

Wachstum/Abnahme prozentual (genähert) gA

1. Exponentielles Wachstum $f(x) = ae^{kx}$, $k > 0$

$$f'(x) = k \cdot f(x)$$

Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = k \cdot y_n \quad \text{genauer } \approx, \text{ sei } \Delta x = 1$$

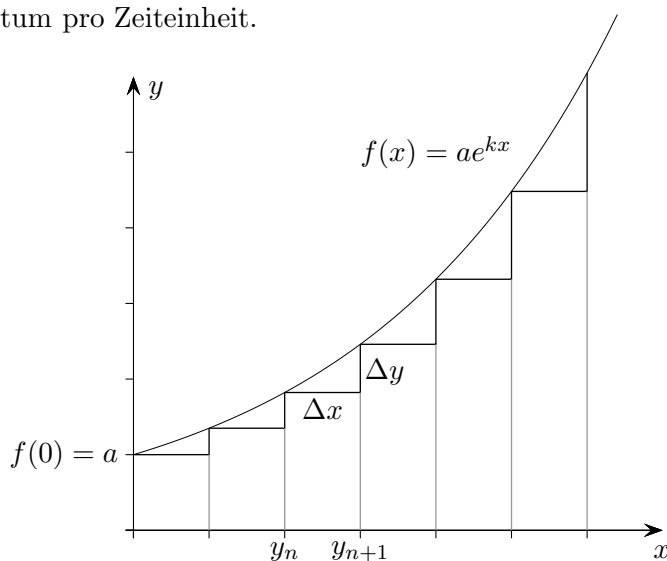
$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n$$

Die Ableitung wird durch den Differenzenquotient angenähert.
Die Iterationsgleichung beschreibt das Wachstum pro Zeiteinheit.

Exponentielles Wachstum 4%

Funktion $f(x) = ae^{0,04x}$

$$y_{n+1} = y_n + 0,04 \cdot y_n$$



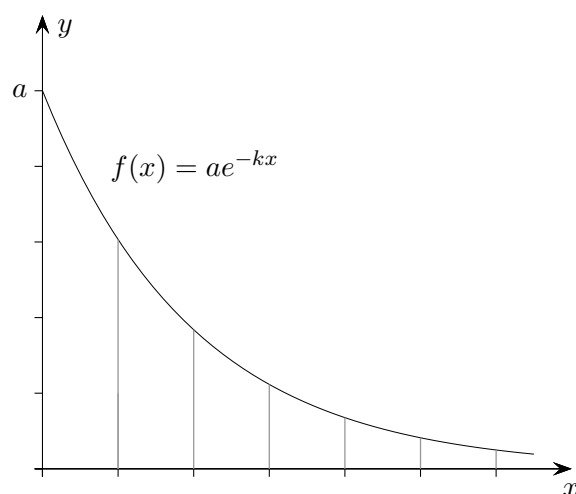
2. Exponentielle Abnahme $f(x) = ae^{-kx}$, $k > 0$

Änderungsrate: $f'(x) = -k \cdot f(x)$

Exponentielle Abnahme 3%

Funktion $f(x) = ae^{-0,03x}$

$$y_{n+1} = y_n - 0,03 \cdot y_n$$



Beschränktes (begrenztes) Wachstum gA

3. Beschränktes Wachstum $f(x) = G - ae^{-kx}$, $k > 0$

Von der (Kapazitäts-)Grenze G wird ae^{-kx} subtrahiert.
 ae^{-kx} strebt für $x \rightarrow \infty$ gegen 0.

$$f'(x) = ake^{-kx} = k \cdot (G - f(x))$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = k \cdot (G - y_n) \quad \text{genauer } \approx, \text{ sei } \Delta x = 1$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n)$$

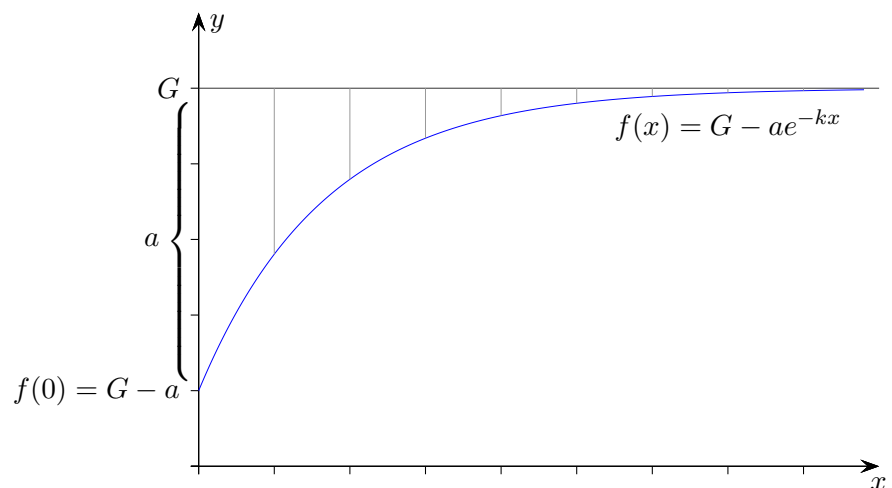
Die Wachstumsgeschwindigkeit f' (Änderungsrate) ist proportional zu $G - f(x)$,
d.h. zur Differenz von Wachstumsgrenze und Bestand.

Beschränktes Wachstum 5%

Funktion $f(x) = G - ae^{-0,05x}$

$$y_{n+1} = y_n + 0,05 \cdot (G - y_n)$$

Bei einem Erwärmungsprozess beziehen sich 5% Erwärmung auf die jeweilige Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur.



Anfangswert $f(0) < G$

Beschränkte (begrenzte) Abnahme gA

4. Beschränkte Abnahme $f(x) = G + ae^{-kx}$, $k > 0$

Zur (Kapazitäts-)Grenze G wird ae^{-kx} addiert.
 ae^{-kx} strebt für $x \rightarrow \infty$ gegen 0.

$$f'(x) = -ake^{-kx} = k \cdot (G - f(x)) \quad \text{beachte, hier ist } G - f(x) \text{ negativ}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = k \cdot (G - y_n) \quad \text{genauer } \approx, \text{ sei } \Delta x = 1$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n)$$

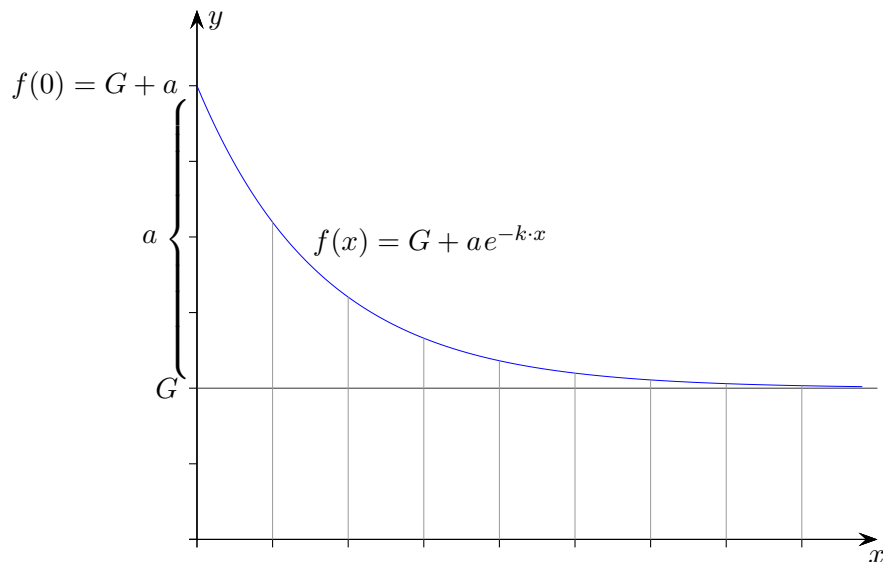
Die Wachstumsgeschwindigkeit f' (Änderungsrate) ist proportional zu $G - f(x)$,
d.h. zur Differenz von Wachstumsgrenze und Bestand.

Beschränkte Abnahme 6%

Funktion $f(x) = G + ae^{-0,06x}$

$$y_{n+1} = y_n + 0,06 \cdot (G - y_n) \quad \text{alternativ: } y_{n+1} = y_n - 0,06 \cdot (y_n - G)$$

Bei einem Abkühlungsprozess beziehen sich 6% Abkühlung auf
die jeweilige Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur.



Anfangswert $f(0) > G$

1. Eine Flasche Saft wurde in einem Kühlschrank auf 6°C abgekühlt. Sie wird in ein Zimmer mit 24°C gestellt. Die Erwärmung beträgt 8% der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur (in $\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$). In welcher Zeit hat sich die Safttemperatur bis auf 2°C der Raumtemperatur angeglichen?
2. Frisch aufgebrühter 80°C heißer Kaffee wird in einem 22°C warmen Raum stehen gelassen. Die Abkühlung beträgt 9% der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur (in $\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$). In welcher Zeit hat sich die Kaffeetemperatur bis auf 2°C der Raumtemperatur angeglichen?

1. Eine Flasche Saft wurde in einem Kühlschrank auf 6°C abgekühlt. Sie wird in ein Zimmer mit 24°C gestellt. Die Erwärmung beträgt 8% der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur (in $\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$). In welcher Zeit hat sich die Safttemperatur bis auf 2°C der Raumtemperatur angeglichen?

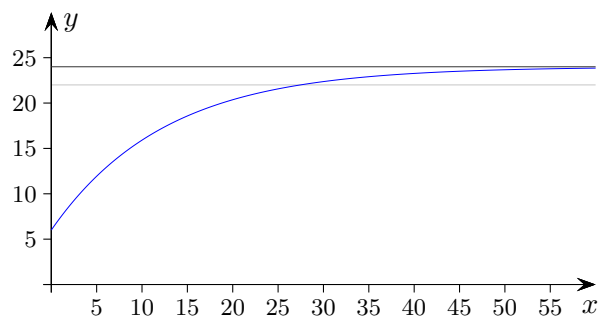
$$f(x) = G - ae^{-kx}$$

$$f(0) = 6$$

$$f(0) = G - a$$

$$f(x) = 24 - 18e^{-0,08x}$$

$$f(x) = 22, \quad x \approx 27,5 \text{ [min]}$$



2. Frisch aufgebrühter 80°C heißer Kaffee wird in einem 22°C warmen Raum stehen gelassen. Die Abkühlung beträgt 9% der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur (in $\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$). In welcher Zeit hat sich die Kaffeetemperatur bis auf 2°C der Raumtemperatur angeglichen?

$$f(x) = G + ae^{-kx}$$

$$f(0) = 80$$

$$f(0) = G + a$$

$$f(x) = 22 + 58e^{-0,09x}$$

$$f(x) = 24, \quad x \approx 37,4 \text{ [min]}$$

