

# Ortskurve

Gegeben ist die Funktionenschar:

$$f_k(x) = 3x^2 - \frac{3}{k}x^3, \quad k > 0.$$

Für sie gilt: 
$$\text{Max}\left(\underbrace{\frac{2}{3}k}_x \mid \underbrace{\frac{4}{9}k^2}_y\right)$$

Um die Funktion zu ermitteln, auf deren Graph (Ortskurve) die Maxima liegen, eliminieren wir  $k$ .

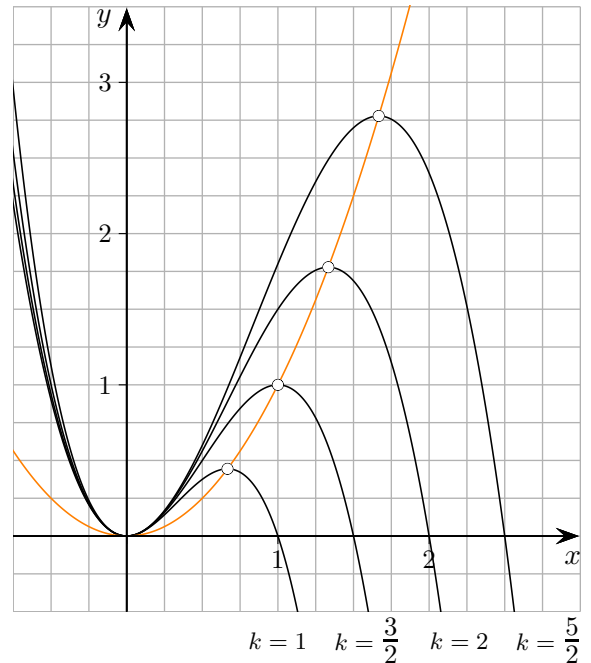
$$x = \frac{2}{3}k \quad \text{indem wir die 1. Gleichung nach } k$$

$$y = \frac{4}{9}k^2$$

auflösen und anschließend den Term für  $k$  in die 2. Gleichung einsetzen. Wir erhalten:

$$y = x^2$$

Durch den  $x$ -Wert ist der  $k$ -Wert eindeutig festgelegt (1. Gleichung), und durch den  $k$ -Wert der  $y$ -Wert (2. Gleichung). Es gibt daher eine direkte Beziehung zwischen dem  $x$ - und  $y$ -Wert.



Auf gleiche Weise ergibt sich als Ortskurve der Wendepunkte

$$W\left(\frac{k}{3} \mid \frac{2}{9}k^2\right) \quad y = 2x^2$$

## 2. Beispiel:

Gegeben sei die Funktionenschar

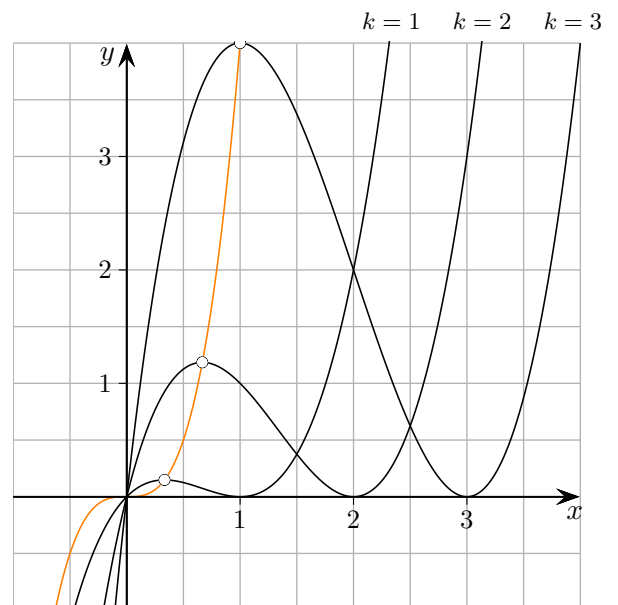
$$f_a(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x, \quad a > 0$$

Für sie gilt:

$$\text{Max}\left(\frac{a}{3} \mid \frac{4}{27}a^3\right), \quad W\left(\frac{2}{3}a \mid \frac{2}{27}a^3\right)$$

Ortskurve der Maxima:  $y = 4x^3$

Ortskurve der Wendepunkte:  $y = \frac{1}{4}x^3$



# Ortskurve $e$ -Funktionen

1. Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist eine Funktion gegeben durch

$$f_t(x) = e^x(t - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

- a) das Maximum  $\text{Max}(t - 1 \mid e^{t-1})$  ist (Begründung ohne die 2. Ableitung),
- b) die Ortskurve der Maxima lautet:  $g(x) = e^x$

Zur Kontrolle:  $f'_t(x) = e^x(t - x - 1)$

2. Für jedes  $t > 0$  ist eine Funktion gegeben durch

$$f_t(x) = e^{tx}(x - 1)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

- a) alle Funktionen  $f_t$  zwei gemeinsame Punkte haben,
- b) die 1. Ableitung lautet:  $f'_t(x) = (x - 1)(tx - t + 2)e^{tx}$ ,
- c) ein Minimum und ein Maximum existieren (Begründungen ohne die 2. Ableitung),
- d) die Ortskurve der Maxima lautet:  $g(x) = e^{\frac{2x}{1-x}}(x - 1)^2$

3. Für  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist eine Funktion gegeben durch

$$f_t(x) = -\frac{2x}{t}e^{tx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

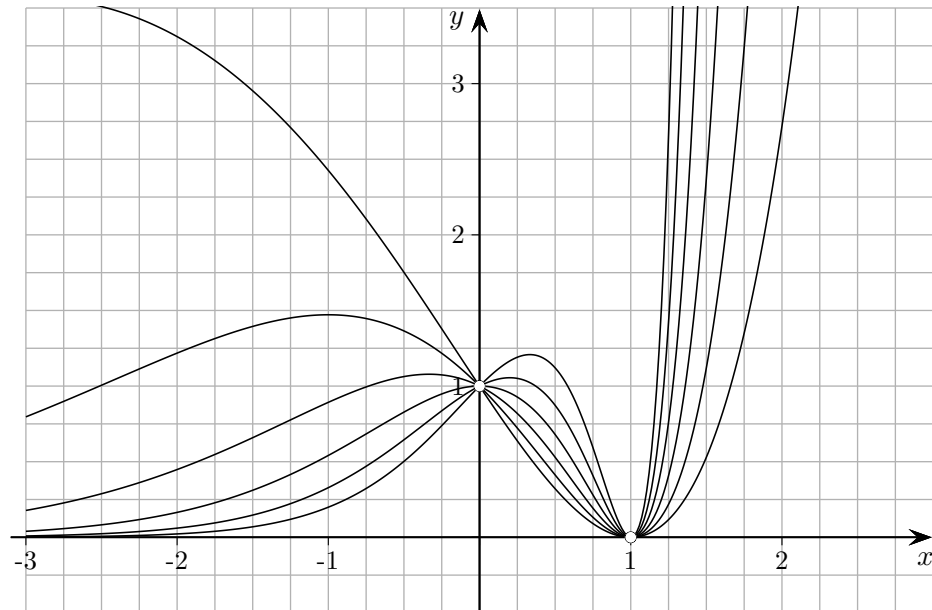
- a) der Wendepunkt  $W(-\frac{2}{t} \mid \frac{4}{e^{2 \cdot t^2}})$  ist (nur notw. Begründung),
- b) die Ortskurve der Wendepunkte lautet:  $g(x) = \frac{x^2}{e^2}$

Zur Kontrolle:  $f'_t(x) = -2e^{tx}(x + \frac{1}{t})$

$f''_t(x) = -2e^{tx}(2 + tx)$

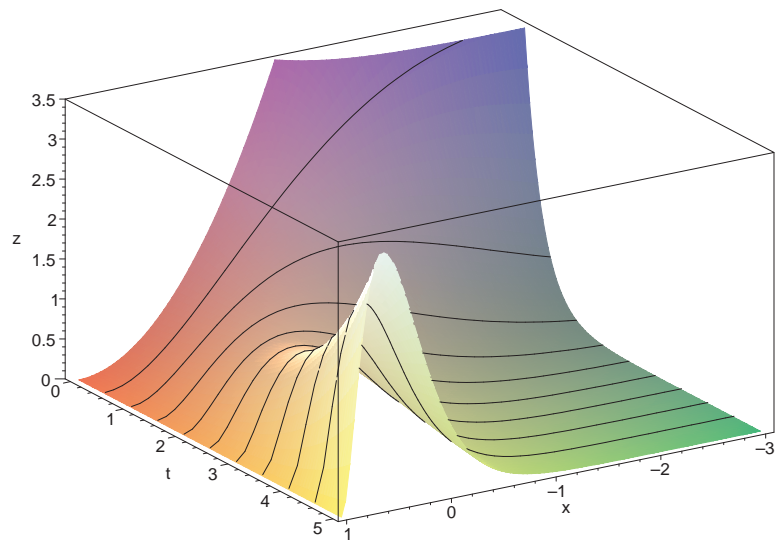
# Funktionenschar

Für jedes  $t > 0$  ist eine Funktion gegeben durch  $f_t(x) = e^{tx}(x-1)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  
Zeigen Sie, dass alle Funktionen  $f_t$  zwei gemeinsame Punkte haben.



Die offensichtlich gemeinsamen Punkte der Graphen könnten mit der Funktion verifiziert werden. Die gemeinsamen Punkte könnte man sich auch anhand des Funktionsterms überlegen, Frage: Für welche  $x$  fällt  $t$  heraus? Für diese  $x$  wäre also  $f_t(x)$  unabhängig von  $t$ . Ein umständlicherer Ansatz wäre  $f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x)$  oder etwas einfacher z.B.  $f_1(x) = f_t(x)$ .

## 3D-Darstellung



Der Einfluss des Parameters  $t$  auf den Graphen von  $f_t(x) = e^{tx}(x-1)^2$  ist in einer 3D-Darstellung besonders gut sichtbar.

Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}}$  mit  $a > 0$ .

Untersuchen Sie die Symmetrie der zugehörigen Graphen.

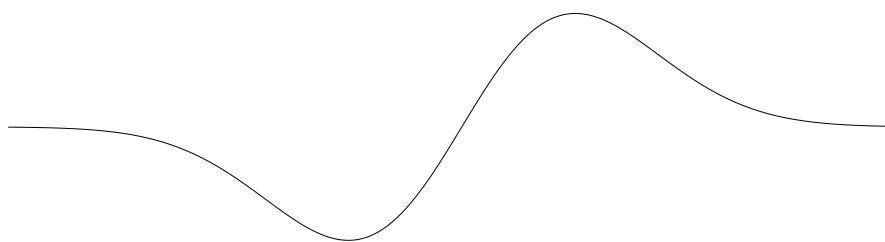
Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Geraden.

Ermitteln Sie deren Gleichung.

Was würde sich am Ergebnis ändern, falls die Voraussetzung  $a > 0$  fallen gelassen würde?

Die Abbildung zeigt den Graphen von  $f_1$  ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

Ergänzen Sie die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend.



Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}}$  mit  $a > 0$ .

Untersuchen Sie die Symmetrie der zugehörigen Graphen.

Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Geraden.

Ermitteln Sie deren Gleichung.

Was würde sich am Ergebnis ändern, falls die Voraussetzung  $a > 0$  fallen gelassen würde?

Die Abbildung zeigt den Graphen von  $f_1$  ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

Ergänzen Sie die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend.

Die Graphen der Schar sind symm. bezüglich des Koordinatenursprungs, es gilt  $f_a(x) = -f_a(-x)$ .

$$f'_a(x) = (1 - ax^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}}, \quad E_1\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \mid \frac{1}{\sqrt{a}}\right), \quad E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{a}} \mid -\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \quad y = x$$

Der Nachweis der Extrema (mit 2. Ableitung oder  $f_a(0) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_a(x) = 0$ ) ist nicht erforderlich.

Für  $a \leq 0$  existieren keine Extrema. Die Geradengleichung  $y = x$  ändert sich nicht.

