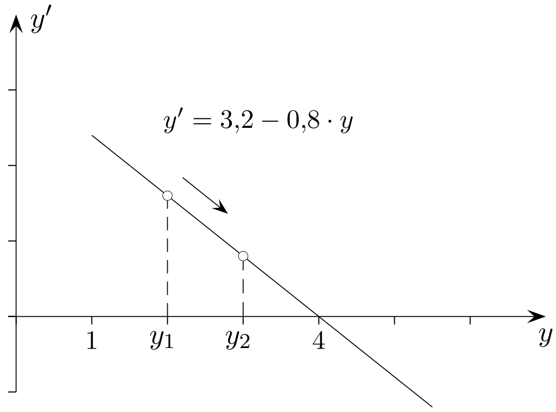
Phasenkurve einer Differentialgleichung

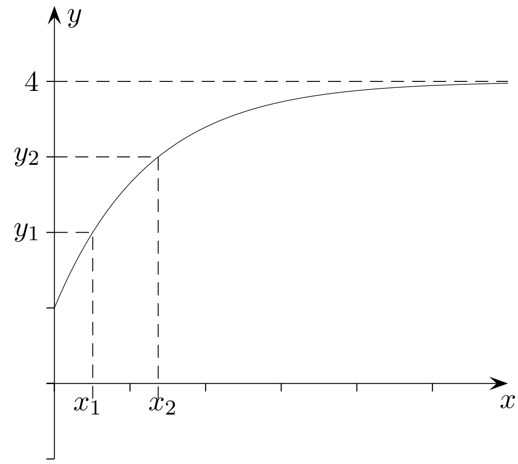
Die DGL $f'(x) = 0{,}8 \cdot (4 - f(x))$, in Kurzschreibweise

$$y' = 0{,}8 \cdot (4 - y) \quad \text{oder} \quad y' = 3{,}2 - 0{,}8 \cdot y, \quad \text{beschreibt ein } \textit{begrenztes Wachstum},$$

allgemein lautet die DGL: $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$

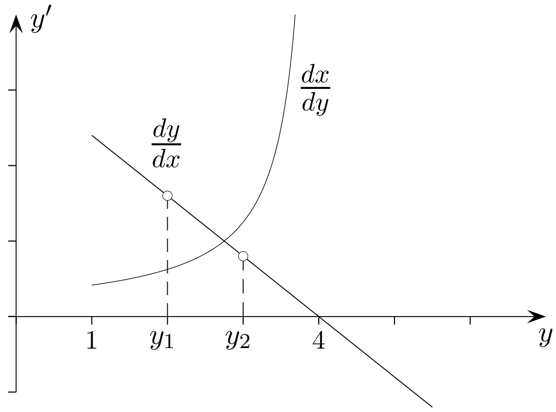
Eine Vorstellung vom dynamischen Verlauf des Wachstumsprozesses erhält man durch eine grafische Darstellung - genannt *Phasenkurve* - des Zusammenhang von y und y', die wir für einen Augenblick als Unbekannte betrachten.

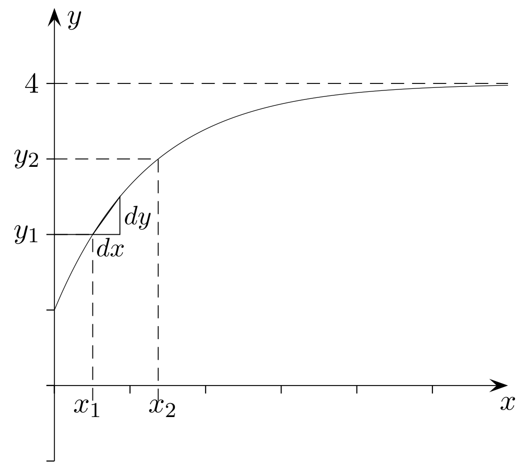




Nehmen wir an, es liegt der Bestand y_1 vor. Da das zugehörige y' positiv ist, bedeutet dies einen Zuwachs des Bestandes. Es ist zu erkennen, dass sich der Bestand auf den Wert 4 zubewegt.

1. Beschreibe den weiteren Verlauf einer Lösungsfunktion, deren Anfangswert y_0 größer als 4 ist.
2. Skizziere und interpretiere die Phasenkurve der DGL
   a) $f'(x) = k \cdot f(x)$ *(exponentielles Wachstum).*
   b) $f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$ *(logistisches Wachstum).*
3. Begründe, dass $x_2 - x_1 = \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{k \cdot (G - y)}\, dy$ gilt und formuliere den Sachverhalt allgemein.

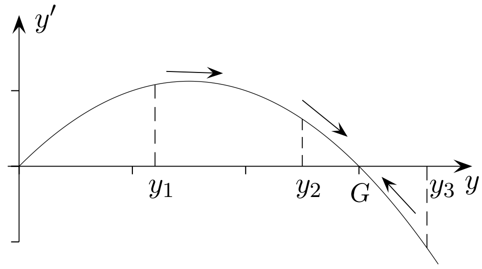


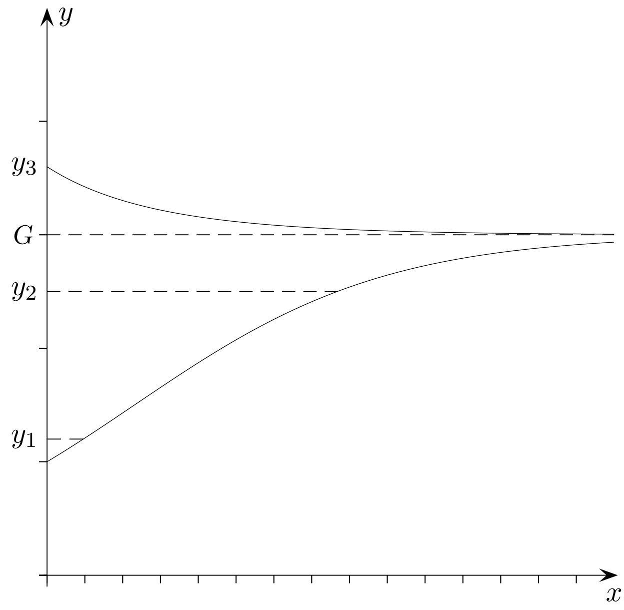


Phasenkurve der DGL für das logistische Wachstum

Die DGL $f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$ in Kurzschreibweise
$y' = k \cdot (G - y) \cdot y$ beschreibt ein *logistisches Wachstum.*

Die Phasenkurve ist in diesem Fall eine nach unten geöffnete Parabel.





Nehmen wir an, es liegt der Bestand y_1 vor. Da das zugehörige y' positiv ist, bedeutet dies einen Zuwachs des Bestandes. Es ist zu erkennen, dass sich der Bestand auf den Wert G zubewegt, in y_2 mit geringerer Steigung als in y_1.
Sollte der Bestand größer als G sein, z.B. y_3, so ist y' negativ und damit läge eine Abnahme des Bestandes vor. G kennzeichnet die Stabilität des Systems.
Die y-Koordinate des Wendepunkts der logistischen Kurve lautet $\frac{G}{2}$.

1. Stelle Vermutungen hinsichtlich der Lösungskurven an.

   a) $f'(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

   b) $f'(x) = f(x) + 1$