# Wachstum/Abnahme prozentual (genähert)   gA

1. Exponentielles Wachstum  $f(x) = ae^{kx},\ k > 0$

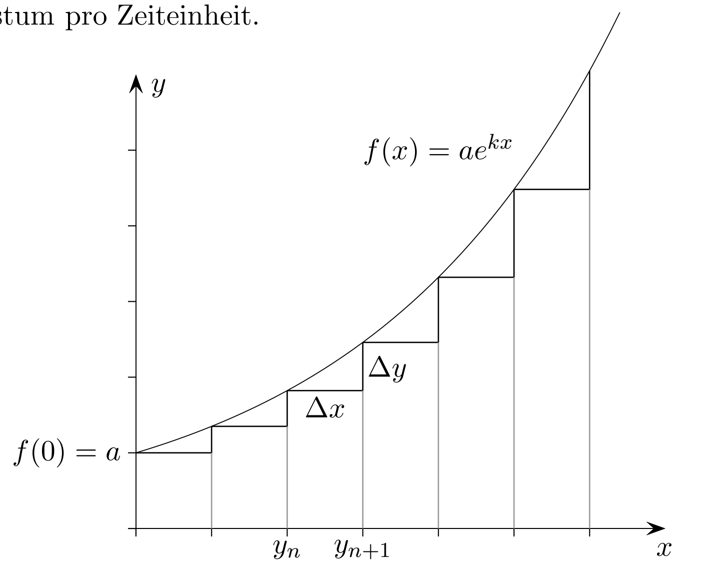
$$f'(x) = k \cdot f(x)$$ Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = k \cdot y_n$$ genauer $\approx$, sei $\Delta x = 1$

$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n$$

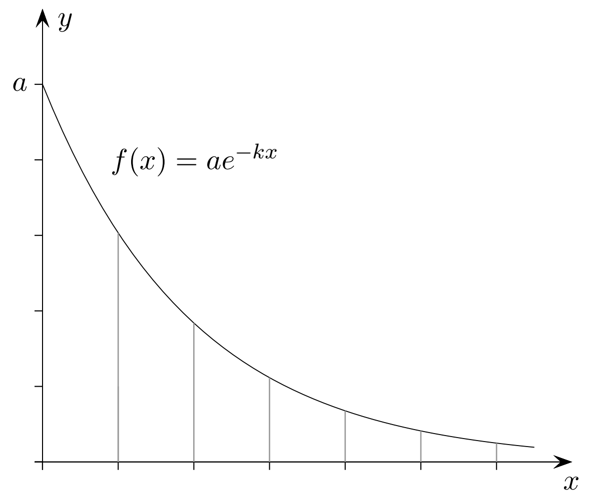
Die Ableitung wird durch den Differenzenquotient angenähert.
Die Iterationsgleichung beschreibt das Wachstum pro Zeiteinheit.

Exponentielles Wachstum 4 %
Funktion $f(x) = ae^{0{,}04x}$
$y_{n+1} = y_n + 0{,}04 \cdot y_n$




2. Exponentielle Abnahme  $f(x) = ae^{-kx},\ k > 0$
Änderungsrate: $f'(x) = -k \cdot f(x)$

Exponentielle Abnahme 3 %
Funktion $f(x) = ae^{-0{,}03x}$
$y_{n+1} = y_n - 0{,}03 \cdot y_n$



3. Beschränktes Wachstum $f(x) = G - ae^{-kx},\ k > 0$

Von der (Kapazitäts-)Grenze $G$ wird $ae^{-kx}$ subtrahiert.
$ae^{-kx}$ strebt für $x \longrightarrow \infty$ gegen 0.

$$f'(x) = ake^{-kx} = k \cdot \big(G - f(x)\big)$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = k \cdot (G - y_n) \qquad \text{genauer } \approx,\ \text{sei } \Delta x = 1$$

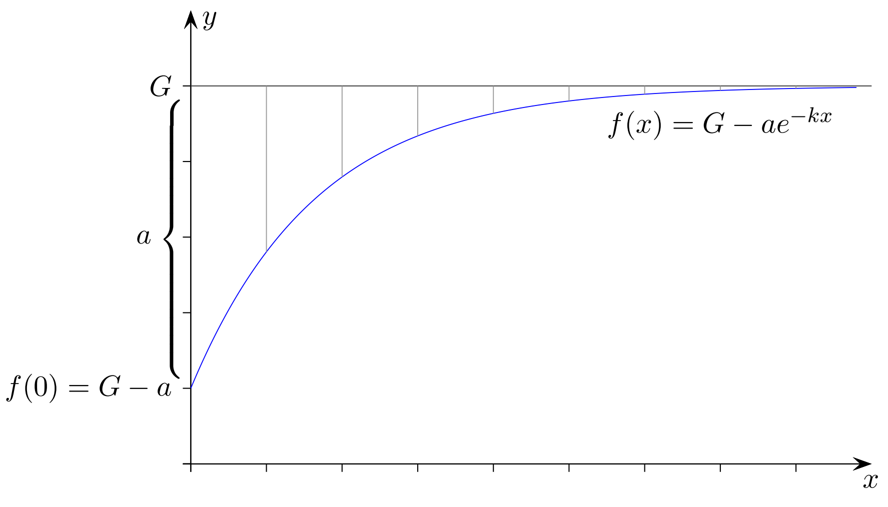
$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n)$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit $f'$ (Änderungsrate) ist proportional zu $G - f(x)$, d. h. zur Differenz von Wachstumsgrenze und Bestand.

Beschränktes Wachstum 5 %
Funktion $f(x) = G - ae^{-0{,}05x}$

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}05 \cdot (G - y_n)$$

Bei einem Erwärmungsprozess beziehen sich 5 % Erwärmung auf die jeweilige Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur.




Anfangswert $f(0) < G$

# Beschränkte (begrenzte) Abnahme gA

4. Beschränkte Abnahme $f(x) = G + ae^{-kx}, \ k > 0$

Zur (Kapazitäts-)Grenze $G$ wird $ae^{-kx}$ addiert.
$ae^{-kx}$ strebt für $x \longrightarrow \infty$ gegen 0.

$$f'(x) = -ake^{-kx} = k \cdot \big(G - f(x)\big) \qquad \text{beachte, hier ist } G - f(x) \text{ negativ}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = k \cdot (G - y_n) \qquad \text{genauer} \approx, \text{ sei } \Delta x = 1$$

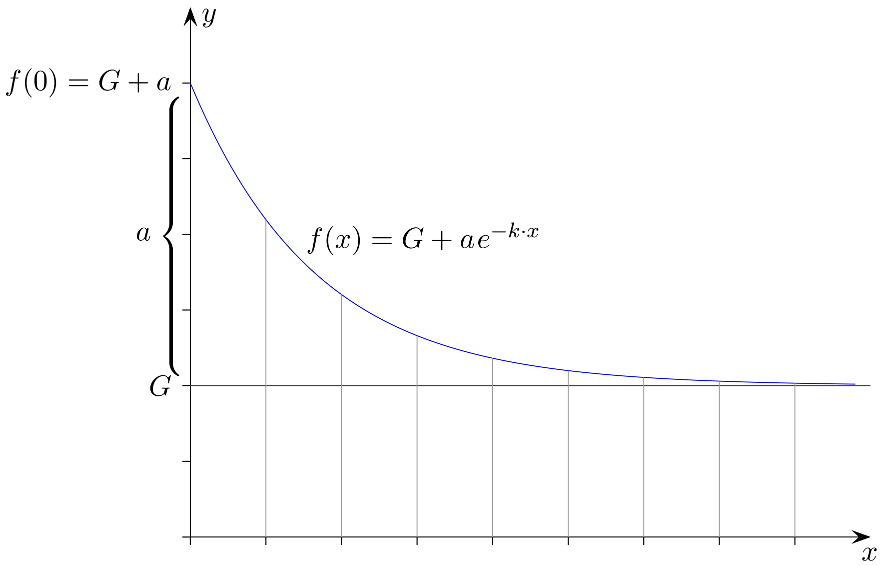
$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n)$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit $f'$ (Änderungsrate) ist proportional zu $G - f(x)$,
d. h. zur Differenz von Wachstumsgrenze und Bestand.

Beschränkte Abnahme 6 %
Funktion $f(x) = G + ae^{-0{,}06x}$

$y_{n+1} = y_n + 0{,}06 \cdot (G - y_n)$ alternativ: $y_{n+1} = y_n - 0{,}06 \cdot (y_n - G)$

Bei einem Abkühlungsprozess beziehen sich 6 % Abkühlung auf
die jeweilige Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur.



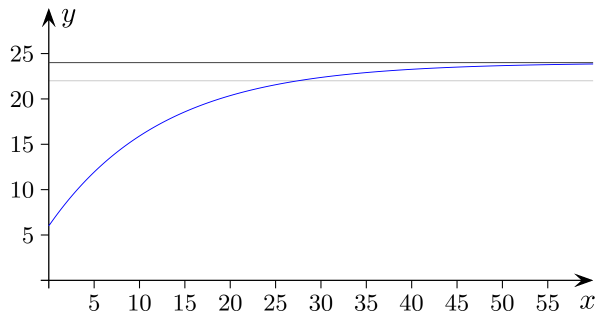

Anfangswert $f(0) > G$

1. Eine Flasche Saft wurde in einem Kühlschrank auf 6°C abgekühlt. Sie wird in ein Zimmer mit 24°C gestellt. Die Erwärmung beträgt 8 % der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur $\left(\text{in } \frac{°\text{C}}{\text{min}}\right)$. In welcher Zeit hat sich die Safttemperatur bis auf 2°C der Raumtemperatur angeglichen?

2. Frisch aufgebrühter 80°C heißer Kaffee wird in einem 22°C warmen Raum stehen gelassen. Die Abkühlung beträgt 9 % der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur $\left(\text{in } \frac{°\text{C}}{\text{min}}\right)$. In welcher Zeit hat sich die Kaffeetemperatur bis auf 2°C der Raumtemperatur angeglichen?

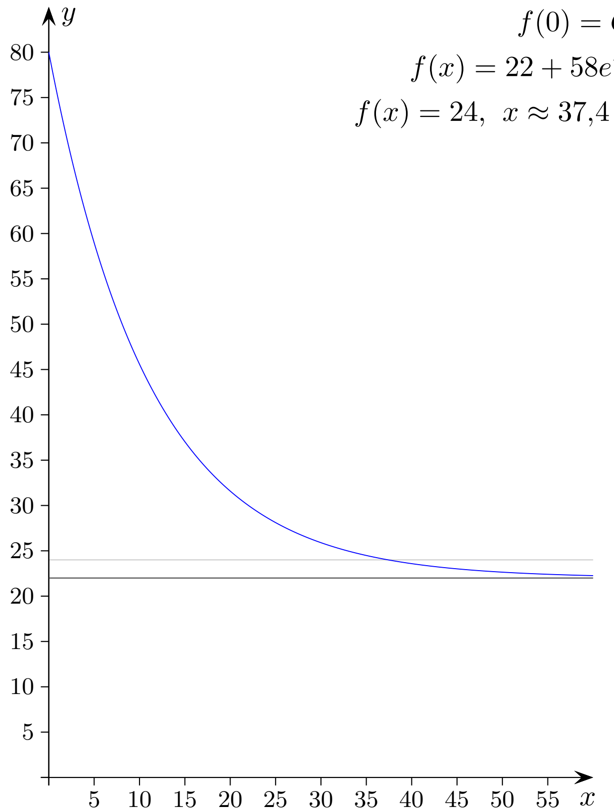
1. Eine Flasche Saft wurde in einem Kühlschrank auf 6°C abgekühlt. Sie wird in ein Zimmer mit 24°C gestellt. Die Erwärmung beträgt 8 % der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur $\left(\text{in } \frac{°\text{C}}{\text{min}}\right)$. In welcher Zeit hat sich die Safttemperatur bis auf 2°C der Raumtemperatur angeglichen?

$$f(x) = G - ae^{-kx}$$
$$f(0) = 6$$
$$f(0) = G - a$$
$$f(x) = 24 - 18e^{-0{,}08x}$$
$$f(x) = 22,\ \ x \approx 27{,}5 \text{ [min]}$$

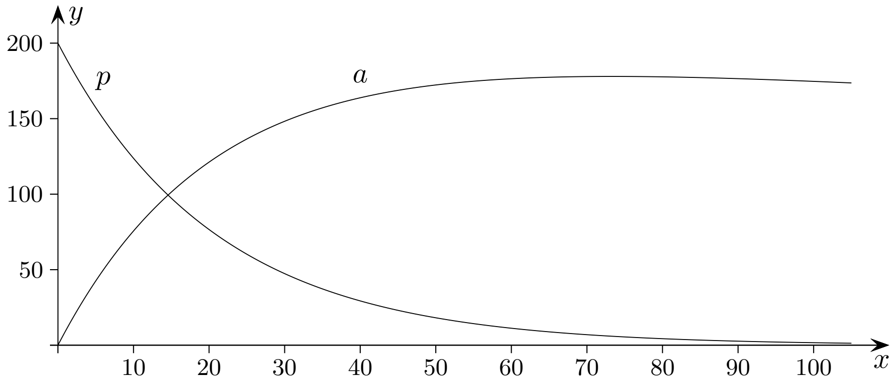



2. Frisch aufgebrühter 80°C heißer Kaffee wird in einem 22°C warmen Raum stehen gelassen. Die Abkühlung beträgt 9 % der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur $\left(\text{in } \frac{°\text{C}}{\text{min}}\right)$. In welcher Zeit hat sich die Kaffeetemperatur bis auf 2°C der Raumtemperatur angeglichen?

$$f(x) = G + ae^{-kx}$$
$$f(0) = 80$$
$$f(0) = G + a$$
$$f(x) = 22 + 58e^{-0{,}09x}$$
$$f(x) = 24,\ \ x \approx 37{,}4 \text{ [min]}$$



# Radioaktiver Zerfall




Am 26. April 1986 ereignete sich in der Ukraine ein Reaktorunfall, bei dem radioaktives Plutonium-241 freigesetzt wurde. Plutonium-241 zerfällt exponentiell, d. h. in jedem Jahr nimmt die Masse des vorhandenen Plutonium-241 um einen konstanten prozentualen Anteil ab. Im Folgenden wird der Zerfall einer bestimmten Menge Plutonium-241 betrachtet. Dieser Zerfall wird durch die Funktion $p(x) = 200 \cdot e^{-0{,}0480x}$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist $x$ die Zeit in Jahren, die seit dem Reaktorunfall vergangen ist, und $p(x)$ die Masse des verbliebenen Plutonium-241 in Milligramm.

a) Geben Sie die Bedeutung des Faktors 200 im Sachzusammenhang an und berechnen Sie den prozentualen Anteil, um den die Masse des Plutonium-241 in jedem Jahr abnimmt.

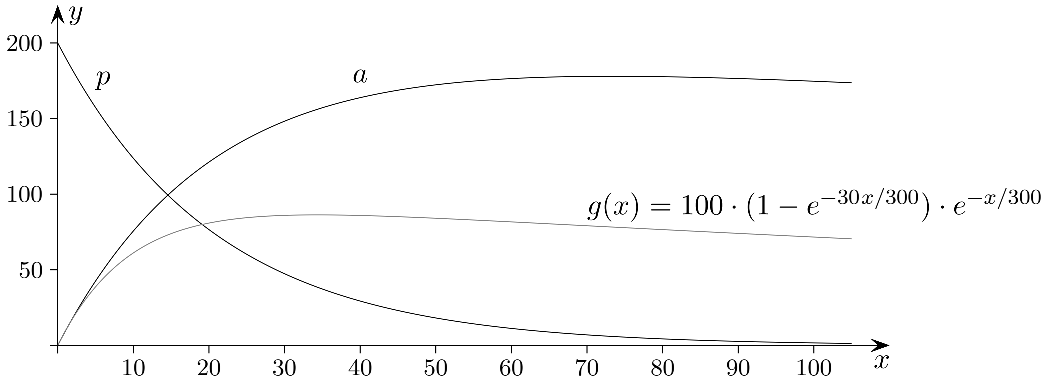
b) Bestimmen Sie das Jahr, in dessen Verlauf erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein wird.

Bei dem Zerfall von Plutonium-241 entsteht radioaktives Americium-241, das ebenfalls exponentiell zerfällt. Im verwendeten Modell gibt die Funktion $a(x) = 207 \cdot (1 - e^{-0{,}0464x}) \cdot e^{-0{,}0016x}$ für jedes Jahr die Masse des vorhandenen Americium-241 in Milligramm an.

c) Der Graph von $a$ kann für einen Wert von $k$ aus dem Graphen der Funktion $h_k(x) = 10 \cdot (1 - e^{-kx}) \cdot e^{-x}$ erzeugt werden, indem man diesen in $x$-Richtung und in $y$-Richtung streckt. Geben Sie die beiden Streckungsfaktoren an und bestimmen Sie den passenden Wert von $k$.

d) Geben Sie die Bedeutung der Aussage $\dfrac{a(73) - a(0)}{73} \approx 2{,}4$ im Sachzusammenhang an.

# Radioaktiver Zerfall




Am 26. April 1986 ereignete sich in der Ukraine ein Reaktorunfall, bei dem radioaktives Plutonium-241 freigesetzt wurde. Plutonium-241 zerfällt exponentiell, d. h. in jedem Jahr nimmt die Masse des vorhandenen Plutonium-241 um einen konstanten prozentualen Anteil ab. Im Folgenden wird der Zerfall einer bestimmten Menge Plutonium-241 betrachtet. Dieser Zerfall wird durch die Funktion $p(x) = 200 \cdot e^{-0{,}0480x}$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist $x$ die Zeit in Jahren, die seit dem Reaktorunfall vergangen ist, und $p(x)$ die Masse des verbliebenen Plutonium-241 in Milligramm.

a) Geben Sie die Bedeutung des Faktors 200 im Sachzusammenhang an und berechnen Sie den prozentualen Anteil, um den die Masse des Plutonium-241 in jedem Jahr abnimmt.

$p(0) = 200$

$e^{-0{,}0480} \approx 0{,}953 = 95{,}3\,\%$, Abnahme um $4{,}7\,\%$

b) Bestimmen Sie das Jahr, in dessen Verlauf erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein wird.

$200 \cdot e^{-0{,}0480x} = 1,\ x \approx 110{,}38,\ 2096$

Bei dem Zerfall von Plutonium-241 entsteht radioaktives Americium-241, das ebenfalls exponentiell zerfällt. Im verwendeten Modell gibt die Funktion $a(x) = 207 \cdot (1 - e^{-0{,}0464x}) \cdot e^{-0{,}0016x}$ für jedes Jahr die Masse des vorhandenen Americium-241 in Milligramm an.

c) Der Graph von $a$ kann für einen Wert von $k$ aus dem Graphen der Funktion $h_k(x) = 10 \cdot (1 - e^{-kx}) \cdot e^{-x}$ erzeugt werden, indem man diesen in $x$-Richtung und in $y$-Richtung streckt. Geben Sie die beiden Streckungsfaktoren an und bestimmen Sie den passenden Wert von $k$.

Streckungsfaktor in $y$-Richtung: $b = 20{,}7$

Graph von $g$ dient der Erläuterung.

Streckungsfaktor $a$ in $x$-Richtung (beachte $e^{-0{,}0016x}$ und $e^{-x}$): $a = \frac{1}{0{,}0016} = 625, \quad \frac{1}{625} = 0{,}0016$

$0{,}0016 \cdot k = 0{,}0464,\ k = 29$

d) Geben Sie die Bedeutung der Aussage $\frac{a(73) - a(0)}{73} \approx 2{,}4$ im Sachzusammenhang an.

Die Masse des Americium-241 nimmt in den ersten 73 Jahren im Mittel pro Jahr um etwa 2,4 mg zu.