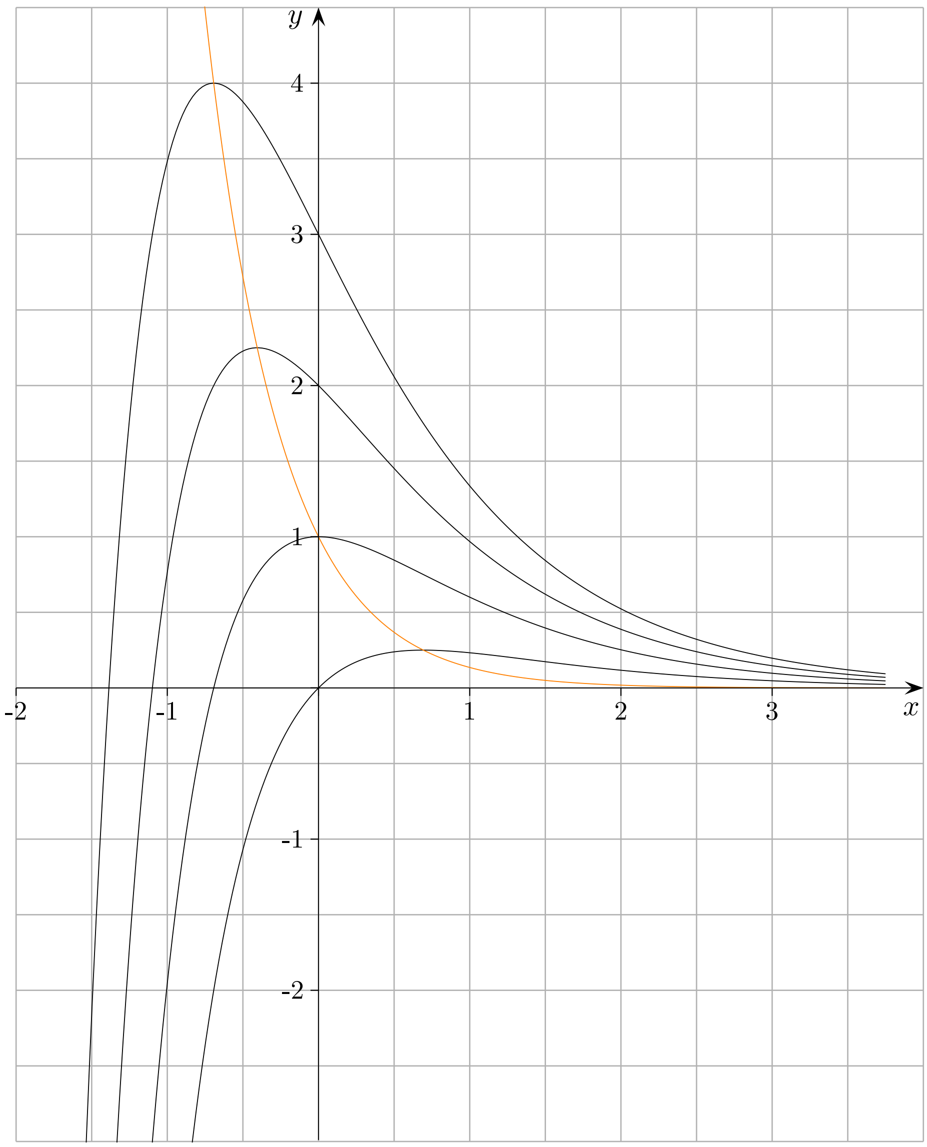
Funktionenschar e-Funktionen

Ermitteln Sie die Ortskurve der Extrema der Funktionenschar $f_k(x) = ke^{-x} - e^{-2x},\ k > 0.$



$y = e^{-2x}$

a) Welche Kurve hat an der Stelle $x = 0$ einen Krümmungswechsel?

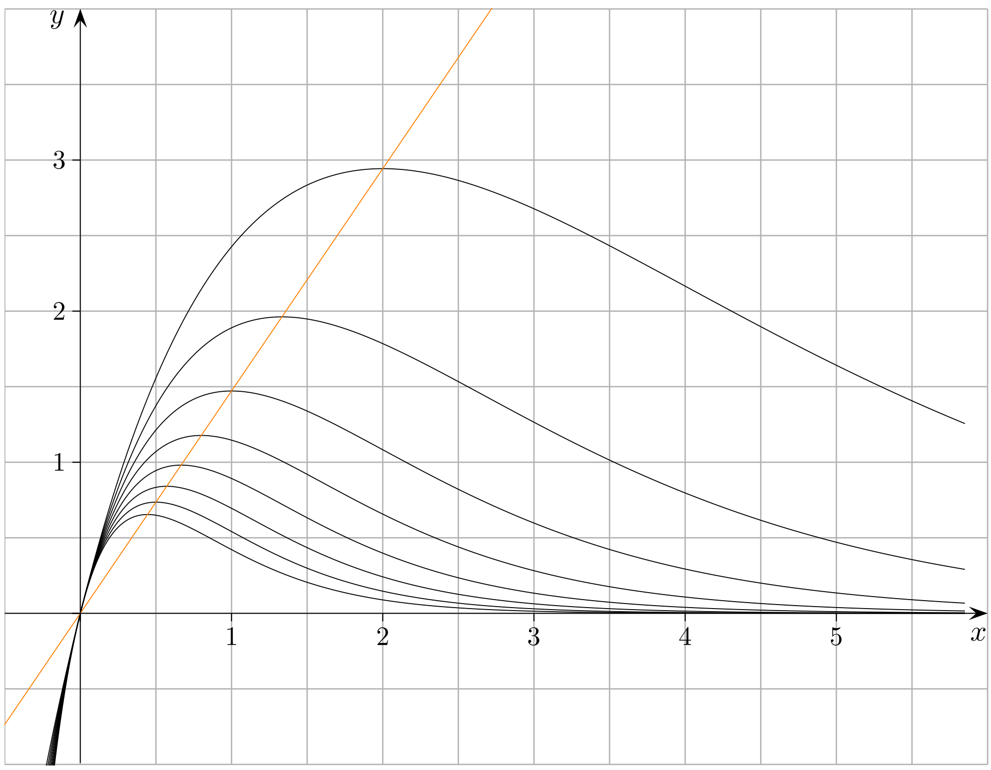
b) Für welchen Wert von k wechselt die Steigung an der Stelle $x = 1$ ihr Vorzeichen?

a) $f_k''(x) = ke^{-x} - 4e^{-2x}, \quad f_k''(0) = 0, \quad k = 4$

b) $f_k'(1) = 0, \quad k = \frac{2}{e}$

Funktionenschar

Ermitteln Sie die Ortskurve der Extrema der Funktionenschar $f_k(x) = 4xe^{-kx},\ k > 0.$



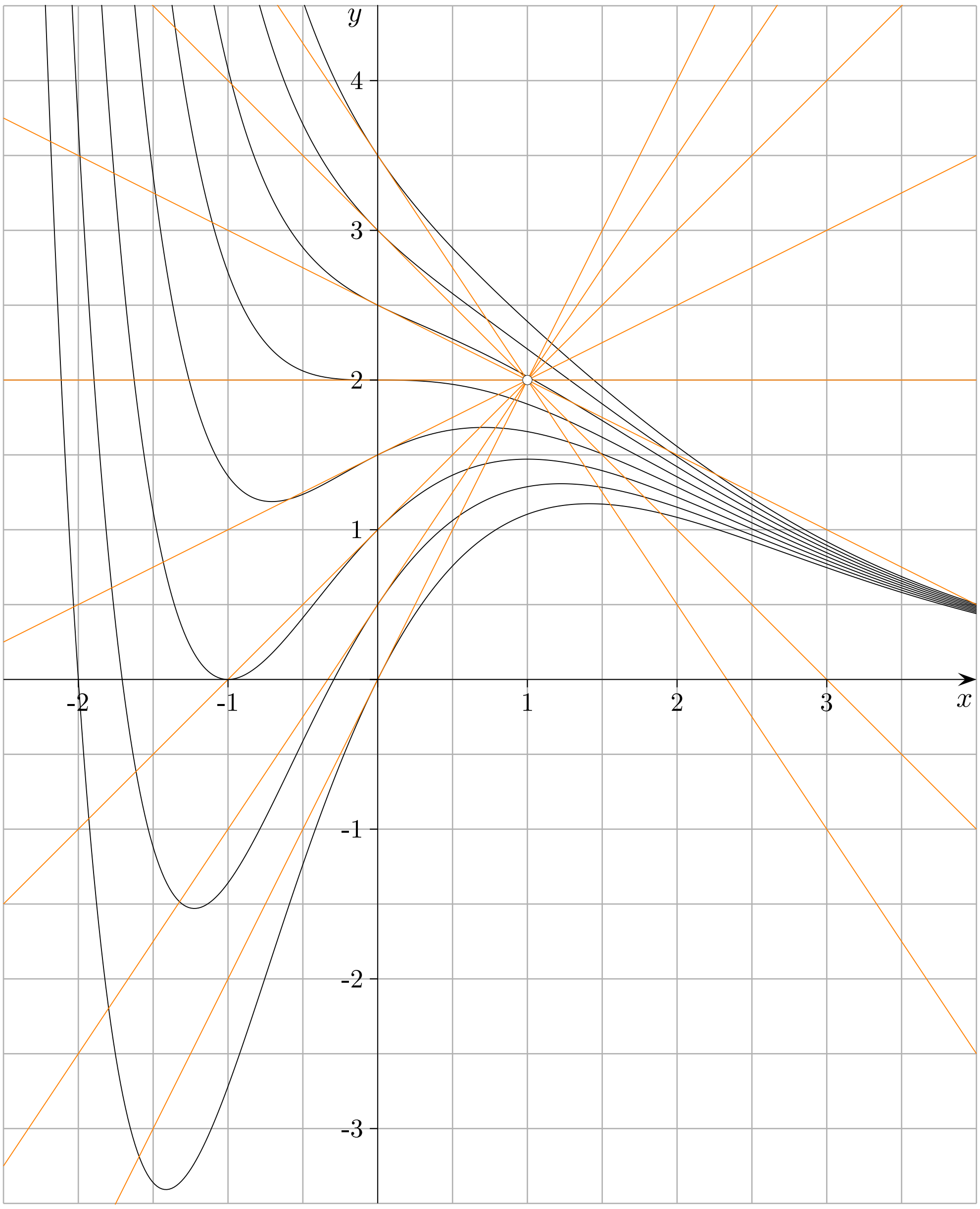
$$y = \frac{4}{e}x$$

Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = (x^2 + 2x + k) \cdot e^{-x}$, $x, k \in \mathbb{R}$.

a) Weisen Sie nach, dass sich die Tangenten an die Graphen von f_k an der Stelle $x = 0$ in einem Punkt schneiden.

b) Untersuchen Sie, ohne die 2. Ableitung zu bilden, für welche Werte von k jeweils Extrempunkte existieren. zur Kontrolle: $f_k'(x) = (2 - x^2 - k) \cdot e^{-x}$



Gemeinsamer Punkt einer Tangentenschar

Die Tangentengleichung für beliebiges k lautet:

$$y = (2-k)x + k \qquad (= 2x - kx + k)$$

Die Stelle des gemeinsamen Punktes kann durch Lösen der Gleichung

$$-kx + k = 0$$

ermittelt werden.

Für diesen x-Wert fällt k heraus, der y-Wert ist daher von k unabhängig.
$x = 1,\ y = 2$

Die Tangenten schneiden sich im Punkt $P(1\,|\,2)$.

Alternativ kann der Schnittpunkt der Tangenten mit den allgemeinen Parametern k_1 und k_2

$$y = (2-k_1)x + k_1$$

$$y = (2-k_2)x + k_2$$

ermittelt werden,

oder es wird der Schnittpunkt P mit 2 konkreten Parametern (z. B. $k_1 = 1$ und $k_2 = 2$) ermittelt und dann nachgewiesen, dass P auf allen Tangenten liegt,

oder es wird der Schnittpunkt P mit den Parametern k und $k_1 = 1$ (z. B.) ermittelt.

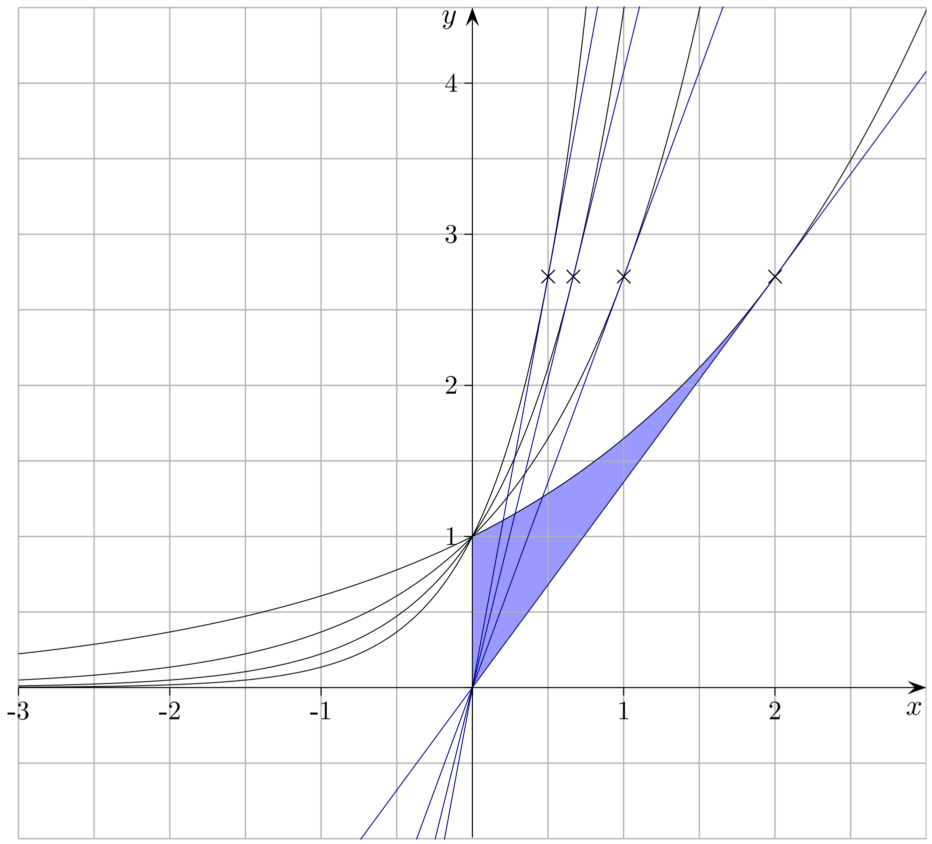
Weitere Übung:
Welchen gemeinsamen Punkt hat die Geradenschar $y = (1-k)x + 2k + 1$?

Bedingung:
$-kx + 2k = 0, \quad P(2\,|\,3)$

Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = e^{tx},\ t > 0.$

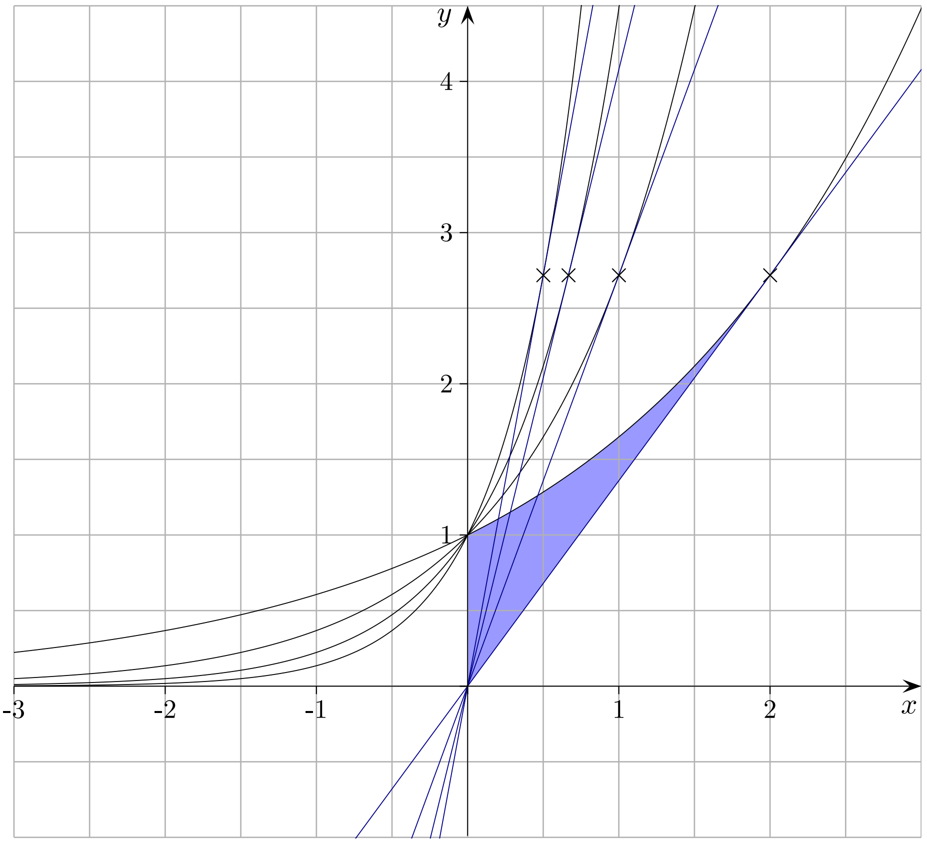
Ermitteln Sie für allgemeines t die Gleichung der Tangente, die durch den Ursprung verläuft.
Für welches t beträgt der Inhalt der gefärbten Fläche $A = 1\ FE$?



Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = e^{tx},\ t > 0$.

Ermitteln Sie für allgemeines t die Gleichung der Tangente, die durch den Ursprung verläuft.
Für welches t beträgt der Inhalt der gefärbten Fläche $A = 1\ FE$?



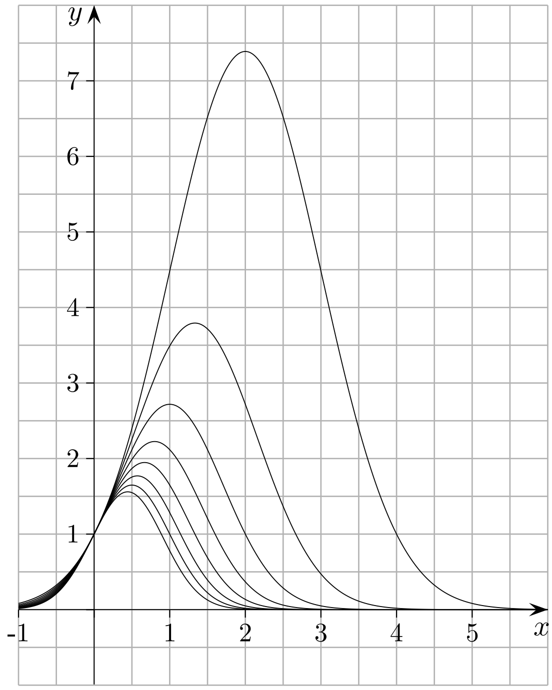
An der Stelle $a = \frac{1}{t}$ hat der Graph von f_t die Tangente $g_t(x) = te \cdot x$.

$$\int_0^{\frac{1}{t}} (e^{tx} - te \cdot x)\, dx = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{e}{2} - 1$$

Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_s(x) = e^{2x - \frac{1}{2}sx^2}$, $s > 0$.

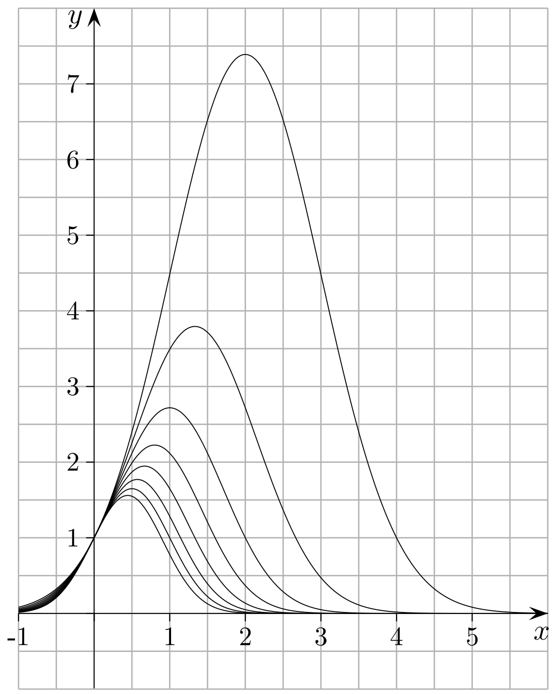
Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.



Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_s(x) = e^{2x - \frac{1}{2}sx^2}, \;\; s > 0.$

Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.



Der Graph von f_s ist zur Geraden $x = \dfrac{2}{s}$ symmetrisch.
Dies kann durch eine Betrachtung des Exponenten (Parabel) begründet werden oder durch eine Verschiebung des Graphen nach links um $\dfrac{2}{s}$.

Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^k e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad k \in \mathbb{N}^+$.

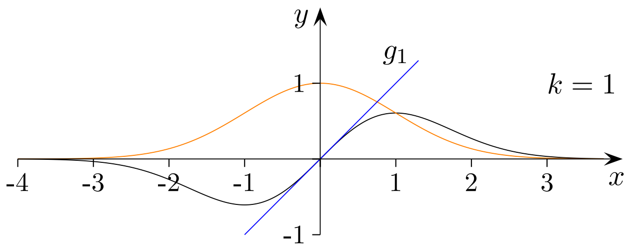
a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen von f_k und denen von $g_k(x) = x^k$?
Skizzieren Sie typische Vertreter der Graphen von f_k und
klassifizieren Sie die Funktionenschar f_k.

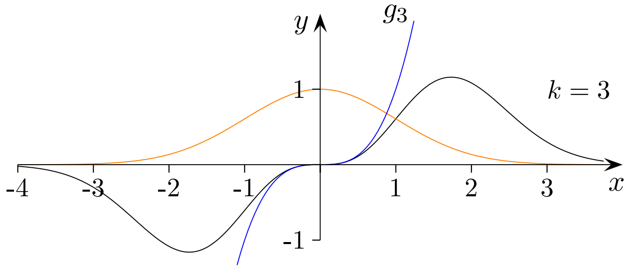
b) Untersuchen Sie, für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ die Graphen von $h_a(x) = ax^3$ den Graphen von f_3 außerhalb des Koordinatenursprungs schneiden?

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^k e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad k \in \mathbb{N}^+$.

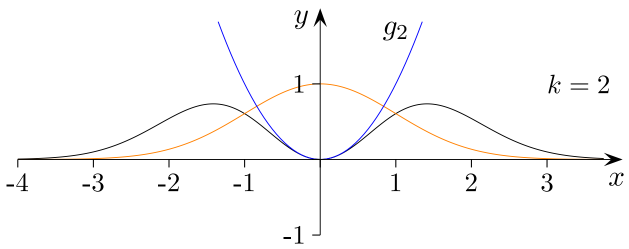
a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen von f_k und denen von $g_k(x) = x^k$?
Skizzieren Sie typische Vertreter der Graphen von f_k und
klassifizieren Sie die Funktionenschar f_k.

b) Untersuchen Sie, für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ die Graphen von $h_a(x) = ax^3$ den Graphen von f_3 außerhalb des Koordinatenursprungs schneiden?



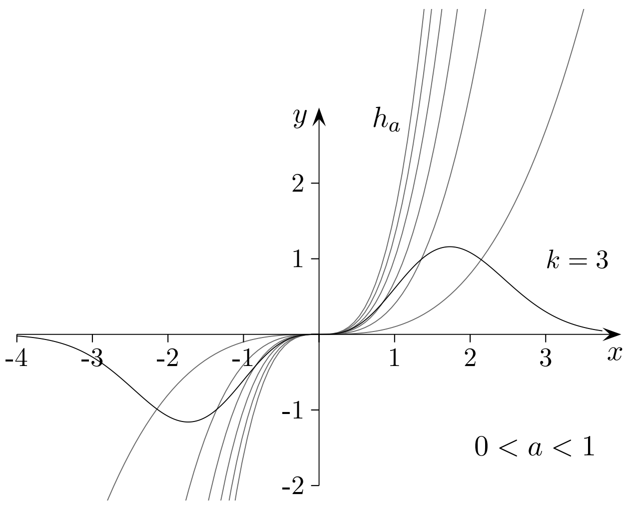


In der Nähe des Ursprungs ähneln sich die Graphen von g_k und f_k. Warum?



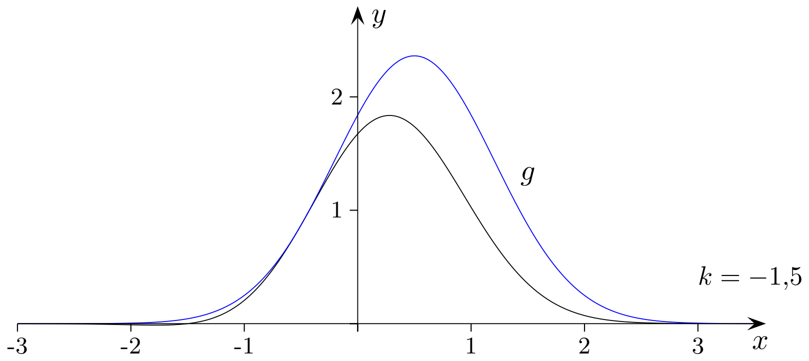
Die Symmetrie von g_k überträgt sich auf f_k.
Warum? Extremstellen: $x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$,
$x_3 = 0$ für $k = 2, 4, \ldots$

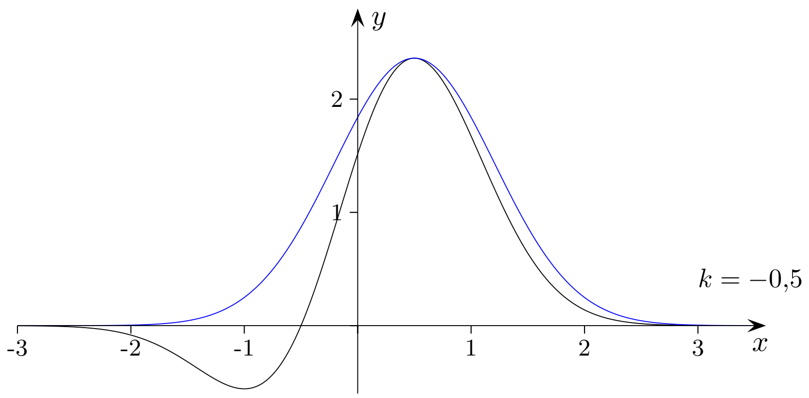
$$f_k'(x) = (kx^{k-1} - x^{k+1})e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

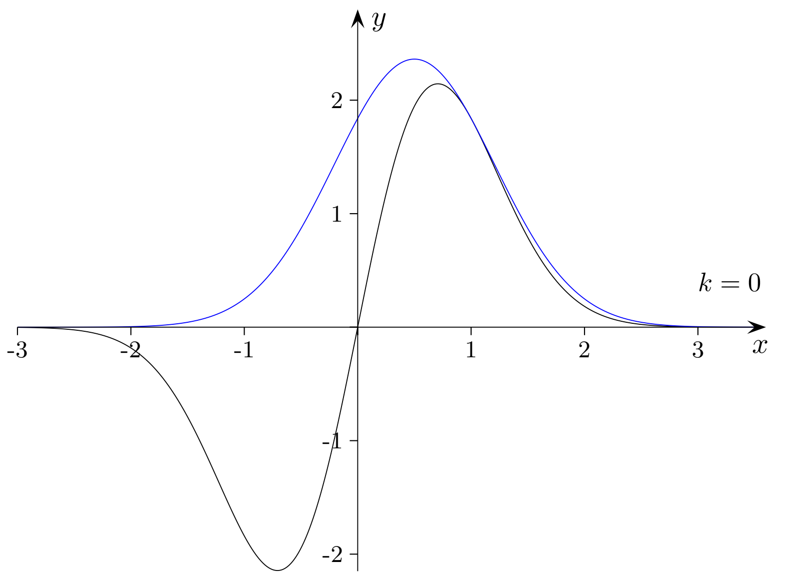


Funktionenschar

Erläutere die Beziehung der Funktionen $f_k(x) = 5(x-k)e^{-x^2+k}$ zur Funktion $g(x) = 5e^{-x^2+x-1}$ und weise dies rechnerisch nach.



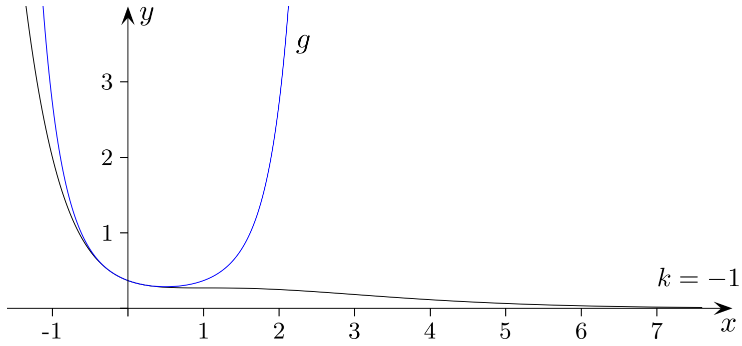


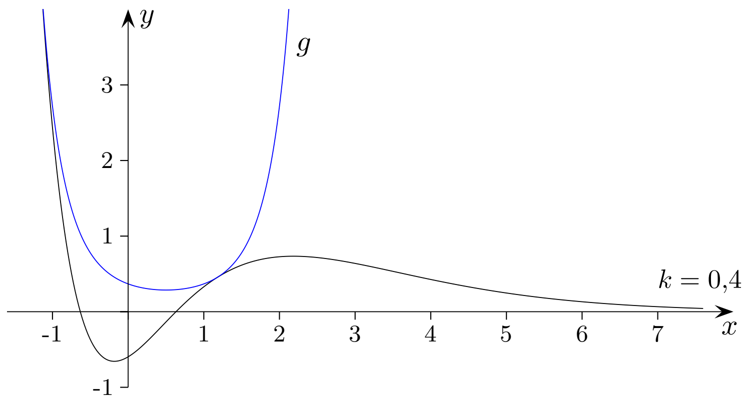


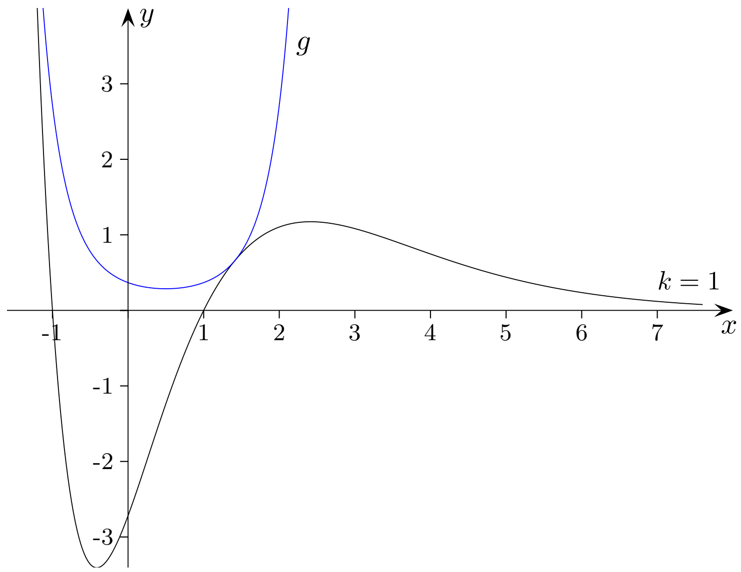
Die Funktionen $f_k(x) = 5(x-k)e^{-x^2+k}$ berühren die Funktion $g(x) = 5e^{-x^2+x-1}$ (Hüllfunktion). Der Schnittbedingung kann unmittelbar $x = k+1$ entnommen werden.

Funktionenschar

Erläutere die Beziehung der Funktionen $f_k(x) = (x^2 - k)e^{k-x}$ zur Funktion $g(x) = e^{x^2-x-1}$ und weise dies rechnerisch nach.







Die Funktionen $f_k(x) = (x^2 - k)e^{k-x}$ berühren die Funktion $g(x) = e^{x^2-x-1}$ (Hüllfunktion).
Der Schnittbedingung kann unmittelbar $k = x^2 - 1,\ k \geq -1,$ entnommen werden.