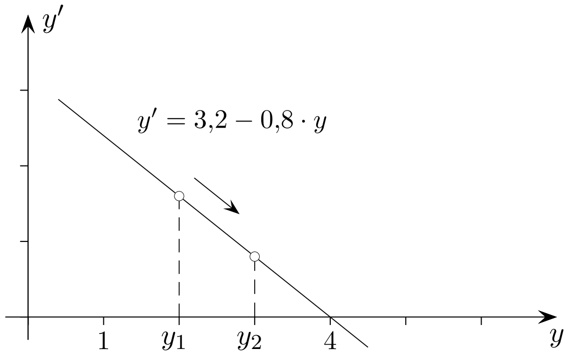
Phasenkurve einer Differentialgleichung

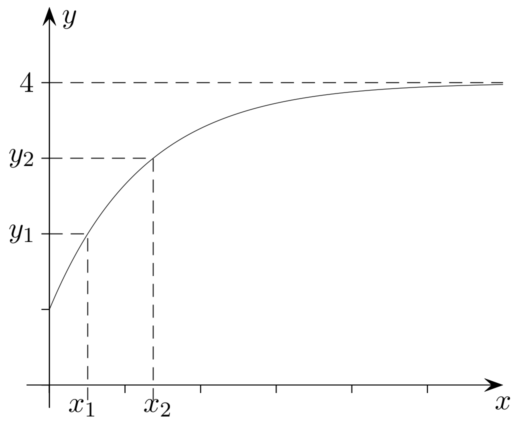
Die DGL $f'(x) = 0{,}8 \cdot (4 - f(x))$, in Kurzschreibweise

$$y' = 0{,}8 \cdot (4 - y) \quad \text{oder} \quad y' = 3{,}2 - 0{,}8 \cdot y, \quad \text{beschreibt ein } \textit{begrenztes Wachstum},$$

allgemein lautet die DGL: $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$

Eine Vorstellung vom dynamischen Verlauf des Wachstumsprozesses erhält man durch eine grafische Darstellung - genannt *Phasenkurve (Phasendiagramm)* - des funktionalen Zusammenhangs von y und y'. Mit einer Phasenkurve können Asymptoten und die vom Anfangswert nicht selten sensibel abhängigen, unterchiedlichen Verläufe erkannt werden.





Nehmen wir an, es liegt der Bestand y_1 vor. Da das zugehörige y' positiv ist, bedeutet dies einen Zuwachs des Bestandes. Es ist zu erkennen, dass sich der Bestand auf den Wert 4 zubewegt.

1. Beschreibe den weiteren Verlauf einer Lösungsfunktion, deren Anfangswert y_0 größer als 4 ist.

2. Skizziere und interpretiere die Phasenkurve der DGL, $k > 0$.
   a) $f'(x) = k \cdot f(x)$ *(exponentielles Wachstum).*
   b) $f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$ *(logistisches Wachstum).*

3. Stelle Vermutungen hinsichtlich der Lösungskurve an.

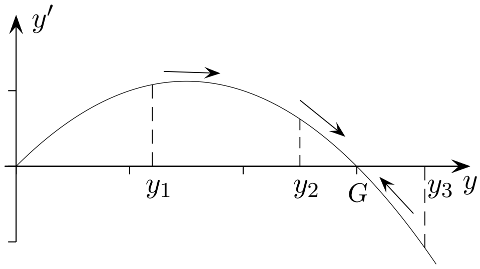
   a) $f'(x) = \dfrac{2}{f(x)}, \quad f(1) = 1$

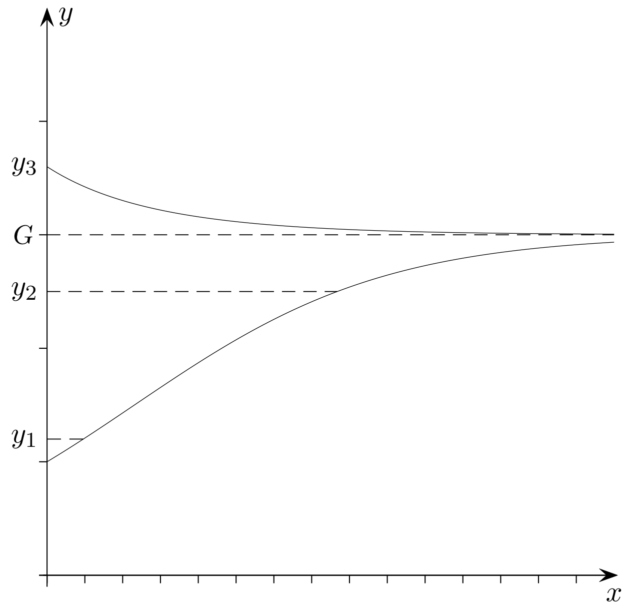
   b) $f'(x) = -f(x) + 1, \quad f(0) = 4$

Phasenkurve der DGL für das logistische Wachstum

Die DGL $f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$ in Kurzschreibweise
$y' = k \cdot (G - y) \cdot y$ beschreibt ein *logistisches Wachstum*.

Die Phasenkurve ist in diesem Fall eine nach unten geöffnete Parabel.

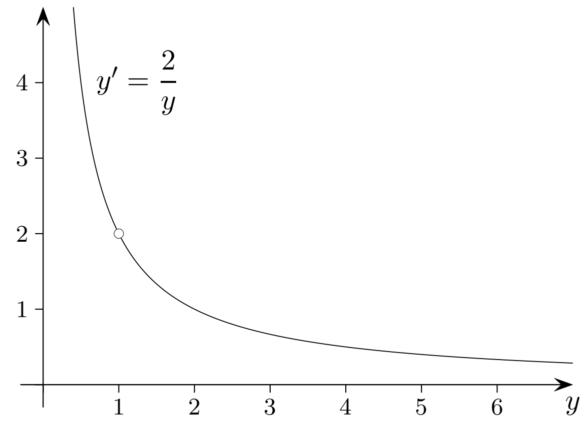


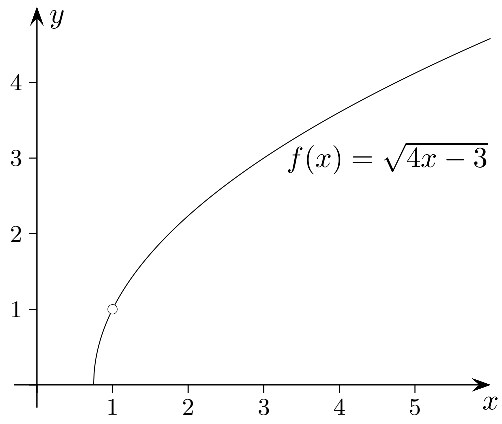


Nehmen wir an, es liegt der Bestand y_1 vor. Da das zugehörige y' positiv ist, bedeutet dies einen Zuwachs des Bestandes. Es ist zu erkennen, dass sich der Bestand auf den Wert G zubewegt, in y_2 mit geringerer Steigung als in y_1.
Sollte der Bestand größer als G sein, z.B. y_3, so ist y' negativ und damit läge eine Abnahme des Bestandes vor. G kennzeichnet die Stabilität des Systems.
Die y-Koordinate des Wendepunkts der logistischen Kurve lautet $\frac{G}{2}$, beachte den Scheitel der Phasenkurve.

1. Stelle Vermutungen hinsichtlich der Lösungskurve an.

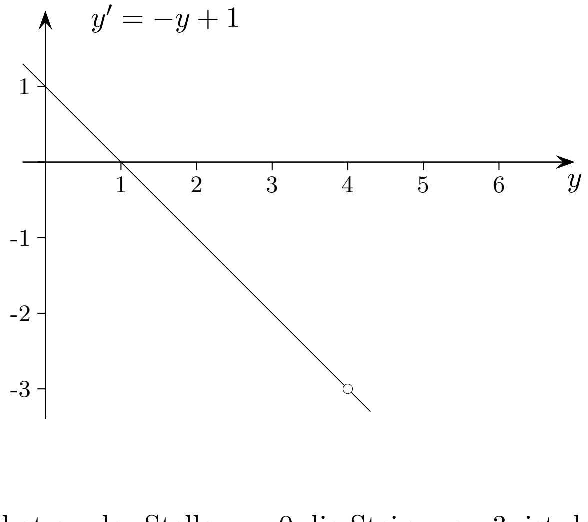
   a) $f'(x) = \dfrac{2}{f(x)}, \quad f(1) = 1$

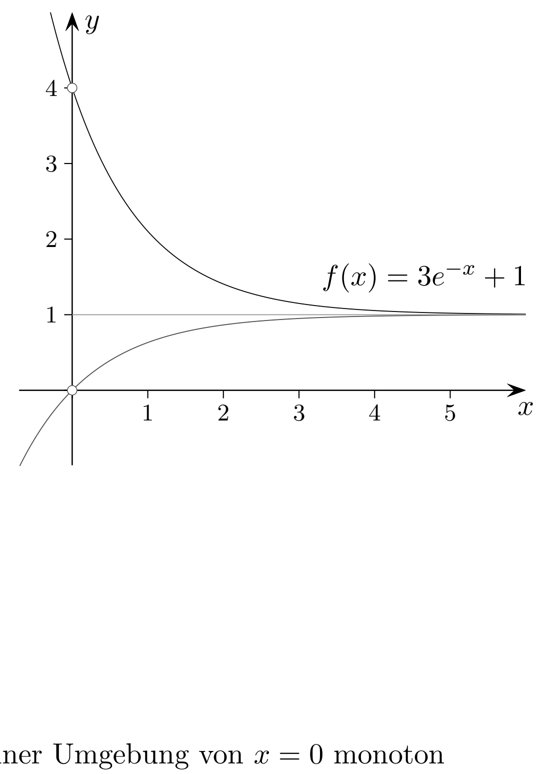




f hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung 2, ist daher in einer Umgebung von 1 monoton steigend. Für kleiner werdende y-Werte strebt die Steigung gegen Unendlich, für größer werdende y-Werte gegen null. Es liegt die Vermutung nahe, dass f eine Wurzelfunktion ist.

   b) $f'(x) = -f(x) + 1, \quad f(0) = 4$





f hat an der Stelle $x = 0$ die Steigung -3, ist daher in einer Umgebung von $x = 0$ monoton fallend. Die y-Werte streben gegen 1, die Steigung strebt gegen null. Es liegt die Vermutung nahe, dass f eine Funktion einer exponentiellen Abnahme mit der Asymptoten $y = 1$ ist.

Ergänzung
Für den Anfangswert $f(0) = 0$ erhalten wir eine monoton steigende Funktion mit gleicher Asymptote (Zu-/Abflussprozess, $f(x) = 1 - e^{-x}$).