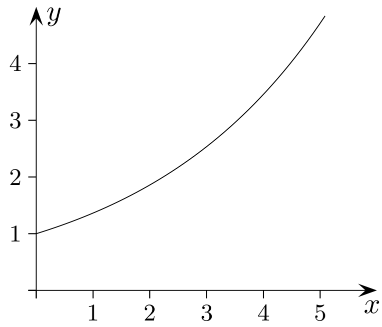
   $f'(x) = k^*\,(G - f(x)) \qquad k^* = \frac{k}{G}$

   Die Änderungsrate ist proportional zum Sättigungsmanko.
   Verifiziere die Lösung der DGL.



3. exponentielles Wachstum
   Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand.

   $f'(x) = k\,f(x) \qquad f(x) = ae^{kx}$



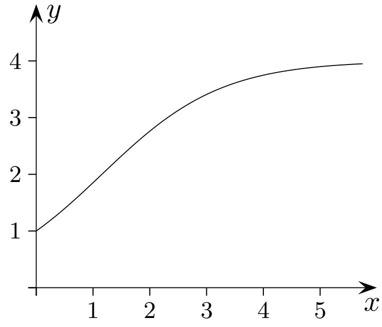
4. logistisches Wachstum
   Die Änderungsrate ist anfänglich exponentiell, strebt dann gegen null.

   $f'(x) = k\,f(x)\,(1 - \frac{f(x)}{G}) \qquad f(x) = \frac{G}{1 + ae^{-kx}}$

   $f'(x) = k\,f(x)\,\frac{G - f(x)}{G}$

   $f'(x) = k^*\,f(x)\,(G - f(x)) \qquad k^* = \frac{k}{G}$

   Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand
   und zum Sättigungsmanko.



a) Gegeben ist die DGL:

$$f'(x) = k \cdot f(x) + a$$

Die Änderung (Wachstumsgeschwindigkeit) setzt sich aus einem zum Bestand proportionalen Anteil und einer konstanten Zunahme/Abnahme zusammen.

Zeige, dass $f(x) = \left(b + \frac{a}{k}\right) \cdot e^{kx} - \frac{a}{k}$
die DGL löst, $b = f(0)$ (Anfangsbestand)

b) Gegeben ist die DGL:

$$f'(x) = k \cdot f(x) + ax$$

Die Änderung setzt sich aus einem zum Bestand proportionalen Anteil und einer zur Zeit x proportionalen Zunahme/Abnahme zusammen.

Zeige, dass $f(x) = \dfrac{k^2 + a}{k^2} \cdot e^{kx} - \frac{a}{k}x - \frac{a}{k^2}$
die DGL löst.
Wie groß ist hier der Anfangsbestand $f(0)$?

c) Gegeben ist die DGL:

$$f'(x) = k \cdot (f(x))^2$$

Die Änderung ist proportional zum Quadrat des Bestandes.

Zeige, dass $f(x) = \dfrac{a}{1 - akx}$

die DGL löst.
Wie groß ist hier der Anfangsbestand $f(0)$?