Partielle (teilweise) Integration

Aus der Ableitungsregel für ein Produkt $f \cdot g$ von Funktionen
kann eine Integrationsregel hergeleitet werden.

Die Produktregel lautet:	$(f \cdot g)'(x)$	$=$	$f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
daher gilt:	$f(x) \cdot g(x)$	$=$	$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx + \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$
umgestellt:	$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx$	$=$	$f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$
oder kürzer:	$\int u \cdot v'\ dx$	$=$	$u \cdot v - \int u' \cdot v\ dx$

Beispiel:

$$\int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{e^x}\ dx \ = \ \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{e^x} \ - \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{e^x}\ dx \ = \ x \cdot e^x - e^x \ = \ e^x\,(x-1)$$

integrieren *differenzieren*

$$\int \underset{v'}{1} \cdot \underset{u}{\ln x}\ dx \ = \ x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx$$

übernehmen *übernehmen*

1. Faktor integrieren, dann Ergebnis übernehmen
2. Faktor übernehmen, dann differenzieren

Wähle u und v' so, dass die Integration von v' leicht ausführbar ist und dass das Ableiten von u zu einer <u>einfacheren</u> Funktion führt.

Die eine Funktion des Produkts wird also integriert, das Ergebnis steht auch hinter dem Integralzeichen, sowie die Ableitung der anderen Funktion.

Integriere:

a) $\int x\ \cos x\,dx$ b) $\int x^2\ \sin x\,dx$ c) $\int x^2\,e^{3x}\,dx$

d) $\int x^2 \cdot \ln x\,dx$ e) $\int \ln x\,dx$ f) $\int e^x\ \sin x\,dx$

Partielle (teilweise) Integration

Integriere:

a) $\int x \ \cos x \, dx$ b) $\int x^2 \ \sin x \, dx$ c) $\int x^2 \, e^{3x} \, dx$

d) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$ e) $\int \ln x \, dx$ f) $\int e^x \ \sin x \, dx$

Ergebnisse

a) $x \sin x + \cos x \qquad (+ \ C)$

b) $-x^2 \cos x + 2\,(x \sin x + \cos x)$

c) $\frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x\, e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x}$

d) $\frac{x^3}{3} (\ln x - \frac{1}{3})$

e) $x\,(\ln x - 1)$

f) $\frac{1}{2}\ e^x (\sin x - \cos x)$

Partielle Integration auf einen Blick

Die Integration eines Produkts beginnt mit der Aufleitung eines Faktors:

$$\int \square \cdot \blacksquare \;=\; \square \cdot \int \blacksquare \;-\; \int \ldots$$

oder

$$\int \square \cdot \blacksquare \;=\; \blacksquare \cdot \int \square \;-\; \int \ldots$$

Welcher Weg gewählt wird, hängt auch von der Einfachheit des zweiten Integrals auf der rechten Seite ab. Hierbei muss das Produkt der schon aufgeleiteten Funktion mit der Ableitung der anderen Funktion integriert werden.

$$\int \square \cdot \blacksquare \;=\; \square \cdot \int \blacksquare \;-\; \int \square' \cdot \int \blacksquare$$

$$\int \square \cdot \blacksquare \;=\; \blacksquare \cdot \int \square \;-\; \int \blacksquare' \cdot \int \square$$

Für eine Probe ist die Ableitung auf beiden Seiten zu bilden.
Die Produktregel wird benötigt.

$$\square \cdot \blacksquare \;=\; \blacksquare' \cdot \int \square \;+\; \blacksquare \cdot \square \;-\; \blacksquare' \cdot \int \square$$

$$\square \cdot \blacksquare \;=\; \square \cdot \blacksquare$$

Partielle Integration auf einen Blick

$$\underline{\int \square \cdot \blacksquare} = \square \cdot \int \blacksquare - \underline{\int \square' \cdot \int \blacksquare}$$

Möglich ist, dass die beiden unterstrichenen Integrale übereinstimmen.
Dann wird das Rechte auf die linke Seite gebracht und durch 2 dividiert.

Möglich ist auch, dass das rechte unterstrichene Integral erneut mit der Methode der partiellen Integration ermittelt werden muss.