

Merkhilfe Integralrechnung

1. Integralfunktion $A_a(x) = ?$

Hauptsatz $A'_a(x) = ?$

$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

2. von der Änderungsrate zum Bestand
Bestandsfunktion

$$F(x) = ?$$

3. mittlerer Funktionswert $m = ?$

4. Volumen eines
Rotationskörpers $V = ?$

5. Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax + b)$	

6. Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

7. durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a, b]$ $m = ?$
momentane (lokale) Änderungsrate von f an der Stelle a ?

8. Inhalt der Fläche zwischen zwei Graphen,
obere Funktion f , untere g , Grenzen a, b $A = ?$
mehrere Schnittstellen $A = ?$
9. uneigentliches Integral $\int_a^{\infty} f(x) dx = ?$
10. Volumen eines Hohlkörpers
obere Funktion f , untere g , Grenzen a, b $V = ?$
11. Volumen bei Rotation um die y -Achse
12. unbestimmtes Integral $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ?$

Ende der Merkhilfe Integralrechnung

zum Anfang

zur Merkhilfe

Grundwissen

Differenzialrechnung

Vektorrechnung

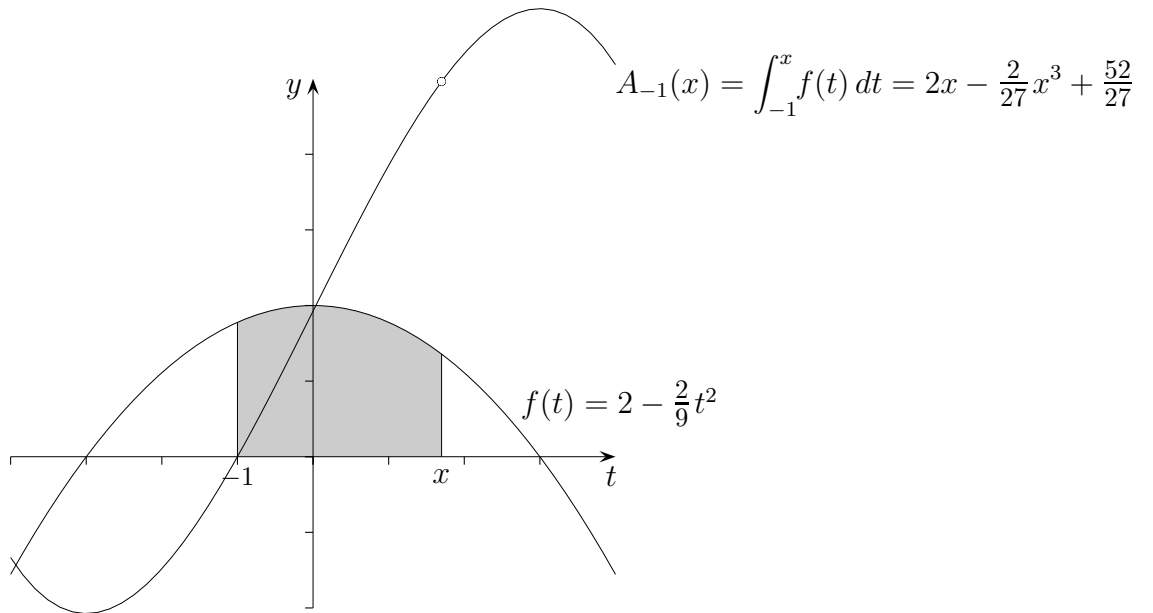
Stochastik

Homepage

Integralfunktion $A_a(x) = \int_a^x f(u) du$

Hauptsatz $A'_a(x) = ?$

$$\int_a^b f(x) dx = ?$$



←

Integralfunktion

$$A_a(x) = \int_a^x f(u) du$$

Hauptsatz

$$A'_a(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

←

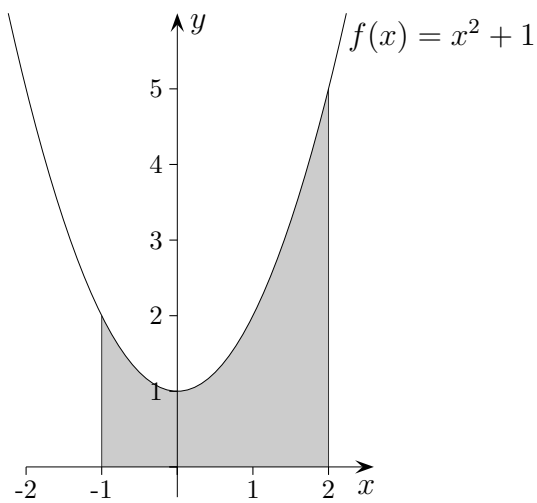
Integralfunktion $A_a(x) = ?$

Hauptsatz $A'_a(x) = ?$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

←

$$A = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = \dots = 6$$

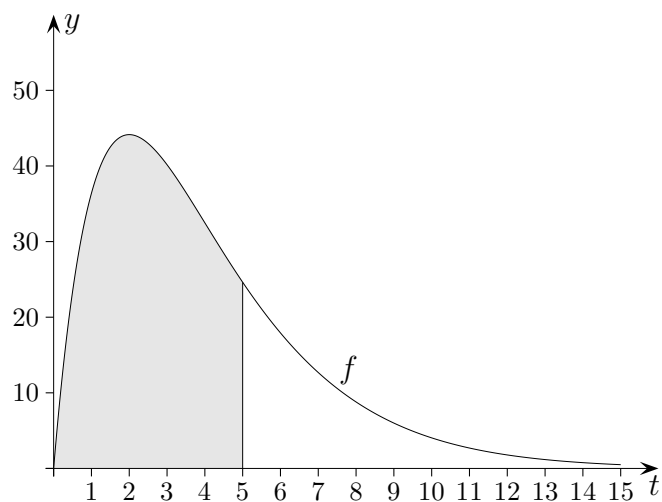


von der Änderungsrate zum Bestand
Bestandsfunktion $F(x) = ?$

←

Bei einem Gewitter beschreibt die Funktion $f(t) = 60 \cdot t \cdot e^{-0,5t}$, $0 \leq t \leq 15$, modellhaft die Menge des auftretenden Regens in ml pro m^2 und Minute, Zeit t nach Beginn des Gewitters in Minuten.

- a) Ermittle die Regenmenge in ml pro m^2 , die
- 1) in den ersten 5 Minuten nach Beginn des Gewitters,
 - 2) zwischen der 5. und 10. Minute gefallen ist.
- b) Nach welcher Zeit von Beginn des Gewitters sind 200 ml pro m^2 gefallen?

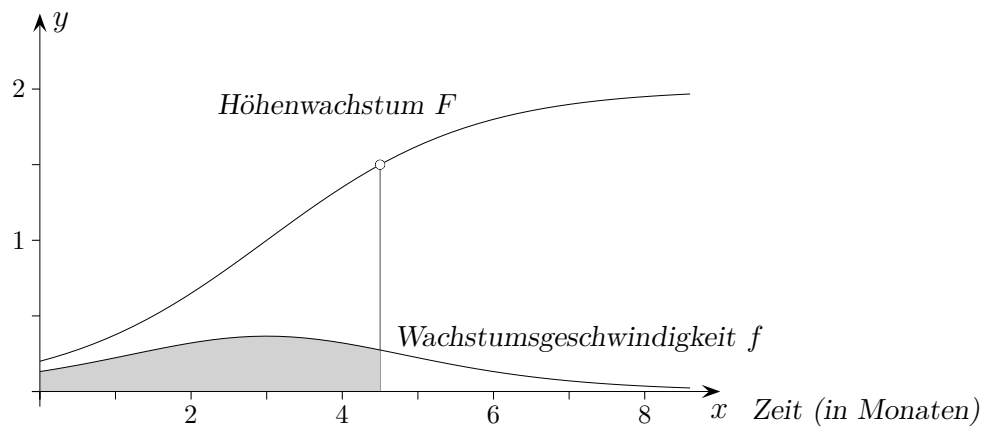


- a) 1) $\int_0^5 f(t) dt = 171,0$ [ml/ m^2]
- 2) $\int_5^{10} f(t) dt = 59,2$ [ml/ m^2]
- b) $\int_0^{t_0} f(t) dt = 200 \implies t_0 = 6,5$ [Minuten]

von der Änderungsrate zum Bestand

Bestandsfunktion

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(u) du$$



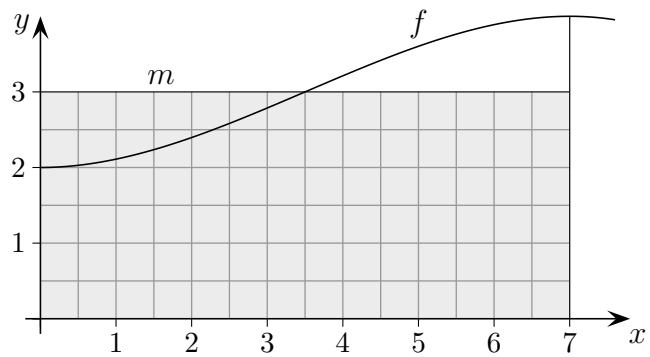
Gegeben ist die Wachstumsgeschwindigkeit (in m/Monat) von Sonnenblumen.
Zeichne den Verlauf des Höhenwachstums in Abhängigkeit von der Zeit, zur Zeit $x = 0$
beträgt die Höhe $0,20\text{ m}$.

←

$$F(0) = 0,20$$

Anfangsbestand $F(a)$, Anfang a (meistens $a = 0$)

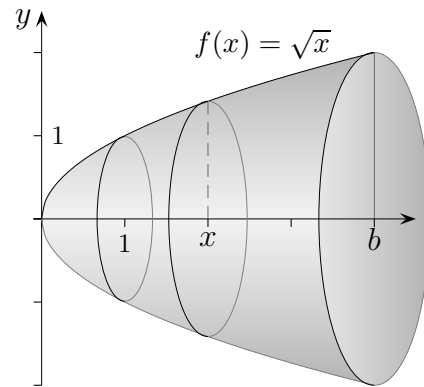
mittlerer Funktionswert $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$



←

Volumen eines
Rotationskörpers

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



←

$$V = \pi \int_0^b [\sqrt{x}]^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \pi \frac{b^2}{2}$$

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$		$k \cdot F(x)$
$x^r \ (r \neq -1)$		
$\sin x$		
$\cos x$		
e^x		
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$		
$f(ax + b)$		

←

Stammfunktion von

$$\begin{array}{l|l} k \cdot f(x) & \\ x^r \ (r \neq -1) & \frac{1}{r+1} x^{r+1} \\ \sin x & \\ \cos x & \\ e^x & \\ \frac{1}{x} \ (x > 0) & \\ f(ax+b) & \end{array}$$

←

Stammfunktion von

$$\begin{array}{l|l} k \cdot f(x) & \\ x^r \ (r \neq -1) & \\ \sin x & -\cos x \\ \cos x & \\ e^x & \\ \frac{1}{x} \ (x > 0) & \\ f(ax + b) & \end{array}$$

←

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$		
$x^r \ (r \neq -1)$		
$\sin x$		
$\cos x$		$\sin x$
e^x		
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$		
$f(ax + b)$		

←

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$		e^x
$x^r \ (r \neq -1)$		
$\sin x$		
$\cos x$		
e^x		
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$		
$f(ax + b)$		

←

Stammfunktion von

$$\begin{array}{l|l} k \cdot f(x) & \\ x^r \ (r \neq -1) & \\ \sin x & \\ \cos x & \\ e^x & \\ \frac{1}{x} \ (x > 0) & \ln x \\ f(ax + b) & \end{array}$$

←

Beachte:

Über Unendlichkeitsstellen (Polstellen) darf man nicht einfach „hinweg integrieren“.

Stammfunktion von

$$\begin{array}{l|l} k \cdot f(x) & \\ x^r \ (r \neq -1) & \\ \sin x & \\ \cos x & \\ e^x & \\ \frac{1}{x} \ (x > 0) & \\ f(ax + b) & \frac{1}{a} F(ax + b) \end{array}$$

←

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = k$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

←

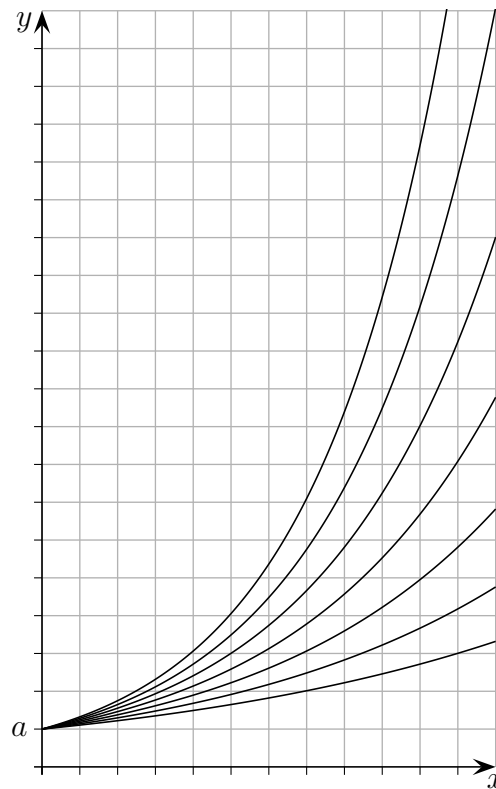
Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = k$	$f(x) = kx + c$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

←

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = kf(x)$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

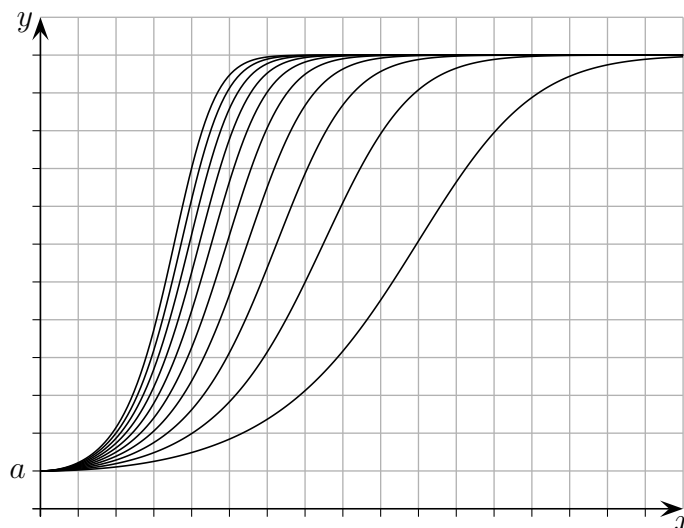
←

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = kf(x)$	$f(x) = ae^{kx}$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$



←

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = k(S - f(x))f(x)$	$f(x) = \frac{aS}{a + (S - a)e^{-kSx}}$



←

alternativ

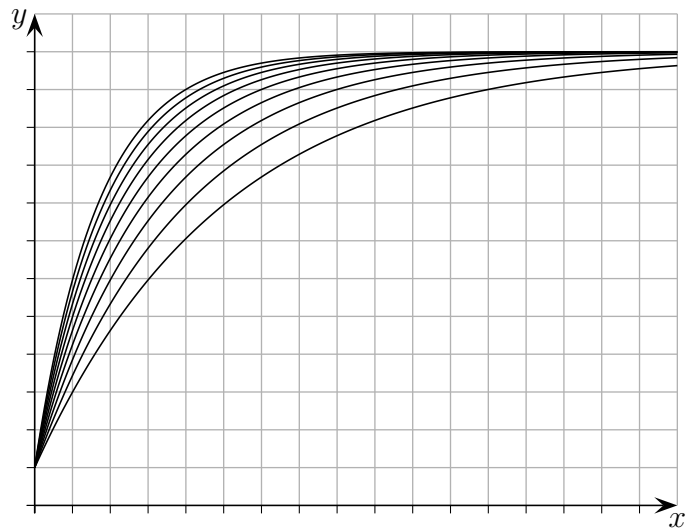
$$f(t) = \frac{S}{1 + ae^{-kt}}, \quad f(0) = \frac{S}{1 + a}$$

$$f'(t) = \frac{k}{S} \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = k(S - f(x))$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

←

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = k(S - f(x))$	$f(x) = S - ae^{-kx}$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$



←

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = k(S - f(x))f(x)$	$f(x) = ?$

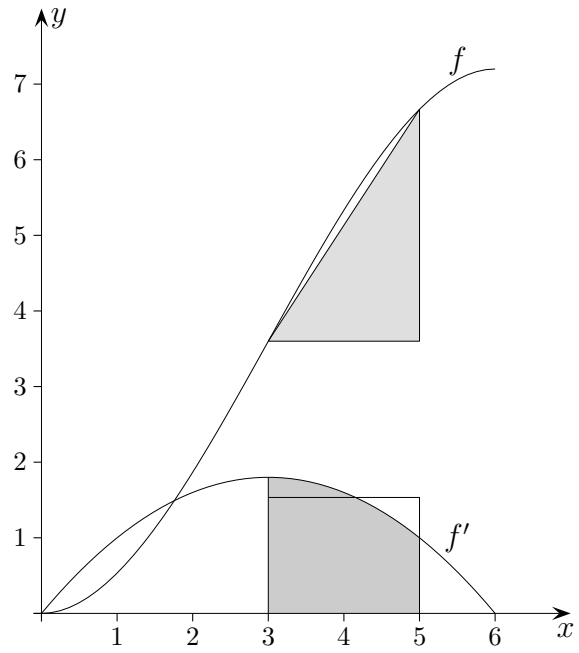
←

durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a, b]$
momentane (lokale) Änderungsrate von f an der Stelle a

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

?

←



durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a, b]$

$m = ?$

momentane (lokale) Änderungsrate von f an der Stelle a

$f'(a)$

←

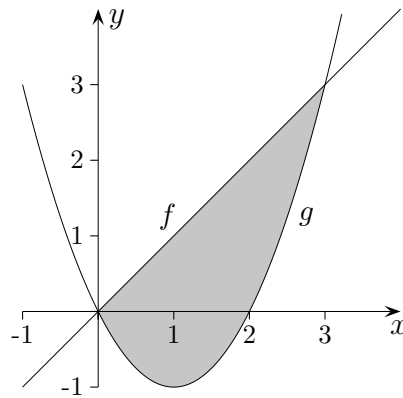
Inhalt der Fläche zwischen zwei Graphen,

obere Funktion f , untere g , Grenzen a , b

mehrere Schnittstellen

$$A(x) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$A(x) =$$



←

Inhalt der Fläche zwischen zwei Graphen,
obere Funktion f , untere g , Grenzen a, b

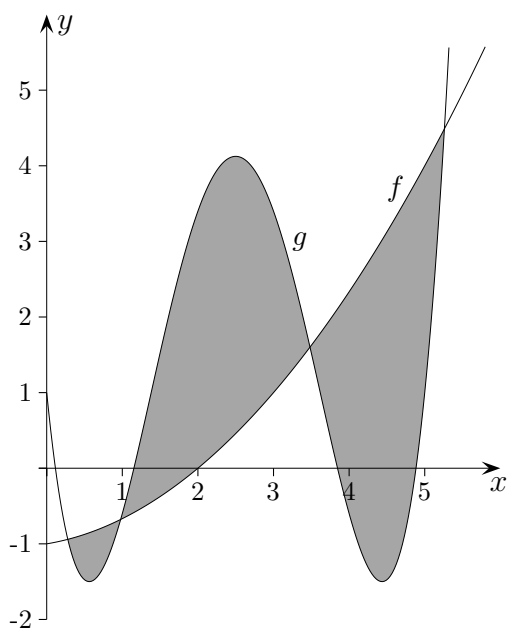
$$A = ?$$

mehrere Schnittstellen

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

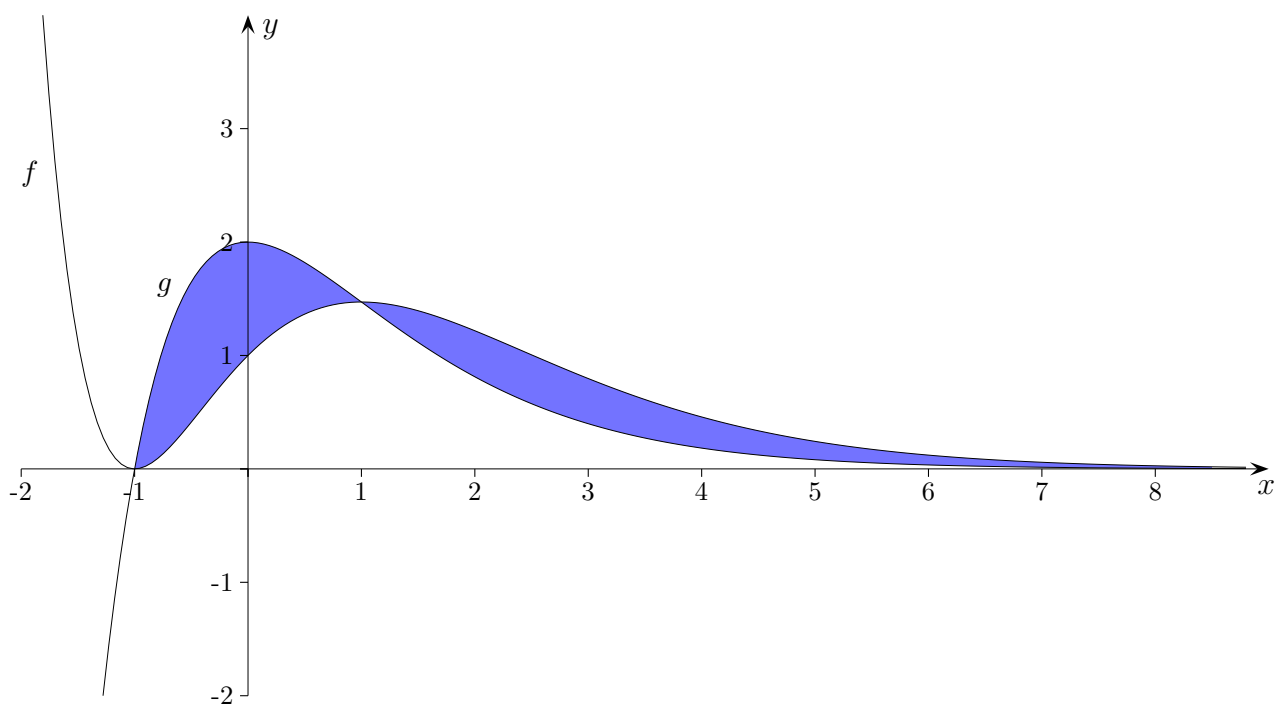
GTR, abs()

oder abschnittsweise Berechnung



uneigentliches Integral

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx$$



Gegeben sind die Funktionen:

$$f(x) = (x + 1)^2 \cdot e^{-x}$$

$$g(x) = 2(x + 1) \cdot e^{-x}$$

Deuten Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-1}^t (f(x) - g(x)) dx = 0$ geometrisch.

Zeigen Sie, dass $f'(x) = g(x) - f(x)$ gilt und berechnen Sie den Inhalt der Fläche A , die im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ von den Graphen von f und g eingeschlossen wird.

[zur Kontrolle: $A = \frac{4}{e}$]

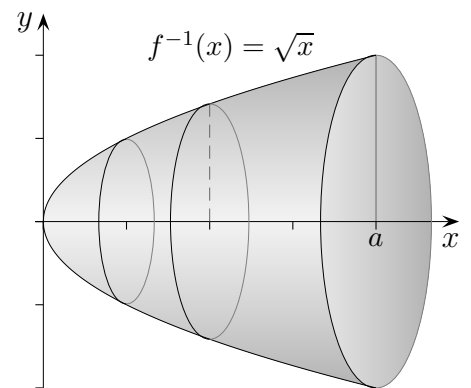
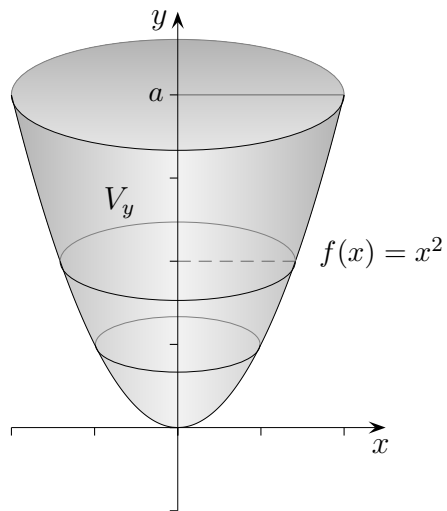
←

Volumen eines Hohlkörpers

obere Funktion f , untere g , Grenzen a, b

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx$$
$$\neq \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$$

←



$$V_y = \pi \int_0^a [f^{-1}(y)]^2 dy = \pi \int_0^a [f^{-1}(x)]^2 dx$$

$$V_y = \pi \int_0^4 [f^{-1}(x)]^2 dx = 8\pi$$

Das Volumen bei Rotation um die y -Achse ist gleich dem Volumen bei Rotation der Umkehrfunktion um die x -Achse. Die Grenzen sind anzupassen.

←

unbestimmtes Integral

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$$

←

$$g(x) = \ln(f(x))$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{Kettenregel, beachte } (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

allgemein

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$