↑ Aufgaben zum logistischen Wachstum

1. Eine Untersuchung des Höhenwachstums von Hopfen ergab folgende Werte:

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12	16
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,0	3,3	4,1	5,0	5,5	5,8

   a) Schätzen Sie die Sättigungsgrenze und bestimmen Sie den fehlenden Parameter in der logistischen Funktion mithilfe eines Messpunktes.
   Vergleichen Sie das Ergebnis mit der logistischen Regressionskurve.

   b) Bestimmen Sie die Höhe des Hopfens nach 17 Wochen.

   c) Wächst der Hopfen nach 2 Wochen schneller als nach 10 Wochen?

2. Von 6000 isoliert lebenden Menschen (z. B. eines Indianerstamms) infiziert sich eine Person an Grippe. Durch gegenseitige Ansteckung zählt man nach 5 Wochen bereits 400 Kranke.

   a) Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modellieren, geht man von logistischem Wachstum der Anzahl K der Erkrankten aus. Was spricht für diese Annahme?

   b) Bestimmen Sie den Funktionsterm. Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Bewohner krank?
   Welche Bedeutung hat dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit?

   c) Wie groß ist in den ersten 2 Monaten die mittlere Zunahme an Erkrankten pro Woche?

3. Die Tabelle zeigt die Erdbevölkerungsentwicklung.

Jahr	1804	1927	1960	1974	1987	1999	2005
Anzahl (in Mrd.)	1	2	3	4	5	6	6,5

   a) Geben Sie eine logistische Regressionskurve an (mit dem GRT nur die letzten 4 Wertepaare berücksichtigen). Welche Sättigungsgrenze beinhaltet sie?

   b) In welchem Jahr sind demnach 7 (8, 9) Mrd. Menschen zu erwarten?

↑ Aufgaben zum logistischen Wachstum Lösungen

1. Eine Untersuchung des Höhenwachstums von Hopfen ergab folgende Werte:

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12	16
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,0	3,3	4,1	5,0	5,5	5,8

   a) Schätzen Sie die Sättigungsgrenze und bestimmen Sie den fehlenden Parameter in der logistischen Funktion mithilfe eines Messpunktes.
   Vergleichen Sie das Ergebnis mit der logistischen Regressionskurve.

$$f(x) = \frac{G \cdot f(0)}{f(0) + (G - f(0)) \cdot e^{-kGx}} = \frac{G}{1 + ae^{-kGx}}, \quad \text{mit} \quad a = \frac{G - f(0)}{f(0)}$$

$$f(x) = \frac{6}{1 + 9e^{-6kx}}$$

z. B. $f(10) = 5 \implies k = 0{,}0634$

   b) Bestimmen Sie die Höhe des Hopfens nach 17 Wochen. $f(17) = 5{,}9$

   c) Wächst der Hopfen nach 2 Wochen schneller als nach 10 Wochen?

geringfügig schneller, $f'(2) = 0{,}35 \quad f'(10) = 0{,}32$

2. Von 6000 isoliert lebenden Menschen (z. B. eines Indianerstamms) infiziert sich eine Person an Grippe. Durch gegenseitige Ansteckung zählt man nach 5 Wochen bereits 400 Kranke.

   a) Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modellieren, geht man von logistischem Wachstum der Anzahl K der Erkrankten aus. Was spricht für diese Annahme?

Zuwachs ist proportional zu $K(x)$ und $6000 - K(x)$

   b) Bestimmen Sie den Funktionsterm. Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Bewohner krank?
   Welche Bedeutung hat dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit?

$$K(x) = \frac{6000}{1 + 5999e^{-6000kx}}$$

$K(5) = 400 \implies k = 0{,}00020$

$K(x) = 3000 \implies x = 7{,}2$ (Wochen)

   c) Wie groß ist in den ersten 2 Monaten die mittlere Zunahme der Erkrank. pro Woche? $\frac{K(8)}{8} = 533$

3. Die Tabelle zeigt die Erdbevölkerungsentwicklung.

Jahr	1804	1927	1960	1974	1987	1999	2005
Anzahl (in Mrd.)	1	2	3	4	5	6	6,5

   a) Geben Sie eine logistische Regressionskurve an (mit dem GRT nur die letzten 4 Wertepaare berücksichtigen). Welche Sättigungsgrenze beinhaltet sie?

$$f(x) = \frac{11{,}5}{1 + 0{,}893e^{-0{,}0288x}}, \quad x = 0 \text{ entspricht dem Jahr 2000}, \quad G = 11{,}5$$

   b) In welchem Jahr sind demnach 7 (8, 9) Mrd. Menschen zu erwarten?

11,4 (24,8 40,5) d. h. im Jahr 2011 (2025 2041)

↑ Kürbis-Aufgabe

Für das Wachstum eines Kürbis einer bestimmten Sorte hat eine Biologin das folgende Modell aufgestellt:

$$f(x) = \frac{4000 \cdot e^{0,05x}}{19 + e^{0,05x}}$$

Dabei ist x ($x \geq 0$) die Zeit in Tagen, $f(x)$ bezeichnet die Masse des Kürbis in Gramm.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion ($0 \leq x \leq 300$).
Ermitteln Sie, wie schwer der Kürbis zu Beginn war.
Berechnen Sie, wie schwer der Kürbis maximal werden kann.
Ermitteln Sie grafisch, zu welchem Zeitpunkt die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist.
Geben Sie an, wie hoch diese Wachstumsgeschwindigkeit ist.

b) Berechnen Sie, wie schwer der Kürbis nach einem Monat ist.
Schätzen Sie ab, wie viel Gramm in der Stunde stärksten Wachstums hinzukommen.
Berechnen Sie, nach welcher Zeit 90 % der maximalen Kürbismasse erreicht sind.

c) Für die Ableitung f' gilt (kein Nachweis erforderlich): $f'(x) = 0{,}05 \cdot f(x) - \frac{0{,}05}{4000} \cdot f^2(x)$.
Bestimmen Sie damit den Wendepunkt exakt (die notwendige Bedingung reicht aus).
Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für das Wachstum des Kürbis.

Bringen Sie die DGL auf die Form: $f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$.
Was beinhaltet diese DGL in Hinblick auf die Wachstumsgeschwindigkeit?
Vergleichen Sie dieses Wachstum mit dem exponentiellen und dem beschränkten Wachstum.

d) Obige Funktion f gehört für $a = 19$ zu der Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = \frac{4000 \cdot e^{0,05x}}{a + e^{0,05x}}, \quad a > 0.$$

Untersuchen Sie graphisch den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf des Graphen.
Zeigen Sie, dass gilt:

$$f_a'(x) = \frac{200a \cdot e^{0,05x}}{\left(a + e^{0,05x}\right)^2}$$

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f_a und geben Sie die Wertemenge an.

e) Folgende Information können Sie ohne Nachweis benutzen:

$$f_a''(x) = \frac{10a \cdot e^{0,05x}(a - e^{0,05x})}{\left(a + e^{0,05x}\right)^3}$$

Berechnen Sie die maximale Wachstumsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von a.
Auf welcher Ortskurve liegen die Wendepunkte von f_a?

f) Der Graph von f_a, die y-Achse und die Gerade $y = 4000$ begrenzen im ersten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

↑ Kürbis-Aufgabe Ergebnisse ohne Einheiten

Für das Wachstum eines Kürbis einer bestimmten Sorte hat eine Biologin das folgende Modell aufgestellt:

$$f(x) = \frac{4000 \cdot e^{0{,}05x}}{19 + e^{0{,}05x}}$$

Dabei ist x ($x \geq 0$) die Zeit in Tagen, $f(x)$ bezeichnet die Masse des Kürbis in Gramm.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion ($0 \leq x \leq 300$).
Ermitteln Sie, wie schwer der Kürbis zu Beginn war. 200
Berechnen Sie, wie schwer der Kürbis maximal werden kann. 4000
Ermitteln Sie grafisch, zu welchem Zeitpunkt die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist. 58,9
Geben Sie an, wie hoch diese Wachstumsgeschwindigkeit ist. 50

b) Berechnen Sie, wie schwer der Kürbis nach einem Monat ist. 763
Schätzen Sie ab, wie viel Gramm in der Stunde stärksten Wachstums hinzukommen. 2
Berechnen Sie, nach welcher Zeit 90 % der maximalen Kürbismasse erreicht sind. 102,8

c) Für die Ableitung f' gilt (kein Nachweis erforderlich): $f'(x) = 0{,}05 \cdot f(x) - \frac{0{,}05}{4000} \cdot f^2(x)$.
Bestimmen Sie damit den Wendepunkt exakt (die notwendige Bedingung reicht aus).
Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für das Wachstum des Kürbis. $W\big(20 \cdot \ln(19) \mid 2000\big)$
Bringen Sie die DGL auf die Form: $f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$. $k = 0{,}0000125$
Was beinhaltet diese DGL in Hinblick auf die Wachstumsgeschwindigkeit?
Vergleichen Sie dieses Wachstum mit dem exponentiellen und dem beschränkten Wachstum.

d) Obige Funktion f gehört für $a = 19$ zu der Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = \frac{4000 \cdot e^{0{,}05x}}{a + e^{0{,}05x}}, \quad a > 0.$$

Untersuchen Sie graphisch den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf des Graphen.
Zeigen Sie, dass gilt:

$$f_a'(x) = \frac{200a \cdot e^{0{,}05x}}{\left(a + e^{0{,}05x}\right)^2}$$

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f_a und geben Sie die Wertemenge an. $f_a' > 0$, $\left[\frac{4000}{a+1}, 4000\right[$

e) Folgende Information können Sie ohne Nachweis benutzen:

$$f_a''(x) = \frac{10a \cdot e^{0{,}05x}(a - e^{0{,}05x})}{\left(a + e^{0{,}05x}\right)^3}$$

Berechnen Sie die maximale Wachstumsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von a. $f'(20 \cdot \ln(a)) = 50$
Auf welcher Ortskurve liegen die Wendepunkte von f_a? $y = 2000$

f) Der Graph von f_a, die y-Achse und die Gerade $y = 4000$ begrenzen im ersten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.
$A = 80000 \cdot \ln(a + 1)$

↑ Buscharten-Aufgabe

Gegeben ist die Funktionenschar:

$$f_{a,k}(x) = \frac{100 \cdot a}{a + e^{-k \cdot x}} \qquad \text{mit } a, k \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0,\ k \neq 0.$$

a) Versuchen Sie unterschiedliche Typen in Abhängigkeit der Parameter herauszufinden. Die zugehörigen Graphen sind zu skizzieren. Charakteristische Eigenschaften in Abhängigkeit der Parameter sind herauszustellen und zu begründen, insbesondere das asymptotische Verhalten bzw. gegebenenfalls vorliegende Eigenschaften bzgl. Symmetrie und Spiegelung. Mögliche Wendepunkte sind algebraisch in Abhängigkeit der Parameter zu bestimmen.

$$f''_{a,k}(x) = -\frac{100ak^2 e^{-k \cdot x}(-e^{-k \cdot x} + a)}{(a + e^{-k \cdot x})^3} \qquad \text{kann ohne Herleitung benutzt werden.}$$

b) Lösen Sie die Differentialgleichung $h'(x) = r \cdot \big(100 - h(x)\big)$ mit $h(x) < 100$, $r \in \mathbb{R}$ und $r > 0$.

c) Zwei Buscharten haben ein unterschiedliches Längenwachstum in Abhängigkeit von der Zeit. Die mittleren Längen (in cm) sind für die ersten 18 Monate erfasst. Nach etwa 20 Monaten gelten beide Buscharten als ausgewachsen. Die beiden Sorten eignen sich nach Auskunft des Verkäufers sehr gut dazu, sie in einer „Buschreihe“ abwechselnd anzupflanzen:

Buschsorte I

x (in Monaten)	0	2	3	4	6	9	12	15	18
y (in cm)	10	16,5	24,2	31,1	48,0	71,5	87,0	95,5	98,6

Buschsorte II

x (in Monaten)	0	2	3	4	6	9	12	15	18
y (in cm)	10	58,5	73,0	79,5	92,0	97,6	98,7	99,5	99,9

Erläutern Sie vergleichend das „Wachstumsverhalten“ und ermitteln Sie mögliche Funktionsgleichungen. Bestimmen Sie jeweils diejenige Zeit, die nötig ist, um 50 % der jeweiligen maximalen mittleren Pflanzengröße zu erreichen! Vergleichen Sie auch mit den Aufgabenteilen vorher! (Siehe (*)) Die zu Buschsorte I ermittelte Funktion soll in einem geeigneten Teilbereich ersetzt werden durch eine Funktion des Typs

$$w_{a,s}(x) = a \cdot e^{s \cdot x} \qquad \text{mit } s \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0.$$

Bestimmen Sie den Graphen dieser Funktion und deuten Sie das Ergebnis!

d) Untersuchen Sie den Längenunterschied der beiden Pflanzensorten in Abhängigkeit von der Zeit. Begründen Sie die Eigenschaften des zugehörigen Graphen auch aus den Ergebnissen von c)! (Siehe (*))

(*) Falls in c) keine brauchbaren Ergebnisse erzielt werden, arbeite man ersatzweise mit:

$$\text{I)}\ \ l(x) = \frac{100}{1 + 10 \cdot e^{-0{,}35 \cdot x}} \qquad \text{II)}\ \ b(x) = 100 - 80 \cdot e^{-0{,}35 \cdot x}$$

↑ Punktsymmetrie zum Wendepunkt

Der Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{100 \cdot a}{a + e^{-k \cdot x}} \qquad \text{mit } a, k \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0,\ k \neq 0$$

ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt.

Der Wendepunkt lautet: $W\Big(-\frac{\ln(a)}{k} \mid 50\Big)$

Der Graph wird so verschoben, dass der Wendepunkt im Ursprung liegt.

$$f^*(x) = f(x - \frac{\ln(a)}{k}) - 50 = \frac{100 \cdot a}{a + e^{-k \cdot (x - \frac{\ln(a)}{k})}} - 50$$

Der Funktionsterm von f^* kann vereinfacht werden. beachte: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$$f^*(x) = \frac{100}{1 + e^{-k \cdot x}} - 50 = \frac{50(1 - e^{-k \cdot x})}{1 + e^{-k \cdot x}}$$

Der Nachweis von $f^*(-x) = -f^*(x)$ gelingt mit den Umformungen:

$$f^*(-x) = \frac{50(1 - e^{k \cdot x})}{1 + e^{k \cdot x}} = \frac{50(e^{-k \cdot x} - 1)}{e^{-k \cdot x} + 1} = -\frac{50(1 - e^{-k \cdot x})}{e^{-k \cdot x} + 1} = -f^*(x)$$

↑ Sonnenblumen-Aufgabe

a) Die Höhe von Sonnenblumen wird während des Wachsens gemessen. Zu Beginn der Messungen beträgt die Höhe im Schnitt 0,1 (m), nach 100 Tagen 1,27 (m) und nach 180 Tagen ist 1,94 (m).
Ermitteln Sie (mit dem GTR) eine Funktion, die das Höhenwachstums beschreibt und stellen Sie eine begründete Vermutung über die Höhe einer ausgewachsenen Sonnenblume auf.

b) Ein Biologe verwendet zur Modellierung des Höhenwachstums die Funktion

$$f_k(x) = \frac{2e^{kx}}{e^{kx} + 19}, \quad k > 0.$$

1) Untersuchen Sie ohne GTR, ob f_k streng monoton steigend ist.
2) Nach welcher Zeit (von k abhängig) hat sich die durch f_k festgelegte Anfangslänge verdoppelt? Welchen Einfluss hat k auf den Verlauf des Graphen?

c) Der Biologe verwendet allgemein zur Wachstums-Modellierung die Funktion $h(x) = \dfrac{ae^{kx}}{e^{kx} + b}$, a, b und k positiv.

1) Wie groß ist dann (allgemein) die Grenzhöhe G?
2) Bestimmen Sie a und b so, dass eine Sonnenblume zu Beginn der Messung 0,2 (m) hoch ist und die Grenzhöhe 1,8 (m) beträgt.

d) Die Funktion $g(x) = \dfrac{f_k'(x)}{f_k(x)}$ beschreibt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit bezogen auf eine Höheneinheit.

1) Erläutern Sie den Sinn dieser Funktion.
2) Bestimmen Sie den Grenzwert von $g(x)$ für $x \to \infty$.
3) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\,dx$.

↑ Sonnenblumen-Aufgabe Lösungshinweise

a) Die Höhe von Sonnenblumen wird während des Wachsens gemessen. Zu Beginn der Messungen beträgt die Höhe im Schnitt 0,1 (m), nach 100 Tagen 1,27 (m) und nach 180 Tagen ist 1,94 (m).
Ermitteln Sie (mit dem GTR) eine Funktion, die das Höhenwachstums beschreibt und stellen Sie eine begründete Vermutung über die Höhe einer ausgewachsenen Sonnenblume auf.

$$f(x) = \frac{c}{1+ae^{-bx}}$$

$$a = 19{,}09$$
$$b = 0{,}035$$
$$c = 2{,}009$$

b) Ein Biologe verwendet zur Modellierung des Höhenwachstums die Funktion

$$f_k(x) = \frac{2e^{kx}}{e^{kx}+19}, \quad k > 0.$$

1) Untersuchen Sie ohne GTR, ob f_k streng monoton steigend ist.

$$f_k'(x) = \frac{38ke^{kx}}{(e^{kx}+19)^2} > 0$$

Es ist sinnvoll, f_k umzuformen und dann abzuleiten: $f_k(x) = \dfrac{2}{1+19e^{-kx}}$

$$f_k'(x) = \frac{38ke^{-kx}}{(1+19e^{-kx})^2} > 0$$

2) Nach welcher Zeit (von k abhängig) hat sich die durch f_k festgelegte Anfangslänge verdoppelt?
Welchen Einfluss hat k auf den Verlauf des Graphen?

$$\frac{1}{k}\ln\frac{19}{9}$$

c) Der Biologe verwendet allgemein zur Wachstums-Modellierung die Funktion $h(x) = \dfrac{ae^{kx}}{e^{kx}+b}$,
a, b und k positiv.

1) Wie groß ist dann (allgemein) die Grenzhöhe G?

$$h(x) = \frac{a}{1+be^{-kx}}, \qquad G = a$$

2) Bestimmen Sie a und b so, dass eine Sonnenblume zu Beginn der Messung 0,2 (m) hoch ist und die Grenzhöhe 1,8 (m) beträgt.

$$a = 1{,}8 \qquad \frac{a}{1+b} = 0{,}2 \quad \Longrightarrow \quad b = 8$$

d) Die Funktion $g(x) = \dfrac{f_k'(x)}{f_k(x)}$ beschreibt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit bezogen auf eine Höheneinheit.

1) Erläutern Sie den Sinn dieser Funktion. relative (prozentuale) Wachstumsgeschwindigkeit ...

2) Bestimmen Sie den Grenzwert von $g(x)$ für $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{19k}{e^{kx}+19} = 0$$

3) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\,dx$.

$\ln 2 - \ln\frac{1}{10} = \ln 20$, beachte hierzu die Darstellung $g(x) = \dfrac{f_k'(x)}{f_k(x)}$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) + C$$

↑ Typische Fragestellungen

1. Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate D der Population für die ersten 30 Tage.
   Gibt es Zeitpunkte, an denen D gleich der momentanen Änderungsrate ist?

2. Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit maximal wird.

3. Begründen oder widerlegen Sie: Es gibt keinen Zeitpunkt mit lokaler Änderungsrate von $0{,}8\,\frac{cm}{Tag}$.

4. Zeigen Sie mithilfe der DGL, dass für die y-Koordinate des Wendepunktes gilt: $y = \frac{G}{2}$
   Ermitteln Sie die Ortskurve der Wendepunkte.

5. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, für den 99 % der Kapazitätsgrenze erreicht wird.

6. Ermitteln Sie mit Hilfe der DGL $y' = a \cdot f(t) - b \cdot \big(f(t)\big)^2$ die Grenze G.

7. Ermitteln Sie mit Hilfe der angegebenen Daten und einer geeigneten Regression eine passende Wachstumsfunktion.