Logistisches Wachstum

Verhulst (1804-1849), belgischer Mathematiker

Das exponentielle Wachstum ist durch einen konstanten Wachstumsfaktor k gekennzeichnet. Zur Erinnerung:

$\Delta y = k \cdot f(x) \cdot \Delta x$ Der Zuwachs ist proportional zum Bestand und zur Zeit x.

d.h. $f'(x) = k \cdot f(x)$, die Lösung lautet: $f(x) = a \cdot e^{kx}$

Realistischer ist ein Wachstumsmodell, das die Beschränktheit des Wachstums berücksichtigt. Der Wachstumsfaktor k soll sich nun aus der konstanten Vermehrungsrate k_1 und der zum jeweiligen Bestand $f(x)$ proportionalen Sterberate k_2 zusammensetzen. Die zugehörige DGL (Differentialgleichung) lautet daher:

$$* \quad f'(x) = (k_1 - k_2 \cdot f(x)) \cdot f(x)$$

Beispiel:

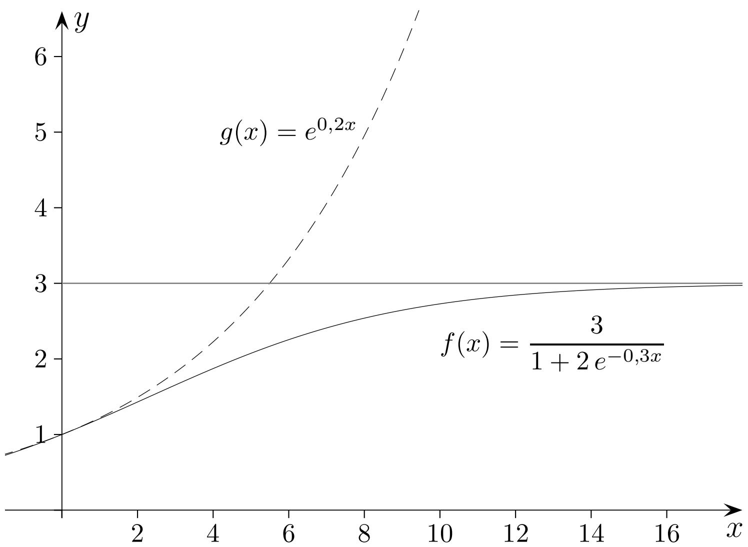
$$* * \quad f'(x) = (0{,}3 - 0{,}1 \cdot f(x)) \cdot f(x)$$

Wir suchen eine Lösung, für die $f(0) = 1$ ist.

Aus dieser DGL sind einige Eigenschaften von f zu erkennen:

1. f ist monoton steigend,
2. die Funktionswerte von f nähern sich dem Wert 3, der nicht überschritten wird,
3. Der Graph von f hat einen s-förmigen (sigmoiden) Verlauf,
4. $g(x) = e^{0,2x}$ ist eine Näherungsfunktion für einen kleinen Bereich um $x = 0$.

Die Lösung der DGL $**$ lautet: $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\,e^{-0,3x}}$



Herleitung:

$$\begin{aligned}
y' &= (0{,}3 - 0{,}1\,y)\,y \\
\frac{10\,y'}{(3-y)\cdot y} &= 1 \\
\frac{y'}{y} + \frac{y'}{3-y} &= \frac{3}{10} \qquad \textit{Partialbruch-zerlegung} \\
\ln y - \ln(3-y) &= \frac{3}{10}\,x + C \\
\frac{y}{3-y} &= e^{-0,3\,x} \cdot C^*, \quad C^* = \tfrac{1}{2} \\
y &= \ldots = \frac{3}{1 + 2\,e^{-0,3\,x}}
\end{aligned}$$

Aufg.
Leite beide Seiten der DGL $*$ ab und bestimme damit den y-Wert des Wendepunktes.

Verhulst wurde von der franz. Regierung beauftragt, das Bevölkerungswachstum von Paris und damit die Anzahl der benötigten Wohnungen (franz. logis Unterkunft, Wohnraum) abzuschätzen.

Relatives Sättigungsmanko

Die DGL des logistischen Wachstums, die die Proportionalität der Wachstumsgeschwindigkeit zum Bestand und zum Sättigungsmanko beinhaltet,

$$f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$$

wird durch

$$f(x) = \frac{G \cdot f(0)}{f(0) + (G - f(0)) \cdot e^{-kGx}} \quad = \frac{G}{1 + ae^{-kGx}}\,, \qquad \text{mit} \quad a = \frac{G - f(0)}{f(0)}$$

gelöst.

Der Bezug zum exponentiellen Wachstum wird hervorgehoben,
indem k durch $\frac{k^*}{G}$ ersetzt und anschließend k^* wieder in k umbenannt wird:

$$f'(x) = k \cdot f(x) \cdot \left(1 - \frac{f(x)}{G}\right)$$

$$f(x) = \frac{G}{1 + ae^{-kx}}$$

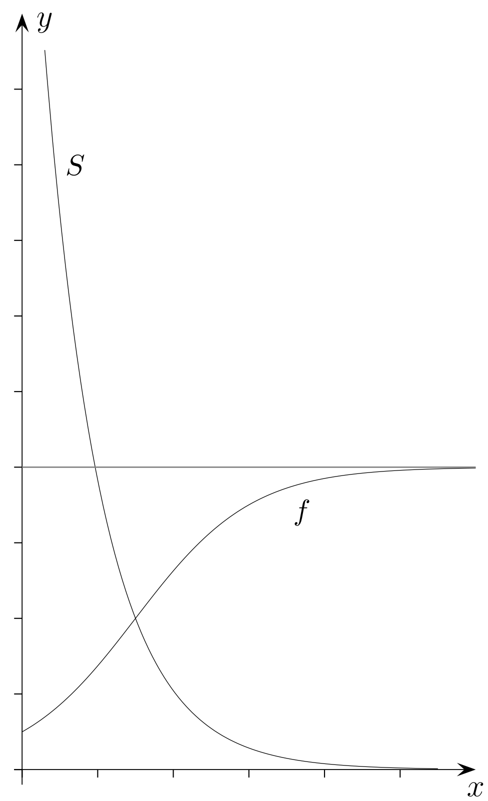
Eine Umformulierung der Lösung offenbart eine interessante Eigenschaft dieses Wachstums.

$$\frac{f(x)}{G} = \frac{1}{1 + ae^{-kx}}$$

$$\frac{G}{f(x)} = 1 + ae^{-kx}$$

$$\frac{G}{f(x)} - 1 = \frac{G - f(0)}{f(0)}\, e^{-kx}$$

$$\frac{G - f(x)}{f(x)} = \frac{G - f(0)}{f(0)}\, e^{-kx}$$



Das zum Bestand relative Sättigungsmanko

$$S(x) = \frac{G - f(x)}{f(x)}$$

nimmt also exponentiell ab.

Beim begrenzten Wachstum gilt dies für das absolute Sättigungsmanko.

Einfache Lösung der logistischen DGL

Beginnen wir nun noch einmal von vorne mit der DGL

$$f'(x) = k \cdot f(x) \cdot \Big(1 - \frac{f(x)}{G}\Big), \qquad k > 0$$

und weisen für das relative Sättigungsmanko

$$S(x) = \frac{G - f(x)}{f(x)}$$

$$S'(x) = -kS(x) \qquad \text{nach.}$$

Diese Beziehung ermöglicht ein einfaches Lösen der DGL und kann aufgrund von vorgegebenen Daten in Anlehnung an das begrenzte Wachstum vermutet werden.

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{G}{f(x)} - 1 \\
S'(x) &= -\frac{G \cdot f'(x)}{(f(x))^2} \\
&= -\frac{G \cdot k \cdot \Big(1 - \frac{f(x)}{G}\Big)}{f(x)} \\
&= -k \cdot \frac{G - f(x)}{f(x)} \\
S'(x) &= -kS(x)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
S(x) &= S(0)\,e^{-kx} \\
\frac{G - f(x)}{f(x)} &= S(0)\,e^{-kx} \\
\frac{G}{f(x)} - 1 &= S(0)\,e^{-kx} \\
\frac{G}{f(x)} &= 1 + S(0)\,e^{-kx} \\
\frac{f(x)}{G} &= \frac{1}{1 + S(0)\,e^{-kx}} \\
f(x) &= \frac{G}{1 + S(0)\,e^{-kx}} \qquad \text{mit} \quad S(0) = \frac{G - f(0)}{f(0)}
\end{aligned}$$