Merkhilfe Integralrechnung

1. Integralfunktion von f $\quad A_a(x) = ?$

   Hauptsatz $\quad A_a'(x) = ?$

   $$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

2. von der Änderungsrate zum Bestand
   Bestandsfunktion von f $\quad F(x) = ?$
   maximale Änderungsrate

3. mittlerer Funktionswert $\quad m = ?$

4. Volumen eines Rotationskörpers $\quad V = ?$

5. Stammfunktion von

   $k \cdot f(x)$
   $x^r \ (r \neq -1)$
   $\sin x$
   $\cos x$
   e^x
   $\frac{1}{x} \ (x > 0)$
   $f(ax+b)$

6.

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

7. durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a, b]$ $\quad m = ?$
   momentane (lokale) Änderungsrate von f an der Stelle a $\quad ?$

8. Inhalt der Fläche zwischen zwei Graphen,
obere Funktion f, untere g, Grenzen a, b $\quad A = ?$

mehrere Schnittstellen $\quad A = ?$

9. uneigentliches Integral $\quad \int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \,?$

10. Volumen eines Hohlkörpers
obere Funktion f, untere g, Grenzen a, b $\quad V = ?$

11. Volumen bei Rotation um die y-Achse

12. unbestimmtes Integral $\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \,?$

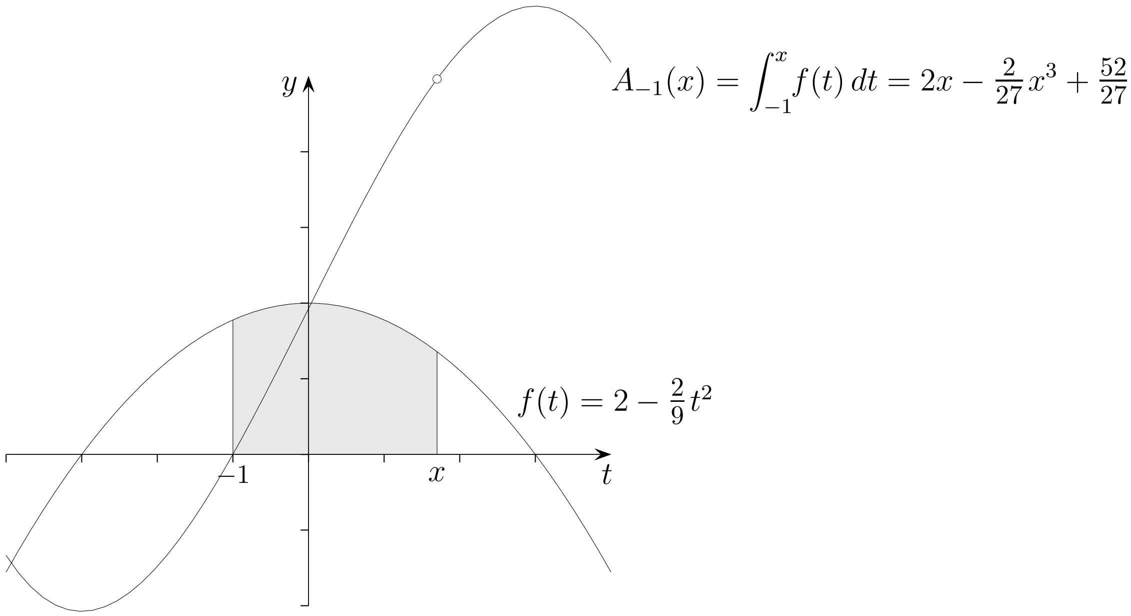
13. Aufgaben mit einem Parameter Lösungsschema
Wie ist das a zu wählen, dass … ?

zum Anfang

Integralfunktion von f $\quad A_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Hauptsatz $\quad A'_a(x) = ?$

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$



$\longleftarrow$

Integralfunktion	$A_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
Hauptsatz	$A'_a(x) = f(x)$
	$\int_a^b f(x)\,dx = ?$

$\longleftarrow$

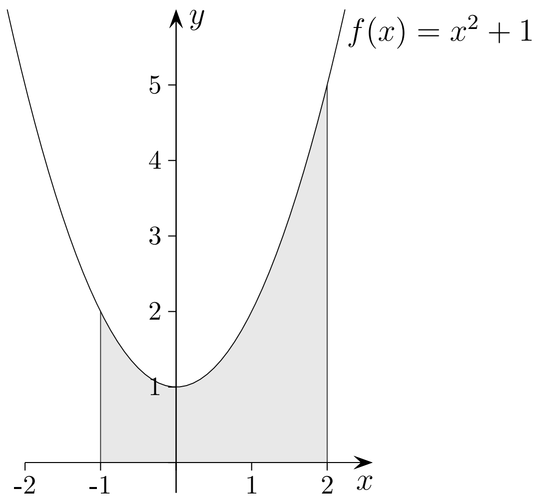
Integralfunktion $\quad A_a(x) = ?$

Hauptsatz $\quad A_a'(x) = ?$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$\longleftarrow$

$$A = \int\limits_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 2 - (-\frac{1}{3} - 1) = \ldots = 6$$



von der Änderungsrate zum Bestand

Bestandsfunktion von f $\quad F(x) = ?$

maximale Änderungsrate

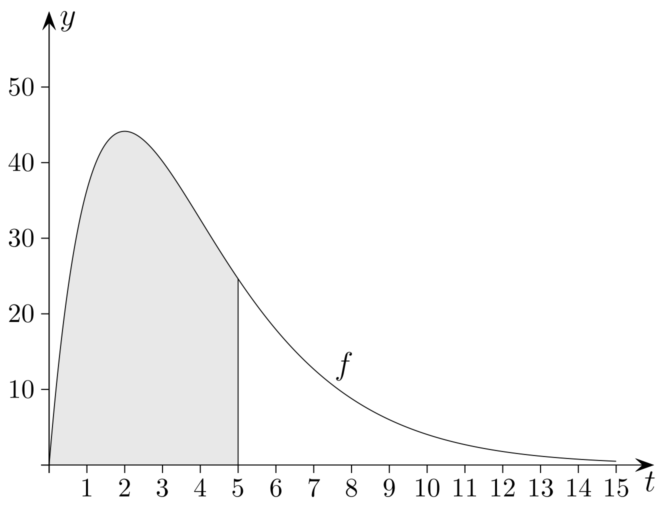
Bei einem Gewitter beschreibt die Funktion $f(t) = 60 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t},\ 0 \leq t \leq 15$, modellhaft die Menge des auftretenden Regens in ml pro m^2 und Minute, Zeit t nach Beginn des Gewitters in Minuten.

a) Ermittle die Regenmenge in ml pro m^2, die

1) in den ersten 5 Minuten nach Beginn des Gewitters,

2) zwischen der 5. und 10. Minute gefallen ist.

b) Nach welcher Zeit von Beginn des Gewitters sind 200 ml pro m^2 gefallen?



a) 1) $\displaystyle\int_0^5 f(t)\,dt = 171{,}0 \quad [\mathrm{ml/m^2}]$

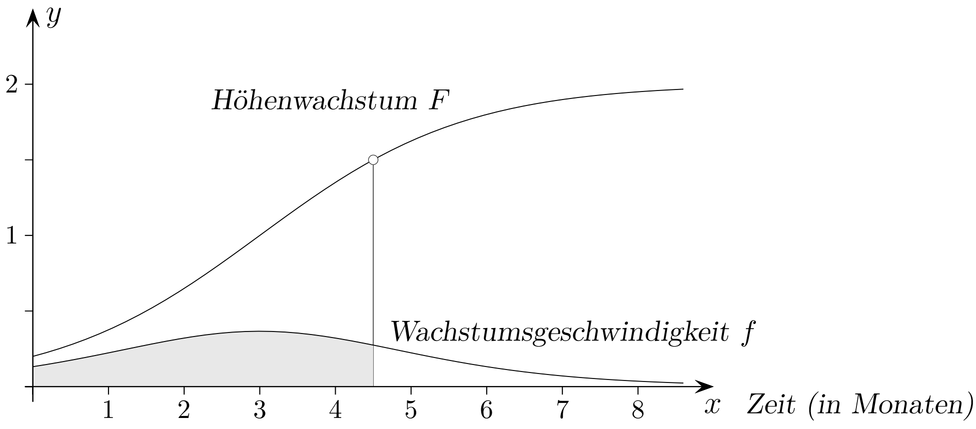
2) $\displaystyle\int_5^{10} f(t)\,dt = 59{,}2 \quad [\mathrm{ml/m^2}]$

b) $\displaystyle\int_0^{t_0} f(t)\,dt = 200 \quad \Longrightarrow \quad t_0 = 6{,}5$ [Minuten]

von der Änderungsrate zum Bestand

Bestandsfunktion von f $$F(x) = F(a) + \int_a^x f(u)\,du$$

maximale Änderungsrate



Gegeben ist die Wachstumsgeschwindigkeit (in $m/Monat$) von Sonnenblumen. Zeichne den Verlauf des Höhenwachstums in Abhängigkeit von der Zeit, zur Zeit $x = 0$ beträgt die Höhe 0,20 m.

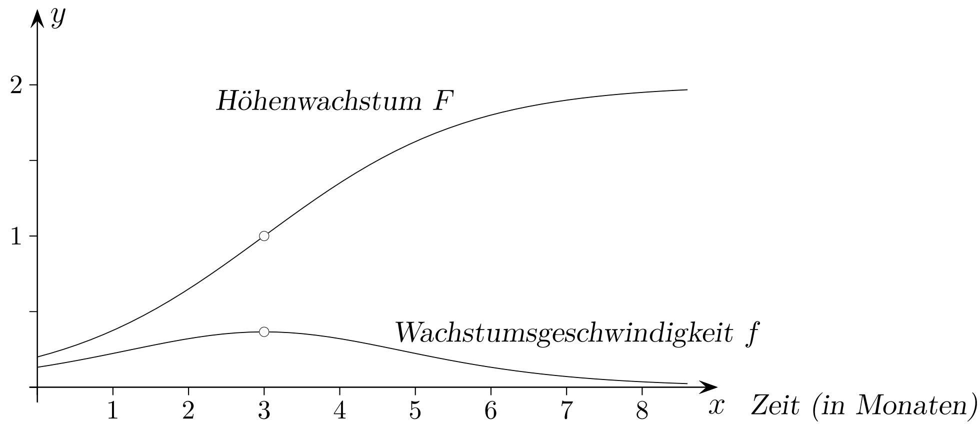
$F(0) = 0{,}20$

Anfangsbestand $F(a)$, Anfang a (meistens $a = 0$)

von der Änderungsrate zum Bestand

Bestandsfunktion von f

maximale Änderungsrate

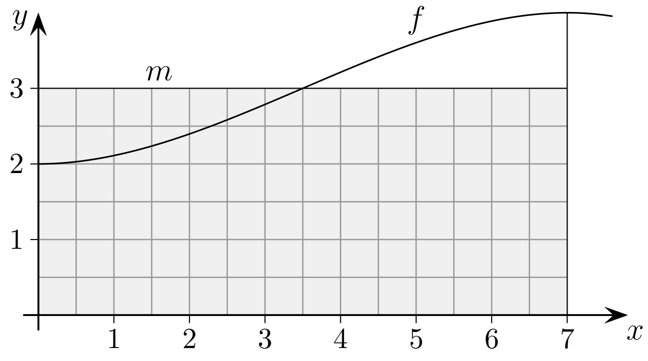


Gegeben ist die Wachstumsgeschwindigkeit f (in $m/Monat$) von Sonnenblumen.

Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit (Änderungsrate) liegt an der Wendestelle der Bestandsfunktion F vor.

Die maximale Änderungsrate auf einem Intervall $[a, b]$ liegt an der Wendestelle der Bestandsfunktion oder an den Intervallenden vor (Randextremum).

mittler Funktionswert $\qquad m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



←

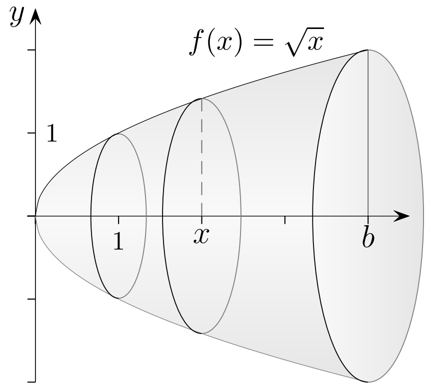
Für den mittleren Funktionswert m der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ soll gelten (Definition):

$$m\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{Rechtecksinhalt = Inhalt der Fläche unter dem Graphen}$$

$$\Longrightarrow \quad m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Volumen eines

Rotationskörpers $$V = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$



⟵

$$V = \pi \int_0^b \left[\sqrt{x} \right]^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \pi \frac{b^2}{2}$$

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	$k \cdot F(x)$
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax+b)$	

$\longleftarrow$

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}\,x^{r+1}$
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax+b)$	

$\longleftarrow$

$\uparrow$ © *Roolfs*

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax+b)$	

⟵

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	$\sin x$
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax+b)$	

$\longleftarrow$

$\uparrow$ © *Roolfs*

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	e^x
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax+b)$	

$\longleftarrow$

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \; (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \; (x > 0)$	$\ln x$
$f(ax+b)$	

$\longleftarrow$

Beachte:
Über Unendlichkeitsstellen (Polstellen) darf man nicht einfach „hinweg integrieren“.

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a} F(ax+b)$

$\longleftarrow$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = k$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

$\longleftarrow$

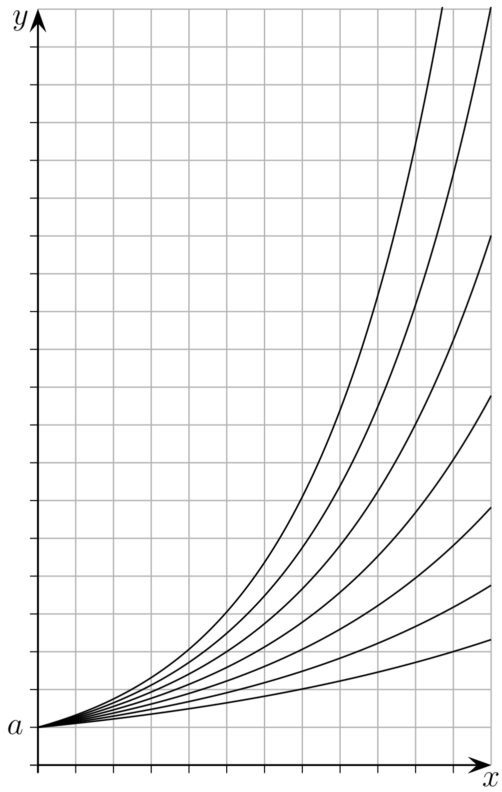
Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = k$	$f(x) = kx + c$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

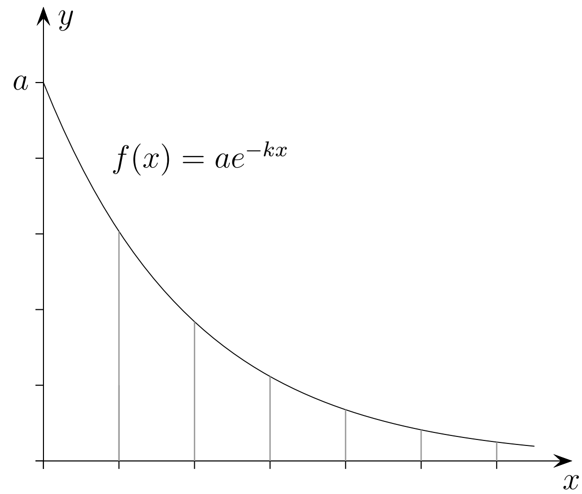
$\longleftarrow$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = kf(x)$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

$\longleftarrow$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = kf(x)$	$f(x) = ae^{kx}$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

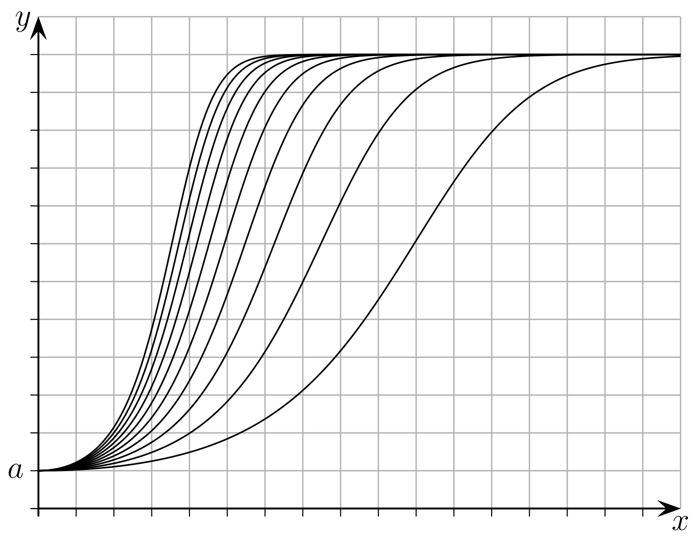




Exponentielle Abnahme $\quad f(x) = ae^{-kx}, \;\; k > 0$
Änderungsrate: $\;f'(x) = -k \cdot f(x)$

gA
Exponentielle Abnahme $\;3\,\%$
Funktion $\;f(x) = ae^{-0{,}03x}$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = k(S - f(x))f(x)$	$f(x) = \dfrac{aS}{a + (S-a)e^{-kSx}}$



⟵

alternativ

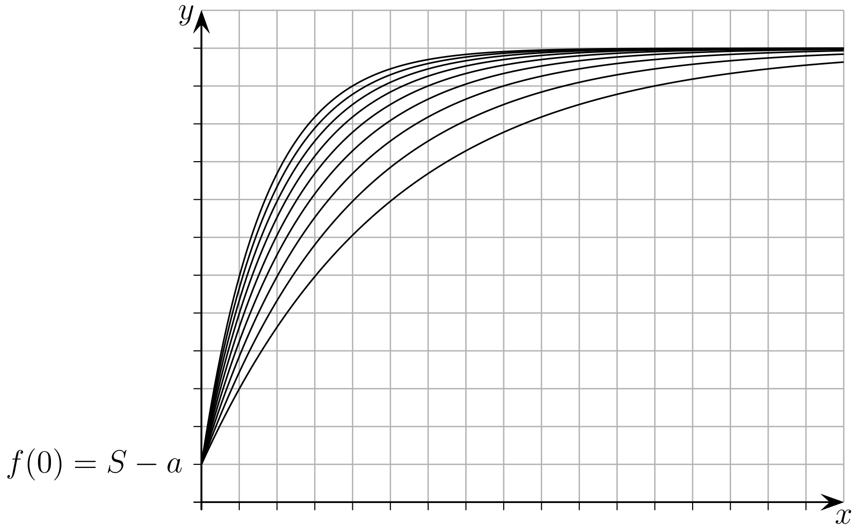
$$f(t) = \frac{S}{1 + ae^{-kt}}, \qquad f(0) = \frac{S}{1+a}$$

$$f'(t) = \frac{k}{S} \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = k(S - f(x))$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

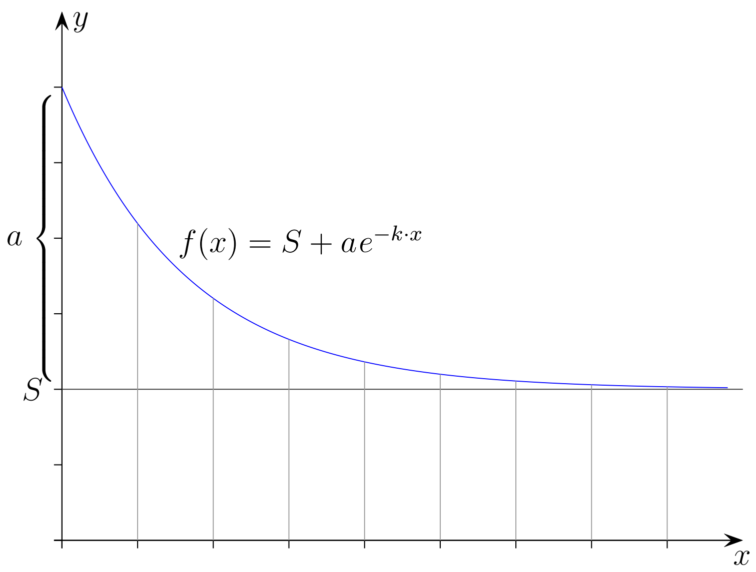
$\longleftarrow$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = k(S - f(x))$	$f(x) = S - ae^{-kx}$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$



←

Beschränkte Abnahme $f(x) = S + ae^{-kx}$



gA

Beschränkte Abnahme 6 %

Funktion $f(x) = S + ae^{-0{,}06x}$

$f(0) = S + a$

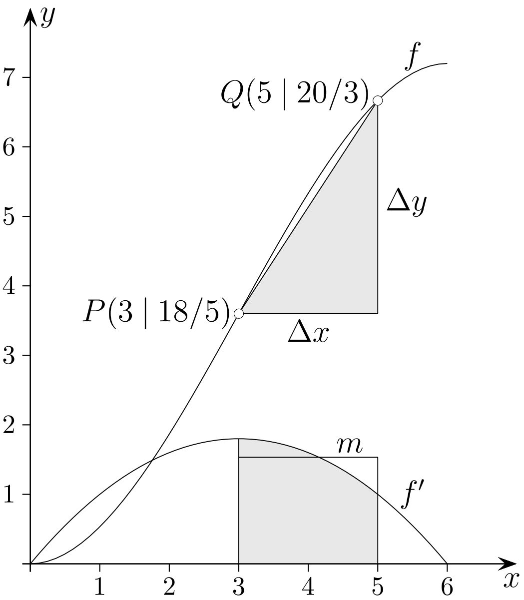
Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = k(S - f(x))f(x)$	$f(x) = ?$

$\longleftarrow$

durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a, b]$ $\quad m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

momentane (lokale) Änderungsrate von f an der Stelle a $\quad$?

durchschnittliche Änderungsrate m von f auf dem Intervall $[3; 5]$



$$f(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2$$

$$f'(x) = -\frac{1}{5}x(x-6)$$

Für die durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate m von f auf dem Intervall $[a, b]$ gilt:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)\,dx$$ Rechtecksinhalt ist gleich dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen.

$$= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$ Sekantensteigung von f (Bestandsfunktion)

Rechnung für die durchschnittliche Änderungsrate m von f auf dem Intervall $[3; 5]$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20/3 - 18/5}{5 - 3} = 23/15 \approx 1{,}533$$

Anwendungen enthalten häufig entweder eine Bestands- oder eine Änderungsratenfunktion, also die Ableitung einer Bestandsfunktion. Die durchschnittliche Änderungsrate der Bestandsfunktion auf einem Intervall wird als Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Sekantensteigung) der Bestandsfunktion berechnet. Zuvor sind die Koordinaten von P und Q zu bestimmen, siehe Grafik. Falls die Aufgabenstellung nur die Änderungsratenfunktion enthält, ist die Bestandsfunktion durch Integration zu ermitteln. Bestands- und Änderungsratenfunktion sind jeweils an der Einheit zu erkennen, die Bezeichnungen variieren. Im Gegensatz zu einer Bestandsfunktion ist die Einheit einer Änderungsratenfunktion ein Quotient von Einheiten, z. B. $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, d. h. Meter/Sekunde.

durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a, b]$ $m = ?$

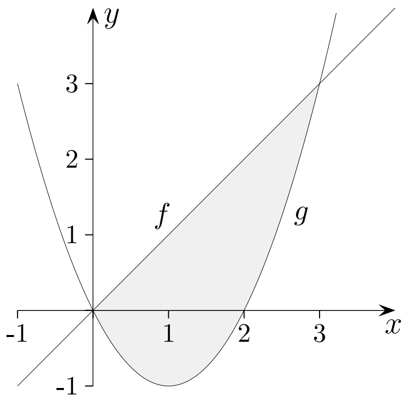
momentane (lokale) Änderungsrate von f an der Stelle a $f'(a)$

$\longleftarrow$

Inhalt der Fläche zwischen zwei Graphen,

obere Funktion f, untere g, Grenzen a, b $\qquad A(x) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

mehrere Schnittstellen $\qquad A(x) =$



⟵

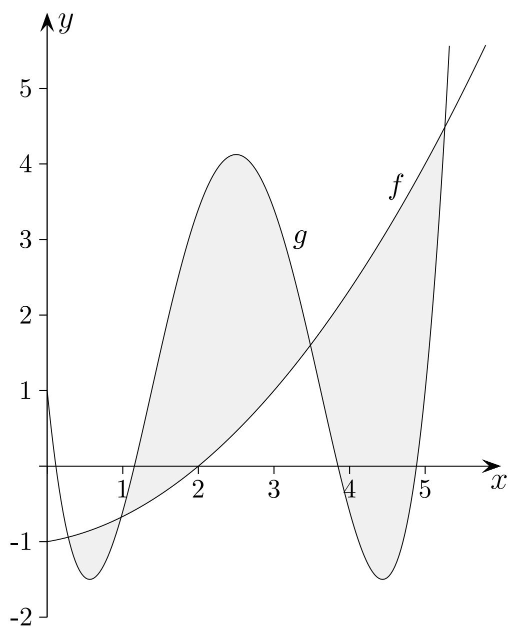
Inhalt der Fläche zwischen zwei Graphen,

obere Funktion f, untere g, Grenzen a, b $A = ?$

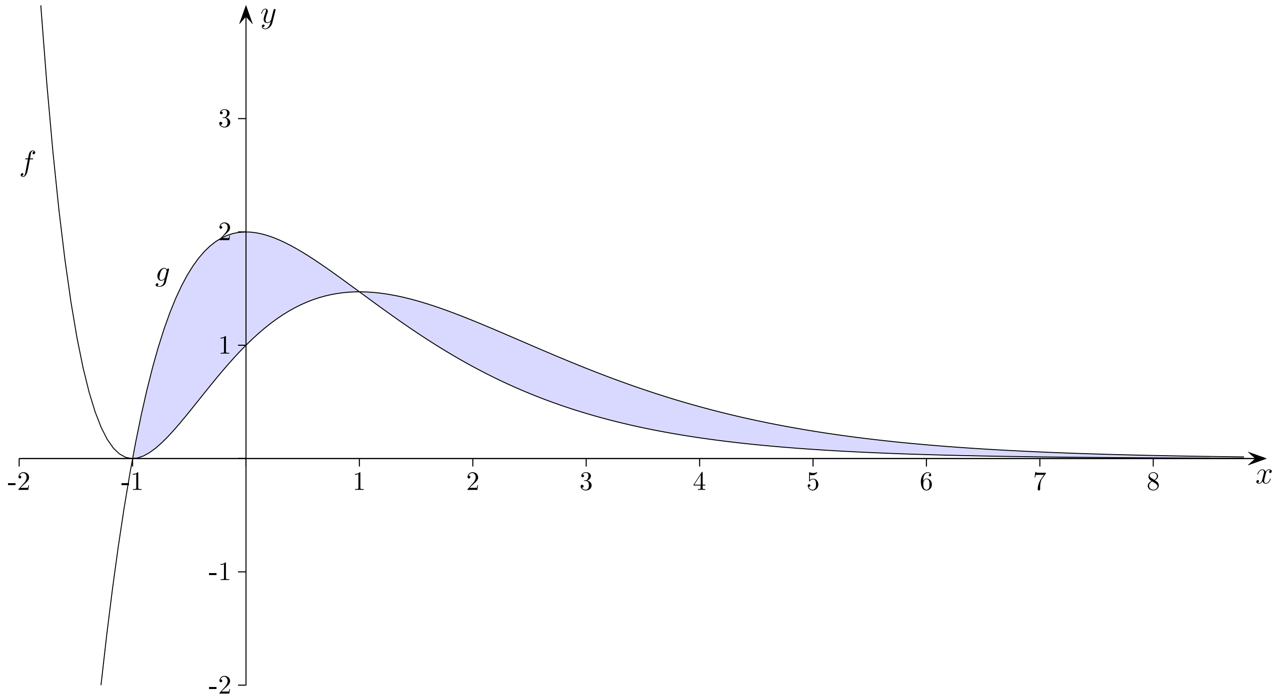
mehrere Schnittstellen $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$

GTR, abs( )

oder abschnittsweise Berechnung



uneigentliches Integral $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,dx$$



Gegeben sind die Funktionen:

$f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$
$g(x) = 2(x+1) \cdot e^{-x}$

Deuten Sie $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{-1}^{t}\Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx = 0$ geometrisch.

Zeigen Sie, dass $f'(x) = g(x) - f(x)$ gilt und berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ von den Graphen von f und g eingeschlossen wird.

$\big[$ zur Kontrolle: $A = \dfrac{4}{e}$ $\big]$

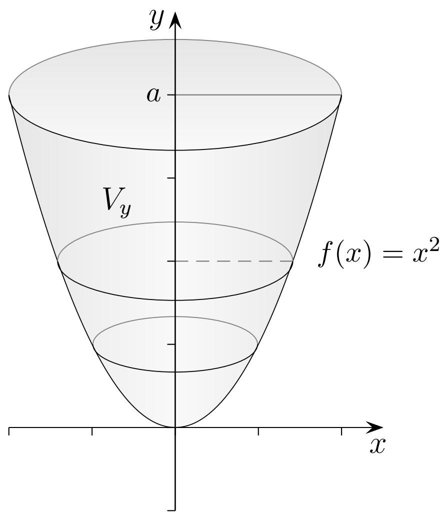
Volumen eines Hohlkörpers

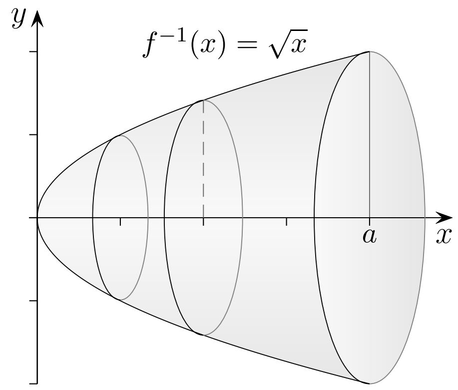
obere Funktion f, untere g, Grenzen a, b

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 \, dx - \pi \int_a^b \left[g(x) \right]^2 \, dx$$

$$\neq \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, dx$$

⟵





$$V_y \;=\; \pi\int_0^a \left[f^{-1}(y)\right]^2 dy \;=\; \pi\int_0^a \left[f^{-1}(x)\right]^2 dx$$

$$V_y \;=\; \pi\int_0^4 \left[f^{-1}(x)\right]^2 dx \;=\; 8\pi$$

Das Volumen bei Rotation um die y-Achse ist gleich dem Volumen
bei Rotation der Umkehrfunktion um die x-Achse. Die Grenzen sind anzupassen.

$\longleftarrow$

unbestimmtes Integral $\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) + C$

$\longleftarrow$

$$g(x) = \ln(f(x))$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{Kettenregel, beachte } \Big(\ln(x)\Big)' = \frac{1}{x}$$

allgemein

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Wie ist das a zu wählen, dass ... ?

⟵

Bei diesem Aufgabentyp ist stets eine Gleichung mit der Variablen a aufzustellen.
Eine Seite der Gleichung ergibt sich aus der in der Aufgabe genannten Bedingung, z. B. eingeschlossene Fläche hat den Inhalt $\frac{16}{3}$ *FE* (Flächeneinheiten). Die andere Seite besteht aus dem Ansatz für die Berechnung der Fläche. Dieser Ansatz enthält den Parameter a und hat die gleiche Form, als wenn für a eine Zahl schon bekannt wäre.
Zu guter Letzt ist die Gleichung zu lösen.
Häufig kann a oder eine Potenz von a ausgeklammert werden.
Liegen Bruchterme vor, ist es ratsam, beide Seiten mit dem Hauptnenner zu multiplizieren, dann sind die Bruchterme verschwunden.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^2 - 4ax$, wobei $a < 0$ ist.
Bestimme a so, dass die vom Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt $\frac{16}{3}$ *FE* (Flächeneinheiten) hat.

Nullstellen

$$ax^2 - 4ax = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

$$\int_0^4 (ax^2 - 4ax)\,dx = \left[-\frac{a}{3}x^3 + 2ax^2\right]_0^4 = -\frac{64a}{3} + 32a = -\frac{32}{3}a$$

$$-\frac{32}{3}a = \frac{16}{3} \quad | \cdot 3 \qquad \Longrightarrow \qquad a = -\frac{1}{2}$$