1. Prozentuales Wachstum
2. Begrenztes Wachstum
3. DGL des begrenzten Wachstums
4. Begrenztes und prozentuales begrenztes Wachstum
5. Prozentuales begrenztes (beschränktes) Wachstum
6. Aufgaben zum begrenzten Wachstum
7. Tropfinfusion
8. Bevölkerungsschwund
9. Erwärmung
10. Abkühlung
11. Regelung
12. Infektionskrankheit auf einer Kreuzfahrt
13. Heißer Kaffee
14. Hefepilzkultur, Rattenhorde

Für den Anfang geeignet

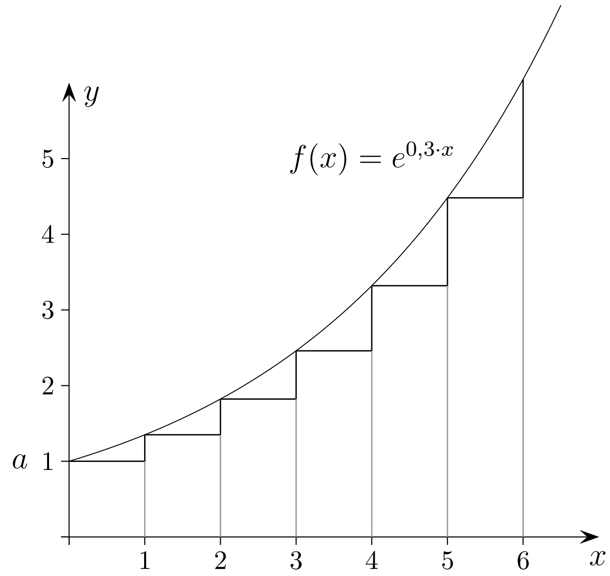
↑ Prozentuales Wachstum

1. ## Exponentielles Wachstum

   wird durch die Funktion $f(x) = ae^{kx}$, $k > 0$, erfasst.
   Für die Wachstumsgeschwindigkeit f' gilt: $f'(x) = k \cdot f(x)$,
   d. h. sie ist proportional zum Bestand.

   Da $y_{n+1} = y_n \cdot e^k$ ist, besteht zwischen der prozentualen Zunahme (pro Zeiteinheit) p und der Wachstumskonstanten k die Beziehung:

   $e^k = 1 + \frac{p}{100}$, siehe Exponentielles und prozentuales Wachstum.

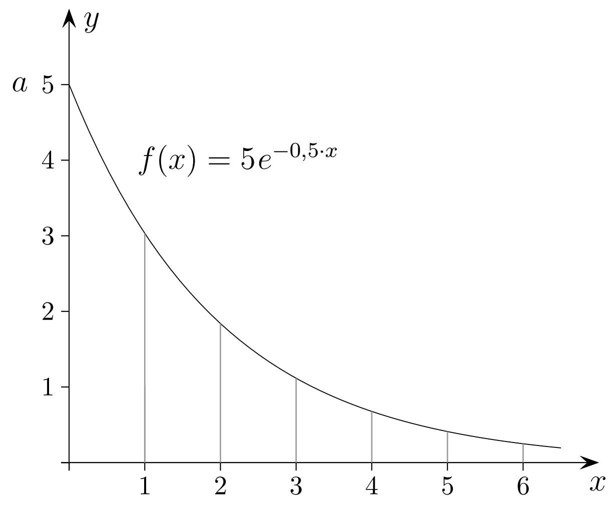


2. ## Exponentielle Abnahme

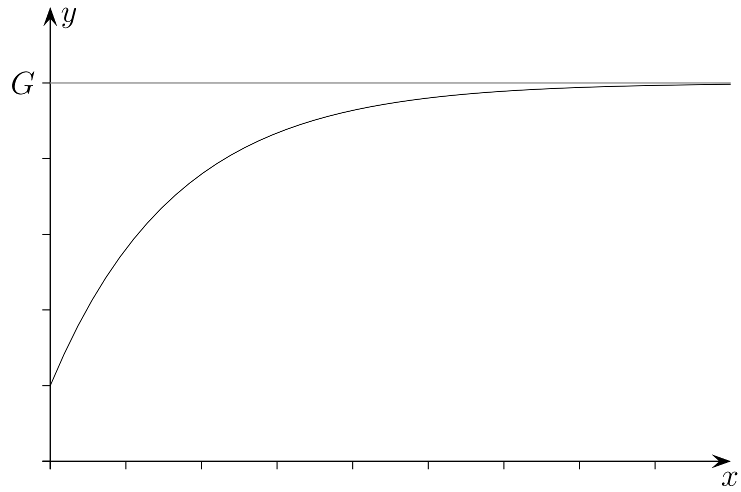
   wird durch die Funktion $f(x) = ae^{-kx}$, $k > 0$, beschrieben.
   Für die Wachstumsgeschwindigkeit f' gilt:
   $f'(x) = -k \cdot f(x)$, d. h. sie ist proportional zum Bestand.

   Da $y_{n+1} = y_n \cdot e^{-k}$ ist, besteht zwischen der prozentualen Abnahme (pro Zeiteinheit) p und der Wachstumskonstanten k die Beziehung:

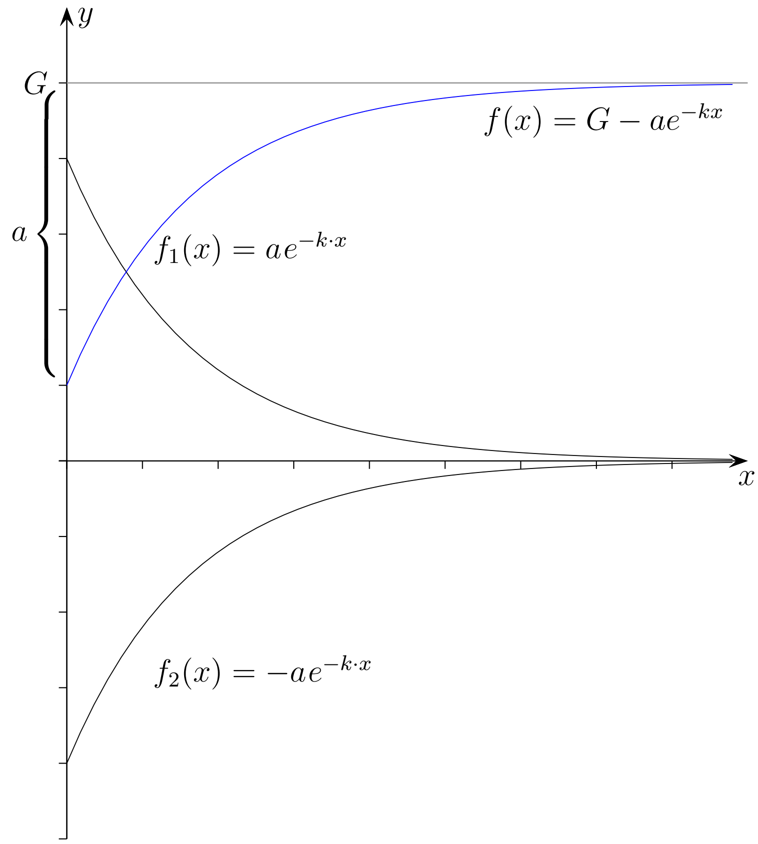
   $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$.



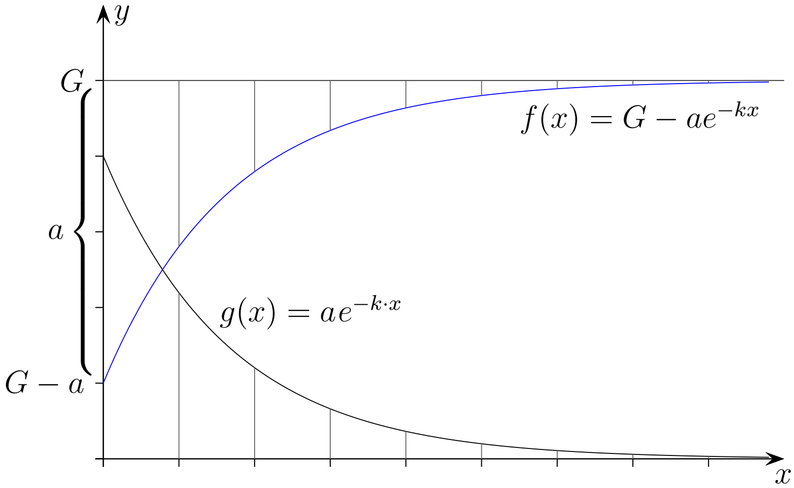
↑ Begrenztes Wachstum



Wir basteln einen geeigneten Funktionsterm.



↑ DGL des begrenzten Wachstums

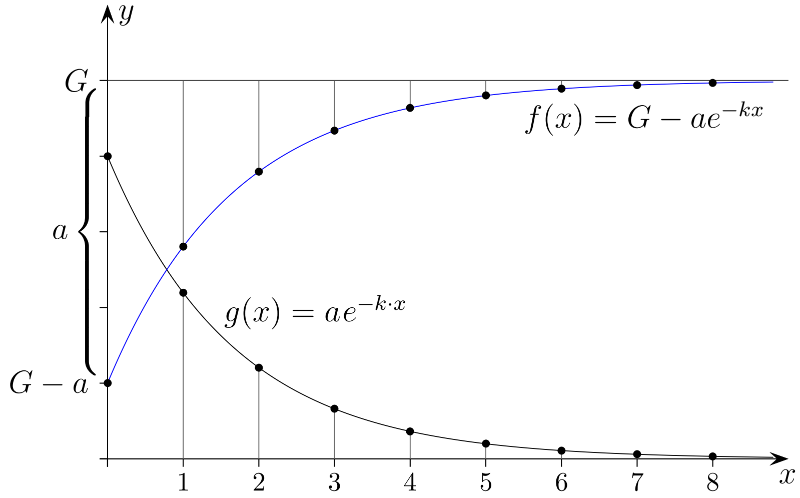


Für den exponentiellen Zerfall g gilt $\quad g'(x) = -k \cdot g(x)$
und weiter:

$$\begin{aligned} f(x) &= G - g(x) \\ f'(x) &= -g'(x) \\ &= k \cdot g(x) \\ f'(x) &= k \cdot \big(G - f(x)\big) \qquad \text{siehe 1. Zeile} \end{aligned}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit f' (Änderungsrate) ist proportional zu $G - f(x)$, d. h. zur Differenz von Wachstumsgrenze und Bestand.

↑ Begrenztes und prozentuales begrenztes Wachstum



$g(x) = ae^{-kx}$

$g(n) = ae^{-kn}$ $\quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$g^\star(n) = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$ $\quad$ prozentuale Abnahme, negativer Zinseszins

$e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$ $\quad$ Ein Vergleich von $g(n)$ und $g^\star(n)$ ergibt, dass unter dieser Bedingung exponentielle und prozentuale Abnahme übereinstimmen.

$f(x) = G - ae^{-kx}$ $\quad$ $G - f(x) = ae^{-kx}$ Die Differenz von der Grenze G und dem Bestand nimmt exponentiell ab.

$f'(x) = kae^{-kx} = k(G - f(x))$ $\quad$ Die Änderungsrate ist proportional zur Differenz von der Grenze G und dem Bestand $f(x)$, Prop.-Faktor k.

$f^\star(n) = G - a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$ $\quad$ prozentuales begrenztes Wachstum

$e^x \approx 1 + x$ $\quad$ $y = x + 1$ ist die Tangentengleichung von $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 0$.

$e^{-k} \approx 1 - k$ $\quad$ Näherung für kleine k

$k \approx \frac{p}{100}$ $\quad$ Folgt aus $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$ und $e^{-k} \approx 1 - k$.

In einer Stadt mit 40000 Einwohner ist bei Beobachtungsbeginn bereits ein Viertel der Einwohner an diesem Virus erkrankt. Es ist davon auszugehen, dass im Laufe der Zeit drei Viertel aller Einwohner von der Krankheit erfasst werden und dass dabei die momentane wöchentliche Erkrankungsrate proportional zur Anzahl der bisher noch nicht von der Krankheit erfassten Einwohner ist.

a) Man nimmt zur Modellierung zunächst den Proportionalitätsfaktor 0,1 an. Bestimmen sie eine Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt.

b) Wie viele Personen werden demzufolge nach 4 Wochen von der Krankheit erfasst sein? Tatsächlich sind es nach 4 Wochen bereits 22000 Personen. Passen Sie den Proportionalitätsfaktor an die tatsächliche Situation an.

In einer Stadt mit 40000 Einwohner ist bei Beobachtungsbeginn bereits ein Viertel der Einwohner an diesem Virus erkrankt. Es ist davon auszugehen, dass im Laufe der Zeit drei Viertel aller Einwohner von der Krankheit erfasst werden und dass dabei die momentane wöchentliche Erkrankungsrate proportional zur Anzahl der bisher noch nicht von der Krankheit erfassten Einwohner ist.

a) Man nimmt zur Modellierung zunächst den Proportionalitätsfaktor 0,1 an. Bestimmen sie eine Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt.

$$f(x) = G - ae^{-kx}$$
$$G = 30000$$
$$k = 0{,}1$$
$$f(0) = G - a = 10000,\ a = 20000$$

b) Wie viele Personen werden demzufolge nach 4 Wochen von der Krankheit erfasst sein? Tatsächlich sind es nach 4 Wochen bereits 22000 Personen. Passen Sie den Proportionalitätsfaktor an die tatsächliche Situation an.

$$f(4) = 16594$$
$$30000 - 20000e^{-4k'} = 22000$$
$$k' \approx 0{,}229$$

↑ Prozentuales begrenztes (beschränktes) Wachstum

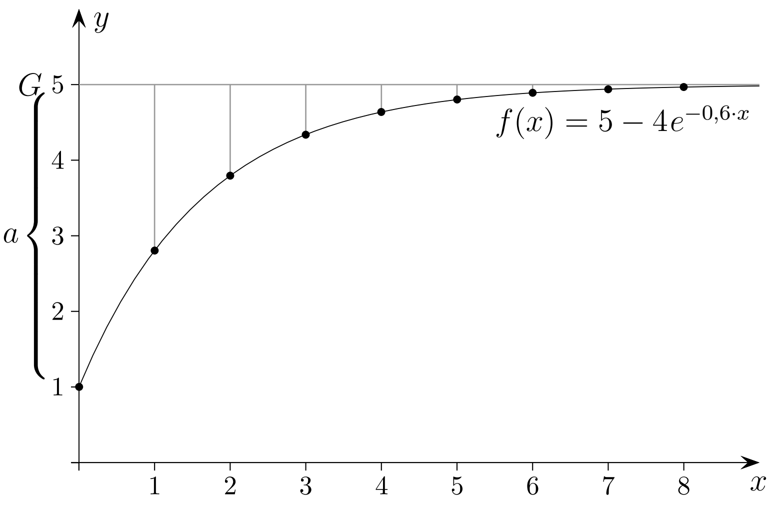
Begrenztes Wachstum

wird durch die Funktion $f(x) = G - ae^{-kx}$, $k > 0$, erfasst. Für den Anfangsbestand gilt: $f(0) = G - a$.

Welcher Zusammenhang (DGL) besteht zwischen der Wachstumsgeschwindigkeit f' und dem Bestand $f(x)$? Hierzu leiten wir f ab.

$$\begin{aligned} f(x) &= G - a \cdot e^{-kx} \\ f'(x) &= -a \cdot e^{-kx} \cdot (-k) \\ &= \underbrace{a \cdot e^{-kx}}_{G - f(x) \quad (\,= G - (G - a \cdot e^{-kx})\,)} \cdot k \\ f'(x) &= k \cdot (G - f(x)) \end{aligned}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit f' ist proportional zu $G - f(x)$, d. h. zur Differenz von Wachstumsgrenze und Bestand.



An den Funktionstermen ist zu erkennen, dass der Graph des begrenzten Wachstums aus dem Graphen der exponentiellen Abnahme (für gleiches a und k) durch Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung in y-Richtung hervorgeht. Daher nehmen die Längen der senkrechten Strecken jeweils mit den Faktor e^{-k} ab. Die prozentuale Abnahme p (pro Zeiteinheit) bezogen auf die Differenz von Bestand und Grenze ist also konstant, es gilt somit auch hier: $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$. Diese Abnahme ist eine Zunahme des Bestandes, siehe Aufg. 3.

↑ Aufgaben

1. In einem Labor vermehren sich Bakterien (Anfangsbestand ist 15) einer bestimmten Art unbegrenzt, und zwar täglich um 20 %. Nach welcher Zeit sind 600 Bakterien vorhanden?

2. Milchsäurebakterien verdoppeln bei $37°C$ jeweils alle halbe Stunde ihre Anzahl. Wie viele Milchsäurebakterien sind nach 7 Stunden in einer Milch, in der sich anfänglich 10 Bakterien befinden?

3. Es werden 10 Fische in einem Teich ausgesetzt. Man nimmt an, dass sich die Fische jährlich um 25 % vom Unterschied zwischen dem vorhandenen Bestand und der geschätzten Kapazität des Teiches (800 Fische) vermehren. Nach welcher Zeit sind 750 Fische vorhanden?

4. Ein Patient erhält täglich am Morgen $m = 3\ mg$ eines Medikaments. Die im Körper befindliche Medikamentenmenge wird im Laufe des Tages um $p = 20\,\%$ abgebaut. Ermittle eine Funktion, die die Anreicherung des Medikaments im Körper erfasst. Welche Medikamentenmenge hat sich nach 12 Tagen angereichert?

   Überlege dir, dass die Anreicherung durch ein Gleichgewicht von Abbau und Neuaufnahme begrenzt ist. Beweise dann, dass ein begrenztes Wachstum vorliegt, indem du nachweist, dass die Differenz von Bestand und Grenze exponentiell abnimmt.

↑ Aufgaben

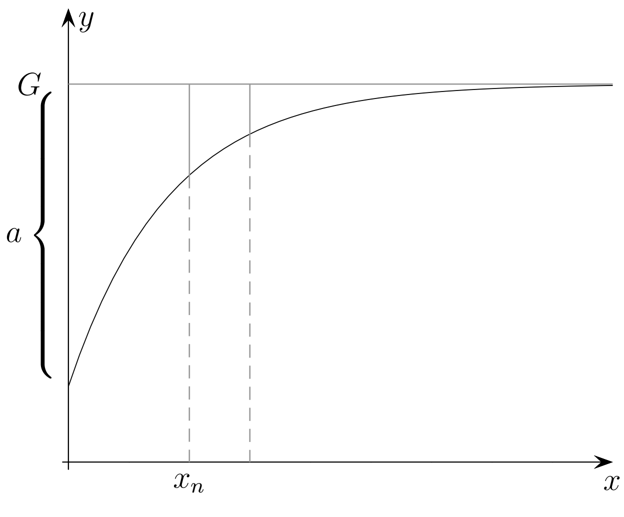
1. In einem Labor vermehren sich Bakterien (Anfangsbestand ist 15) einer bestimmten Art unbegrenzt, und zwar täglich um 20 %. Nach welcher Zeit sind 600 Bakterien vorhanden?

2. Milchsäurebakterien verdoppeln bei $37°C$ jeweils alle halbe Stunde ihre Anzahl. Wie viele Milchsäurebakterien sind nach 7 Stunden in einer Milch, in der sich anfänglich 10 Bakterien befinden?

3. Es werden 10 Fische in einem Teich ausgesetzt. Man nimmt an, dass sich die Fische jährlich um 25 % vom Unterschied zwischen dem vorhandenen Bestand und der geschätzten Kapazität des Teiches (800 Fische) vermehren. Nach welcher Zeit sind 750 Fische vorhanden?

4. Ein Patient erhält täglich am Morgen $m = 3\ mg$ eines Medikaments. Die im Körper befindliche Medikamentenmenge wird im Laufe des Tages um $p = 20\,\%$ abgebaut. Ermittle eine Funktion, die die Anreicherung des Medikaments im Körper erfasst. Welche Medikamentenmenge hat sich nach 12 Tagen angereichert?

   Überlege dir, dass die Anreicherung durch ein Gleichgewicht von Abbau und Neuaufnahme begrenzt ist. Beweise dann, dass ein begrenztes Wachstum vorliegt, indem du nachweist, dass die Differenz von Bestand und Grenze exponentiell abnimmt.



Lösungen:

1. 20,2 Tage
2. 163840 Milchsäurebakterien
3. 9,6 Jahre
4. Für die Grenze G gilt: $\frac{p}{100} \cdot G = m$

   $\Longrightarrow \quad G = \frac{m \cdot 100}{p}, \quad G = 15$

   Sei y_n der Bestand zur Zeit x_n, zu zeigen ist:

   $(G - y_n) \cdot \text{Faktor} = G - \left(y_n \cdot (1 - \frac{p}{100}) + m \right)$

   Auf der rechten Seite wird die Veränderung von y_n durch Abbau und täglicher Einnahme berücksichtigt. G ist nicht ganz korrekt, Näheres siehe: Zu- und Abfluss.

   Mit dem Term für die Grenze ermitteln wir den konstanten Faktor: $1 - \frac{p}{100}$. Man beachte, dass in ihm derselbe Prozentsatz wie in der Aufgabe enthalten ist.

   Mit $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$, $f(x) = G - ae^{-kx}$ und $a = 12$ erhalten wir $f(12) = 14{,}2\ (mg)$.

↑ Tropfinfusion

Ein Patient bekommt durch einen Tropf kontinuierlich stündlich die Infusionslösungsmenge m (in g) zugeführt. Im Körper werden stündlich $p\,\%$ der vorhandenen Infusionslösungsmenge abgebaut.

Die Zunahme der Infusionslösungsmenge im Körper währt solange, bis ein Gleichgewichtszustand von Abbau und zugeführter Menge m erreicht ist, d.h. das Lösungsmengenwachstum ist begrenzt.

Die DGL $f'(x) = -k \cdot f(x) + m$ mit dem Anfangswert $f(0) = 0$ modelliert diesen Vorgang.

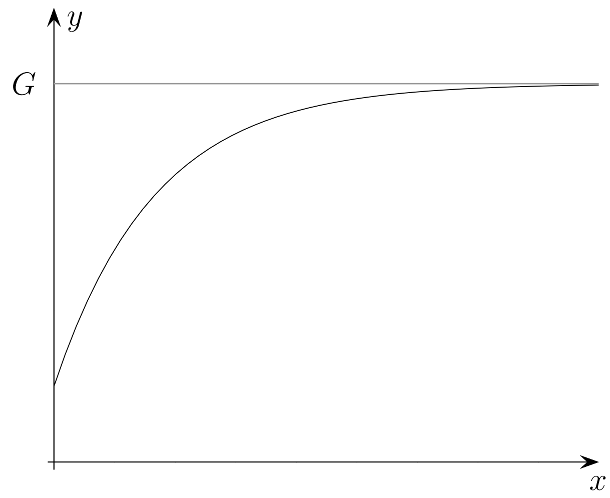
Mit einer einfachen Umformung ist zu erkennen, dass es sich hierbei um das bekannte beschränkte Wachstum mit der DGL $f'(x) = k \cdot \big(G - f(x)\big)$ (Zuwachs ist proportional zum Sättigungsmanko) und der Lösungsfunktion $f(x) = G - \big(G - f(0)\big)\, e^{-kx}$ handelt.

$$f'(x) = -k \cdot f(x) + m$$

$$f'(x) = k \cdot \big(\frac{m}{k} - f(x)\big)$$

Der Infusionsvorgang hat also die Grenze $G = \dfrac{m}{k}$

und wird durch die Funktion $f(x) = \dfrac{m}{k} - \dfrac{m}{k}\, e^{-kx}$ beschrieben.



Für die Konstante k gilt (Näheres siehe Zu- und Abfluss) wieder $e^{-k} = 1 - \dfrac{p}{100}$

und für $p \leq 10$ ist $k \approx \dfrac{p}{100}$.

↑ Bevölkerungsschwund

Ein Land, das im Jahr 2000 noch 40 Millionen Einwohner hatte, würde einen jährlichen Bevölkerungsschwund von 3 % verzeichnen, wenn es nicht jährlich 120 000 Einwanderer aufnehmen würde.

a) Wie lautet die Differentialgleichung, mit der sich die Entwicklung der Einwohnerzahl näherungsweise beschreiben lässt?

b) Wie viele Einwohner erwartet man im Jahr 2030?
Wie wird sich die Einwohnerzahl langfristig entwickeln?

↑ Bevölkerungsschwund

Ein Land, das im Jahr 2000 noch 40 Millionen Einwohner hatte, würde einen jährlichen Bevölkerungsschwund von 3 % verzeichnen, wenn es nicht jährlich 120 000 Einwanderer aufnehmen würde.

a) Wie lautet die Differentialgleichung, mit der sich die Entwicklung der Einwohnerzahl näherungsweise beschreiben lässt?

$f'(t) = -0{,}03 \cdot f(t) + 120\,000$ mit dem Anfangswert $f(0) = 40$ Mio.

$f(t) = 4 + 36\,e^{-0{,}03t}$ (in Mio.)

Allgemein:

$$f'(x) = -k \cdot f(x) + m$$

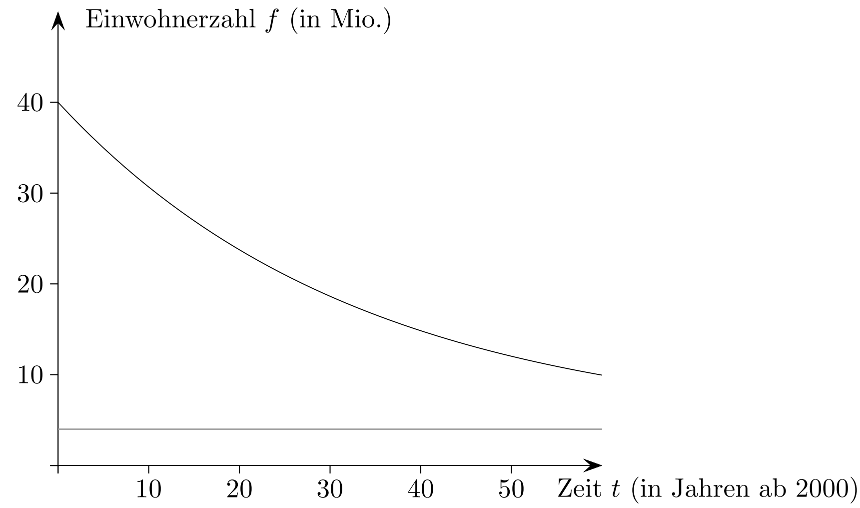
$$f'(x) = -k \cdot \left(f(x) - \frac{m}{k} \right)$$

Es ist zu erkennen, dass es sich hierbei um einen beschränkten Zerfall mit der DGL $f'(x) = -k \cdot \big(f(x) - G \big)$ und der Lösungsfunktion (Trennung der Variablen) $f(x) = G + \big(f(0) - G \big)\, e^{-kx}$ handelt.

Die Grenze lautet $G = \dfrac{m}{k}$.

b) Wie viele Einwohner erwartet man im Jahr 2030? $f(30) = 18{,}6$ (Mio.)

Wie wird sich die Einwohnerzahl langfristig entwickeln? $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 4$ (Mio.)



↑ Erwärmung GTR

Eine Materialprobe wird in einem Labor erhitzt.
Die Erwärmung wird durch die Funktion $T(t) = 70 - 50 \cdot e^{-0{,}2t}$, $t \geq 0$,
beschrieben, t in Minuten, $T(t)$ in Grad Celsius.

a) Skizzieren Sie die Graphen von T und T'.

b) Zu welcher Zeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Probe erwärmt, am größten, und wie groß ist sie dann?

c) Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur der ersten 10 Minuten.

d) Nach welcher Zeit hat sich die Probe auf die Hälfte seiner Endtemperatur erwärmt?

e) Nach welcher Zeit hat sich die anfängliche Erwärmungsgeschwindigkeit halbiert?

↑ Erwärmung GTR

Eine Materialprobe wird in einem Labor erhitzt.
Die Erwärmung wird durch die Funktion $T(t) = 70 - 50 \cdot e^{-0{,}2t}$, $t \geq 0$,
beschrieben, t in Minuten, $T(t)$ in Grad Celsius.

a) Skizzieren Sie die Graphen von T und T'.

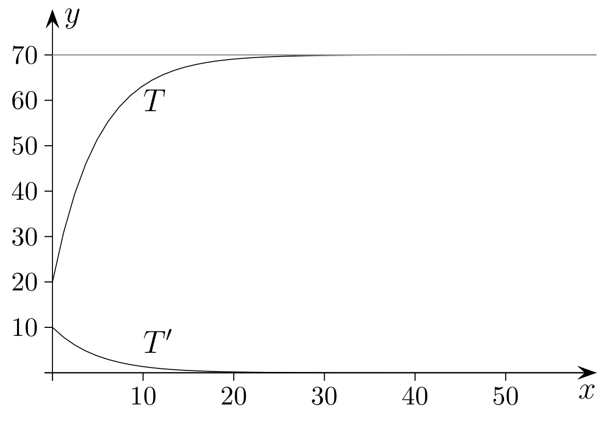
b) Zu welcher Zeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Probe erwärmt, am größten, und wie groß ist sie dann?

c) Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur der ersten 10 Minuten.

d) Nach welcher Zeit hat sich die Probe auf die Hälfte seiner Endtemperatur erwärmt?

e) Nach welcher Zeit hat sich die anfängliche Erwärmungsgeschwindigkeit halbiert?

Ergebnisse: (ohne Einheiten)



a)

b) $t = 0$, 10

c) 48,4

d) 1,8

e) 3,5

↑ Abkühlung

Der Kaffee in einer Tasse ist $80^\circ C$ heiß. Die Umgebungstemperatur beträgt $25^\circ C$. Nach 3 Minuten ist die Kaffeetemperatur um $10^\circ C$ gesunken.

a) Man nimmt an, dass die Kaffeetemperatur $f(x)$ zur Zeit x durch die Funktion $f(x) = a + b \cdot e^{-kx}$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Konstanten a, b und k und skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Nach welcher Zeit liegt die Kaffeetemperatur unter $30^\circ C$?

c) Nach welcher Zeit unterscheidet sich die Kaffeetemperatur um höchstens $1^\circ C$ von der Endtemperatur?

d) $W(x) = \displaystyle\int_0^x (f(t) - 25)\,dt$ ist ein Maß für die abgegebene Wärmemenge.
Wie lautet der integralfreie Funktionsterm von $W(x)$?
Skizziere den Graphen von $W(x)$.

↑ Abkühlung

Der Kaffee in einer Tasse ist $80^\circ\,C$ heiß. Die Umgebungstemperatur beträgt $25^\circ\,C$. Nach 3 Minuten ist die Kaffeetemperatur um $10^\circ\,C$ gesunken.

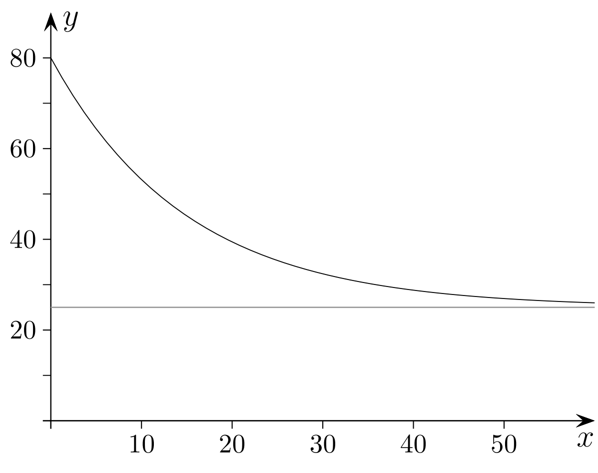
a) Man nimmt an, dass die Kaffeetemperatur $f(x)$ zur Zeit x durch die Funktion $f(x) = a + b \cdot e^{-kx}$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Konstanten a, b und k und skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Nach welcher Zeit liegt die Kaffeetemperatur unter $30^\circ\,C$?

c) Nach welcher Zeit unterscheidet sich die Kaffeetemperatur um höchstens $1^\circ\,C$ von der Endtemperatur?

d) $W(x) = \int_0^x (f(t) - 25)\,dt$ ist ein Maß für die abgegebene Wärmemenge.
Wie lautet der integralfreie Funktionsterm von $W(x)$?
Skizziere den Graphen von $W(x)$.

Ergebnisse: (ohne Einheiten)

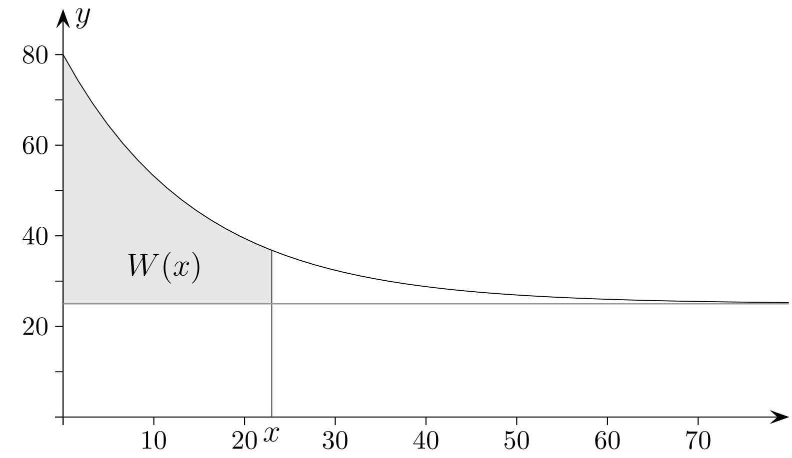


a) $f(x) = 25 + 55 \cdot e^{-0{,}0669\,x}$

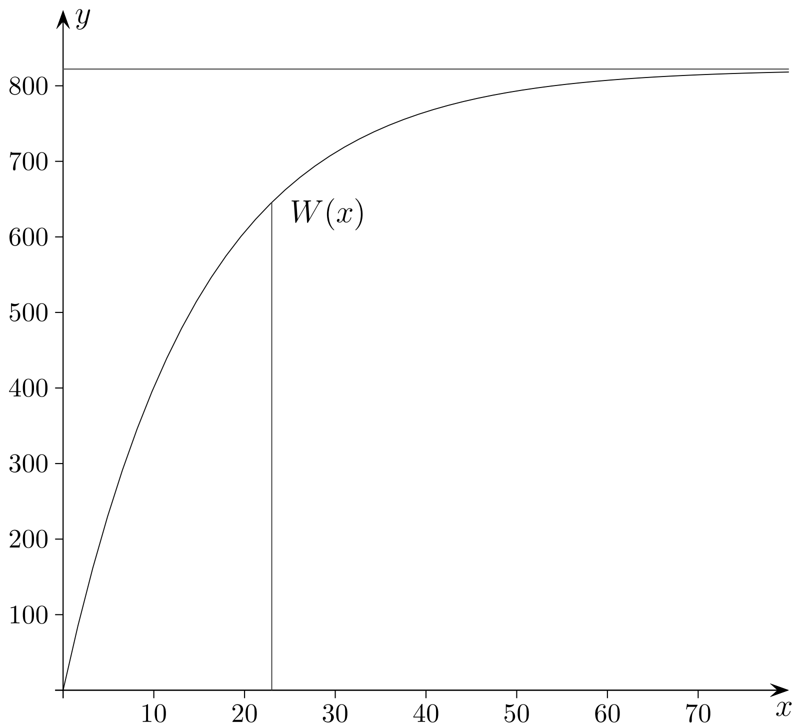
b) 35,8

c) 59,9

d) $W(x) = 822{,}123 - 822{,}123 \cdot e^{-0{,}0669 \cdot x}$

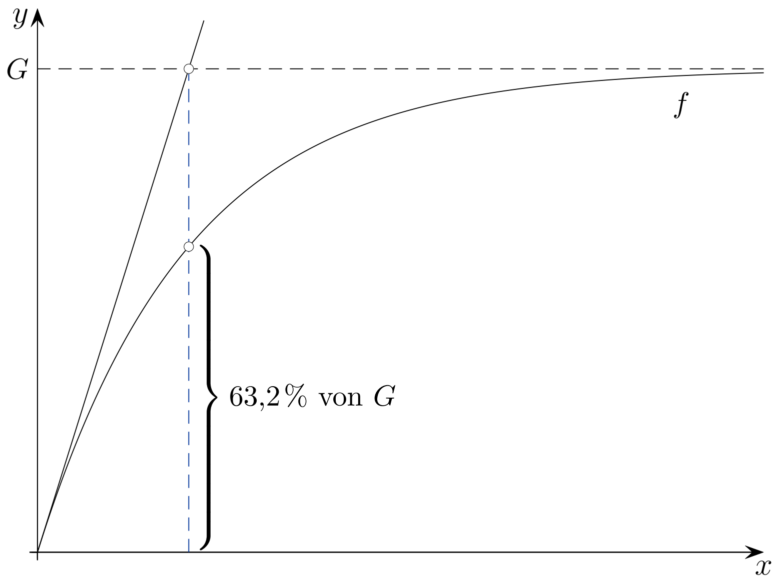


y
80
60
40
20
W(x)
10
20
x
30
40
50
60
70



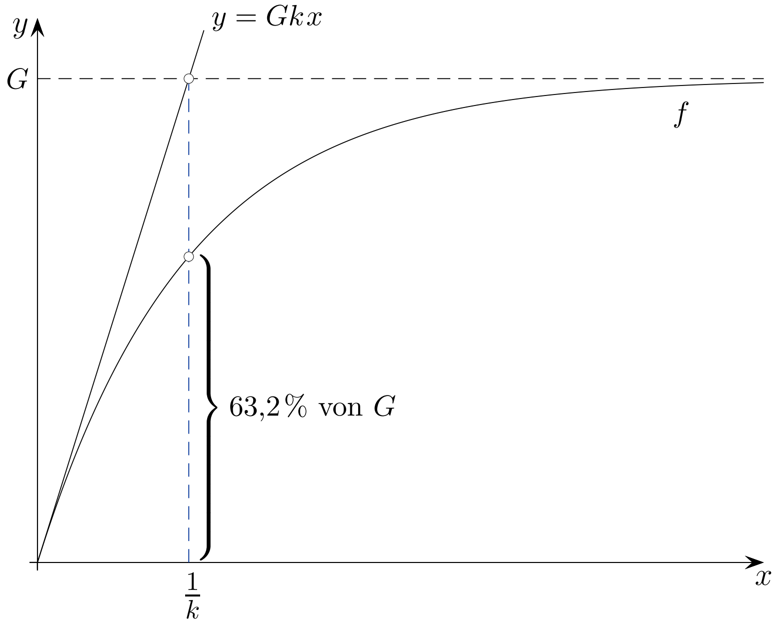
y
800
700
600
500
400
300
200
100
W(x)
10
20
30
40
50
60
70
x

↑ Regelung



In der Regelungstechnik geht es z. B. darum, eine Zimmertemperatur unabhängig von der Außentemperatur einem bestimmten Wert anzunähern.
Formuliere den in der Grafik enthaltenen, in der Regelungstechnik verwendeten Zusammenhang, der von k und G unabhängig ist, und weise ihn nach.
Der Graph von f verläuft durch den Ursprung.

↑ Regelung



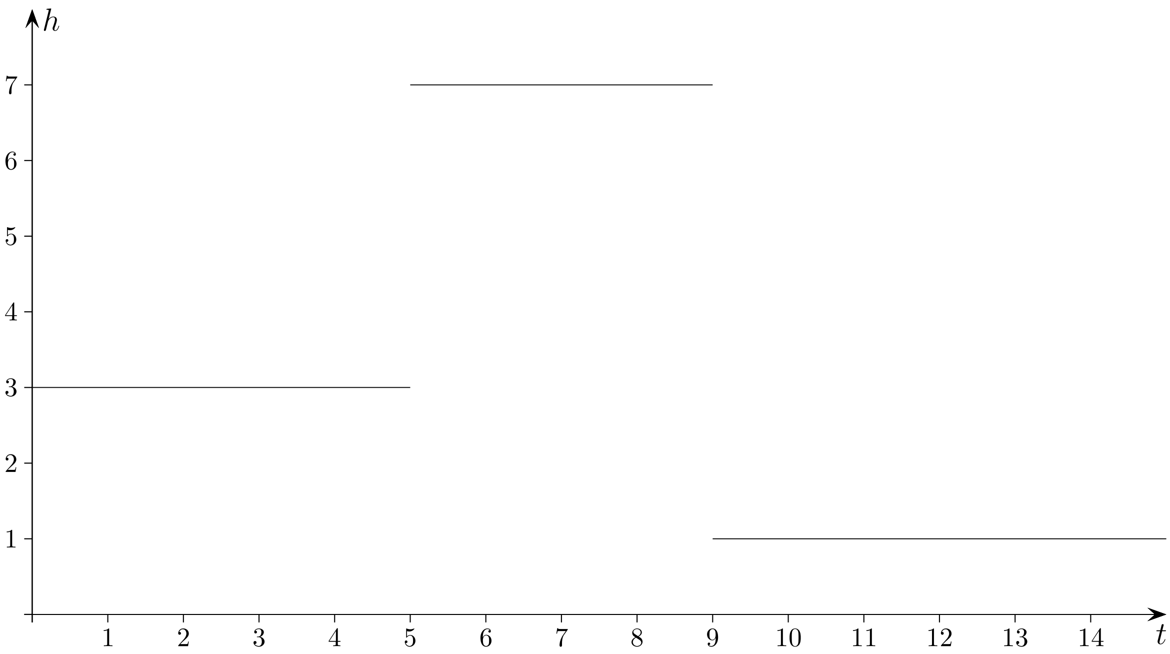
In der Regelungstechnik geht es z. B. darum, eine Zimmertemperatur unabhängig von der Außentemperatur einem bestimmten Wert anzunähern.
Formuliere den in der Grafik enthaltenen, in der Regelungstechnik verwendeten Zusammenhang, der von k und G unabhängig ist, und weise ihn nach.
Der Graph von f verläuft durch den Ursprung.

$$f(x) = G - Ge^{-kx}$$

$$f(\tfrac{1}{k}) = G - Ge^{-1}$$

$$\frac{G - Ge^{-1}}{G} = 1 - e^{-1} = 63{,}2\,\%$$

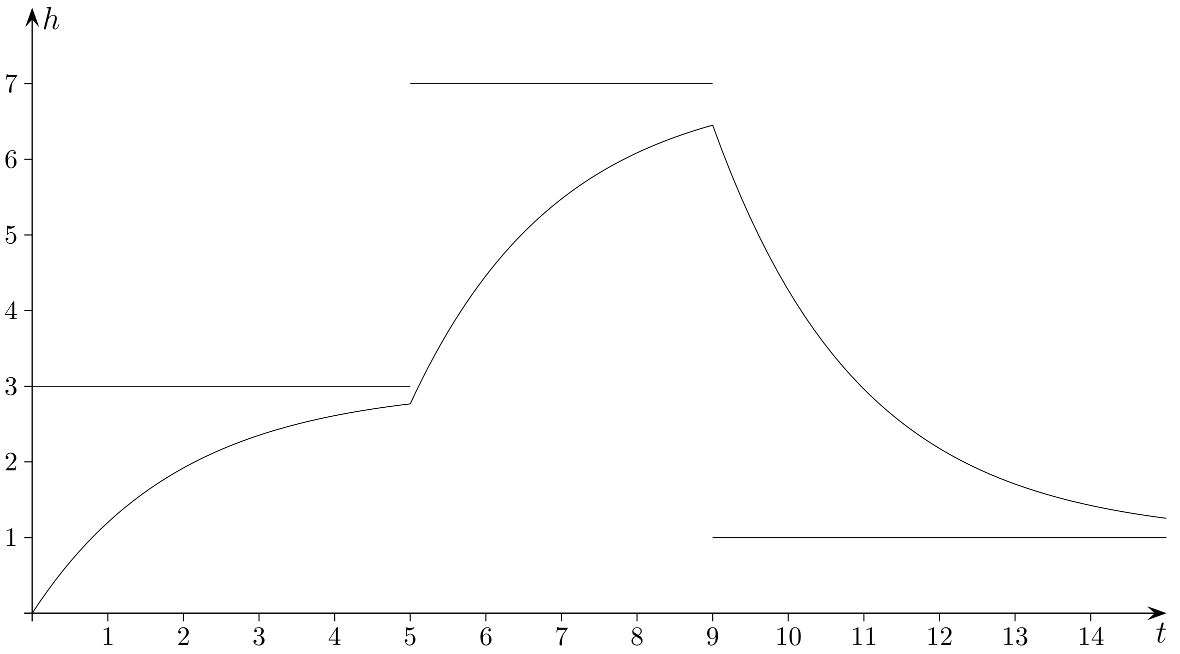
↑ Regelung



Die Wasserhöhe h (zu Beginn $h = 0$) in einem Behälter soll an den zeitlich abhängigen Sollwert (siehe Grafik) angeglichen werden. Hierzu werden der Zu- bzw. Abfluss so geregelt, dass die Wasserhöhe kontinuierlich um 40 % zur Differenz zwischen der vorhandenen Wasserhöhe und dem Sollwert zu- bzw. abnimmt.

Skizziere den Verlauf der Wasserhöhe und ermittle die zugehörige Funktion.

↑ Regelung



Die Lösung der DGL $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$ lautet:

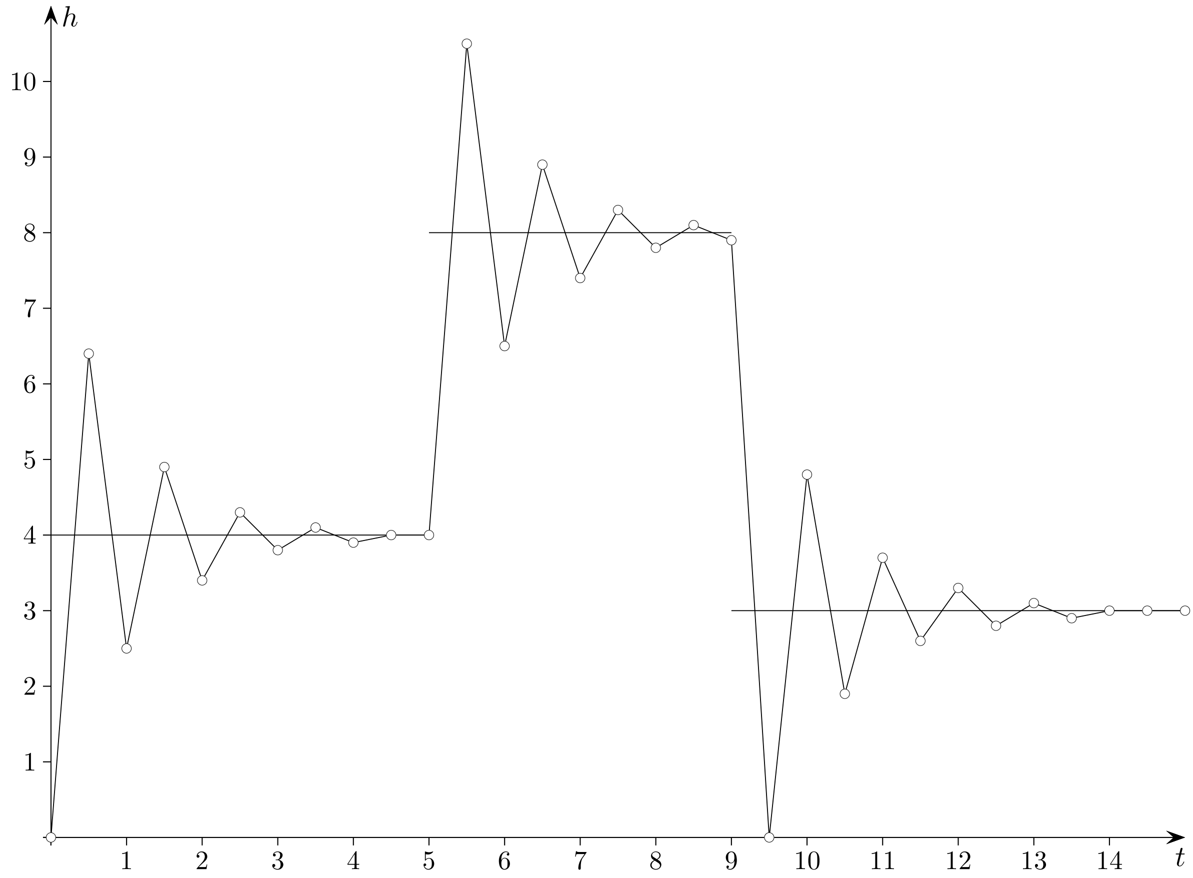
$f(x) = G - a\,e^{-kx}$

Der Anfangsbestand ist dann $G - a$, $e^{-k} = 1 - \dfrac{p}{100}$, $k = -0{,}5108$.

$$s(t) = \begin{cases} 3 & 0 \le t < 5 \\ 7 & 5 \le t < 9 \\ 1 & 9 \le t < 15 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} f_1(t) = 3 - 3e^{kt} & 0 \le t \le 5 \\ f_2(t) = 7 - (7 - f_1(5))e^{k(t-5)} & 5 \le t \le 9 \\ f_3(t) = 1 + (f_2(9) - 1)e^{k(t-9)} & 9 \le t \le 15 \end{cases}$$

↑ Regelung



Bei iterativer Herangehensweise (hier Schrittweite 0,5, Konstante 1,61)
kann es zum Überschwingen kommen.

↑ Kreuzfahrt   Hamburg GK 2014 geändert

Auf einem Kreuzfahrtschiff mit 2500 Passagieren erkrankt am Tag $t = 0$ auf hoher See ein Ehepaar. Am nächsten Tag leiden bereits insgesamt 22 Passagiere unter denselben Symptomen. Der Schiffsarzt befürchtet, dass alle Passagiere erkranken könnten. Er verwendet das Wachstumsmodell

$$f(t) = a - b \cdot e^{-k \cdot t},$$

t Anzahl der Tage nach Ausbruch der Krankheit, $f(t)$ Anzahl der erkrankten Passagiere, um die Ausbreitung der vermuteten Infektionskrankheit zu erfassen.

a) Ermitteln Sie a, b und k.

b) Bestimmen Sie, an welchem Tag nach Ausbruch der Krankheit die Anzahl der Erkrankten $5\,\%$ der Gesamtzahl an Passagieren übersteigt.

c) Mit der derzeitigen Schiffsbesatzung können auf Dauer täglich nur 15 neu erkrankte Passagiere erstversorgt werden. Daher fordert der Schiffsarzt am zweiten Tag nach Ausbruch der Krankheit medizinisches Hilfspersonal per Hubschrauber an, das noch am selben Tag eintrifft und ausschließlich alle täglich neu erkrankten Passagiere erstversorgt.

Ermitteln Sie, bis zu welchem Tag nach Ausbruch der Krankheit die Anwesenheit des medizinischen Hilfspersonals an Bord voraussichtlich notwendig sein wird.

Am vierten Tag nach Ausbruch der Krankheit erhält der Schiffsarzt ein Medikament, welches allen erkrankten Passagieren verabreicht wird und zu deren Heilung führt. Die Änderungsrate der Krankenanzahl ab dem Tag $t = 4$ kann durch eine Funktion

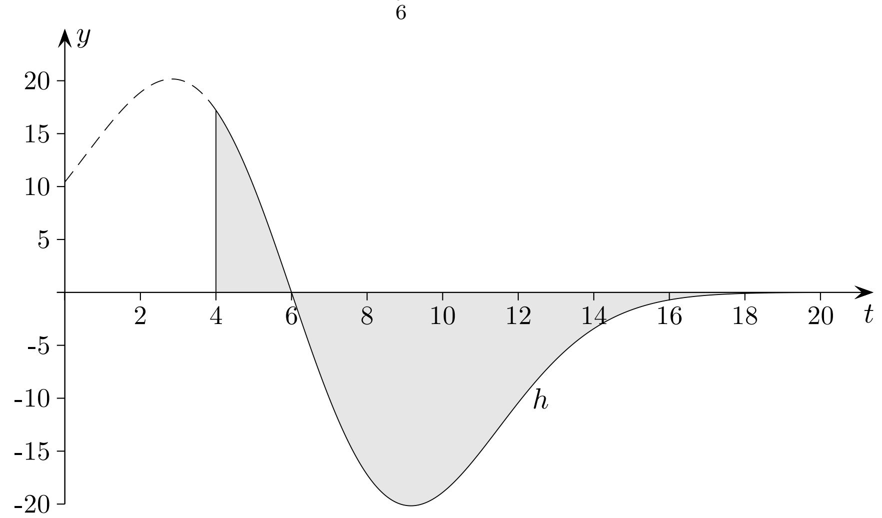
$$h(t) = 10(6 - t) \cdot e^{-0{,}05t^2 + 0{,}6t - 1{,}75}$$

erfasst werden, t Anzahl der Tage nach Ausbruch der Krankheit.

Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen im Sachkontext.

Zeigen Sie, dass $H(t) = 100 \cdot e^{-0{,}05t^2 + 0{,}6t - 1{,}75}$ eine Stammfunktion von h ist.

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_6^{10} h(t)\,dt$ und interpretieren Sie ihn im Sachkontext.



↑ Kreuzfahrt

Auf einem Kreuzfahrtschiff mit 2500 Passagieren erkrankt am Tag $t = 0$ auf hoher See ein Ehepaar. Am nächsten Tag leiden bereits insgesamt 22 Passagiere unter denselben Symptomen. Der Schiffsarzt befürchtet, dass alle Passagiere erkranken könnten. Er verwendet das Wachstumsmodell

$$f(t) = a - b \cdot e^{-k \cdot t},$$

t Anzahl der Tage nach Ausbruch der Krankheit, $f(t)$ Anzahl der erkrankten Passagiere, um die Ausbreitung der vermuteten Infektionskrankheit zu erfassen.

a) Ermitteln Sie a, b und k. $f(t) = 2500 - 2498 \cdot e^{-0{,}008 \cdot t}$

b) Bestimmen Sie, an welchem Tag nach Ausbruch der Krankheit die Anzahl der Erkrankten 5 % der Gesamtzahl an Passagieren übersteigt. am 7. Tag

c) Mit der derzeitigen Schiffsbesatzung können auf Dauer täglich nur 15 neu erkrankte Passagiere erstversorgt werden. Daher fordert der Schiffsarzt am zweiten Tag nach Ausbruch der Krankheit medizinisches Hilfspersonal per Hubschrauber an, das noch am selben Tag eintrifft und ausschließlich alle täglich neu erkrankten Passagiere erstversorgt.

   Ermitteln Sie, bis zu welchem Tag nach Ausbruch der Krankheit die Anwesenheit des medizinischen Hilfspersonals an Bord voraussichtlich notwendig sein wird.
   $f'(t) < 15$, bis zum 36. Tag

   Am vierten Tag nach Ausbruch der Krankheit erhält der Schiffsarzt ein Medikament, welches allen erkrankten Passagieren verabreicht wird und zu deren Heilung führt. Die Änderungsrate der Krankenanzahl ab dem Tag $t = 4$ kann durch eine Funktion

   $$h(t) = 10(6 - t) \cdot e^{-0{,}05t^2 + 0{,}6t - 1{,}75}$$

   erfasst werden, t Anzahl der Tage nach Ausbruch der Krankheit.

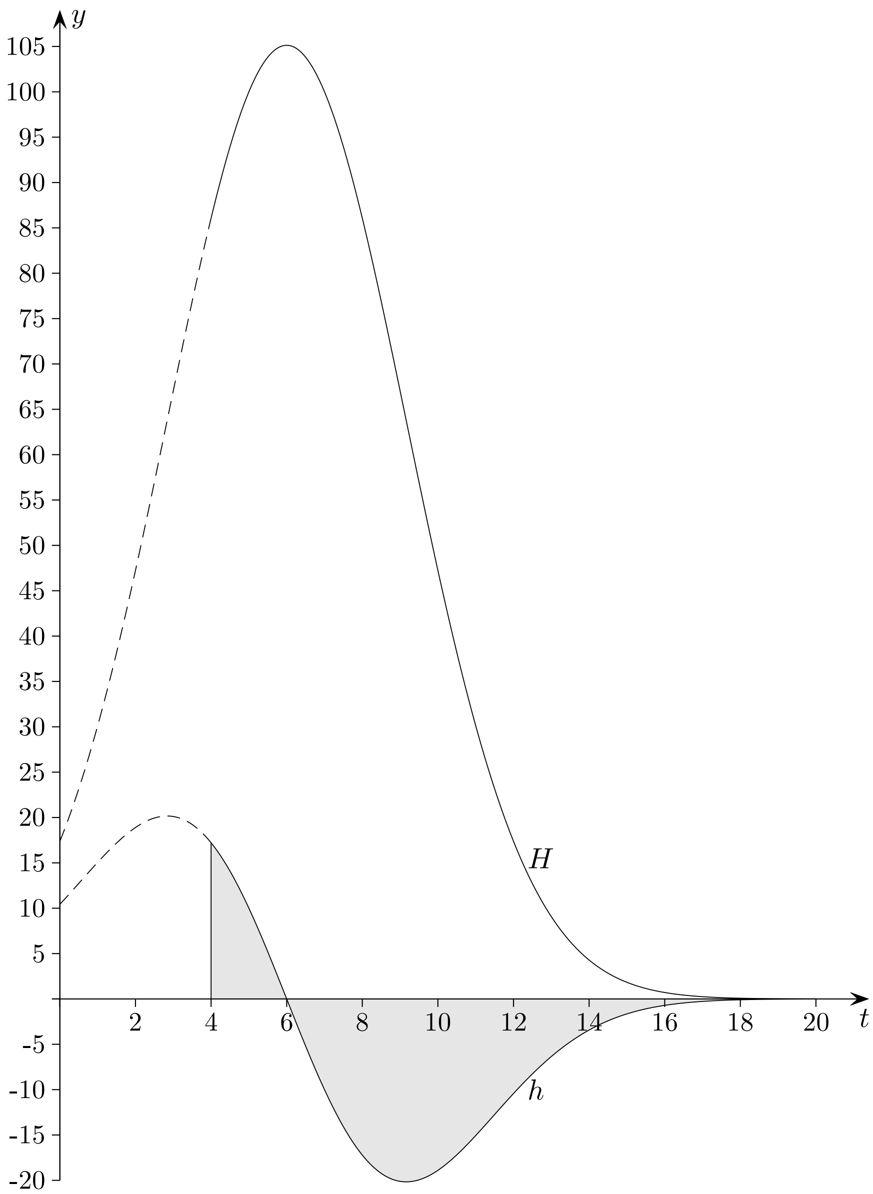
   Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen im Sachkontext.
   Zeigen Sie, dass $H(t) = 100 \cdot e^{-0{,}05t^2 + 0{,}6t - 1{,}75}$ eine Stammfunktion von h ist.

   Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_6^{10} h(t)\,dt$ und interpretieren Sie ihn im Sachkontext.

   $$\int_6^{10} h(t)\,dt = -57{,}9$$

   Die Änderungsrate der Krankenanzahl ist (genähert) die Differenz der Anzahlen von erkrankenden und gesund werdenden Passagieren pro Tag. Diese Differenz hat zwischen dem 6. und 10. Tag um etwa 58 abgenommen, d. h., die Differenz der Anzahlen von gesund werdenden und erkrankten Passagieren hat um 58 zugenommen.

↑ Kreuzfahrt



Die Änderungsrate sinkt vom 4. bis zum 6. Tag auf null. Entweder treten an diesem Tag keine Neuerkrankungen und keine Genesungen auf oder die Anzahl der Neuerkrankungen ist gleich der Anzahl der Genesenden.
Für $t > 6$ erkranken weniger Menschen als gesund werden. Ab etwa $t = 9$ werden weniger Passagiere gesund als zuvor, da immer weniger Passagiere krank sind. Der Graph strebt für größer werdendes t gegen null. Langfristig sind wieder alle Passagiere genesen, da das Medikament zur Heilung führt.

In der Originalaufgabe (Hamburg GK 2014) beschreibt h eine Inzidenz (Neuerkrankungen/Zeitraum). Eine Inzidenz kann jedoch nicht negativ werden. Es liegt eine Verwechselung mit der Änderungsrate der Prävalenz (von t abhängige Anzahl Erkrankter) vor.

↑ Heißer Kaffee

Der Kaffee in einer Tasse ist $80^\circ C$ heiß. Die Raumtemperatur beträgt $20^\circ C$.
Nach 10 Minuten beträgt die Kaffeetemperatur $52^\circ C$.

a) Man nimmt an, dass die Kaffeetemperatur $f(t)$ zur Zeit t durch die Funktion $f(t) = a \cdot e^{-k \cdot t} + U$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Konstanten a und k auf 4 Nachkommastellen genau. Skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Nach wie viel Minuten ist die Temperatur des Kaffees auf die Hälfte der Anfangstemperatur gesunken?

c) Nach welcher Zeit unterscheidet sich die Kaffeetemperatur um höchstens $5^\circ C$ von der Endtemperatur?

d) Berechnen Sie $\dfrac{f(n) - f(n+10)}{f(n) - U}$ für $n = 0, 10, \ldots, 50$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

↑ Heißer Kaffee

Der Kaffee in einer Tasse ist $80^\circ\,C$ heiß. Die Raumtemperatur beträgt $20^\circ\,C$.
Nach 10 Minuten beträgt die Kaffeetemperatur $52^\circ\,C$.

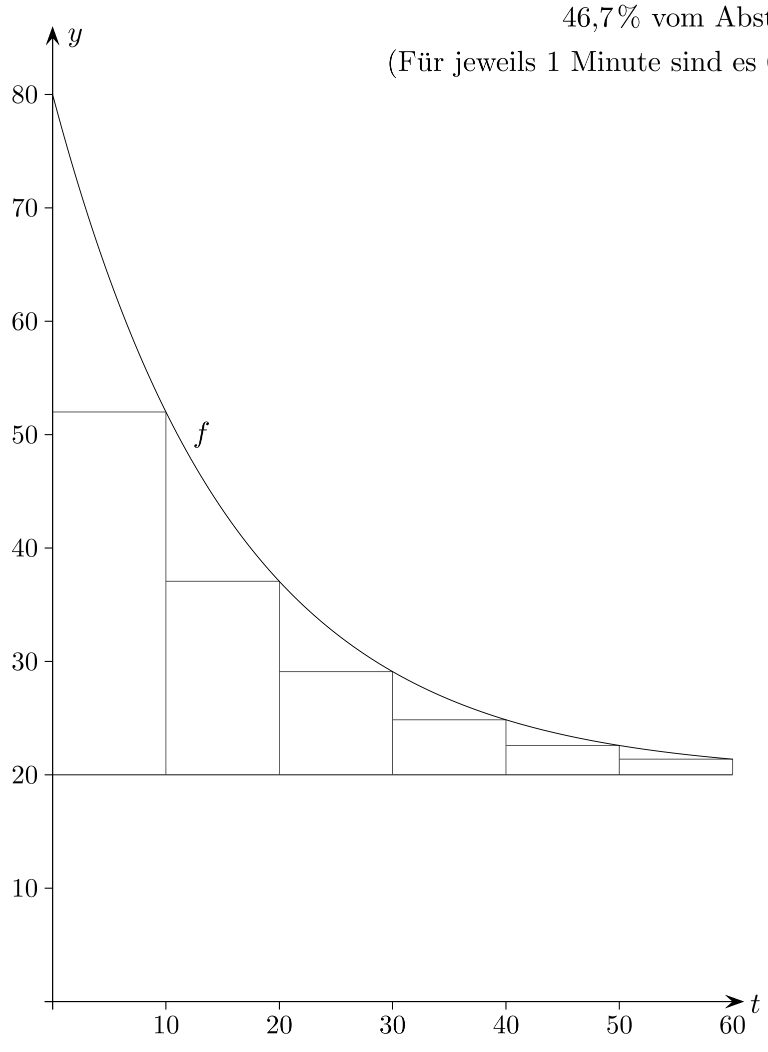
a) Man nimmt an, dass die Kaffeetemperatur $f(t)$ zur Zeit t durch die Funktion $f(t) = a \cdot e^{-k\cdot t} + U$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Konstanten a und k auf 4 Nachkommastellen genau. Skizzieren Sie den Graphen von f. $a = 60$ $k = 0{,}0629$

b) Nach wie viel Minuten ist die Temperatur des Kaffees auf die Hälfte der Anfangstemperatur gesunken? $t = 17{,}5$

c) Nach welcher Zeit unterscheidet sich die Kaffeetemperatur um höchstens $5^\circ\,C$ von der Endtemperatur? $t = 39{,}5$

d) Berechnen Sie $\dfrac{f(n) - f(n+10)}{f(n) - U}$ für $n = 0,\ 10,\ \dots,\ 50$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang. jeweils 0,4667

Die Temperaturabnahme für jeweils 10 Minuten beträgt 46,7 % vom Abstand der Kaffee- zur Raumtemperatur.
(Für jeweils 1 Minute sind es 6,1 %) Newtonsches Abkühlungsgesetz



1. Das Wachstum der Fläche einer Hefepilzkultur wird drei Stunden lang in Zeitschritten von $\Delta t = 0{,}5\,h$ beobachtet. Die Messwerte sind in der folgenden Tabelle zusammengetragen. Prüfen Sie, ob exponentielles Wachstum vorliegt und ermitteln Sie eine modellierende e-Funktion.

t in h	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
A in cm^2	6,0	7,5	8,6	10,8	13,5	16,3	19,6

2. Das Paarungsverhalten von sechs Ratten, die in einem Käfig gehalten werden, der maximal 50 Ratten fasst, wird drei Monate lang in zweiwöchigen Abständen beobachtet. Prüfen Sie, ob (einfaches) beschränktes Wachstum vorliegt und ermitteln Sie eine modellierende e-Funktion.

t in Wochen	0	2	4	6	8	10	12
Anzahl der Ratten	6	21	33	38	41	45	47

1. Das Wachstum der Fläche einer Hefepilzkultur wird drei Stunden lang in Zeitschritten von $\Delta t = 0{,}5\,h$ beobachtet. Die Messwerte sind in der folgenden Tabelle zusammengetragen. Prüfen Sie, ob exponentielles Wachstum vorliegt und ermitteln Sie eine modellierende e-Funktion.

t in h	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
A in cm^2	6,0	7,5	8,6	10,8	13,5	16,3	19,6

$A(n+1) = A(n) + \frac{p}{100}A(n) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)A(n)$

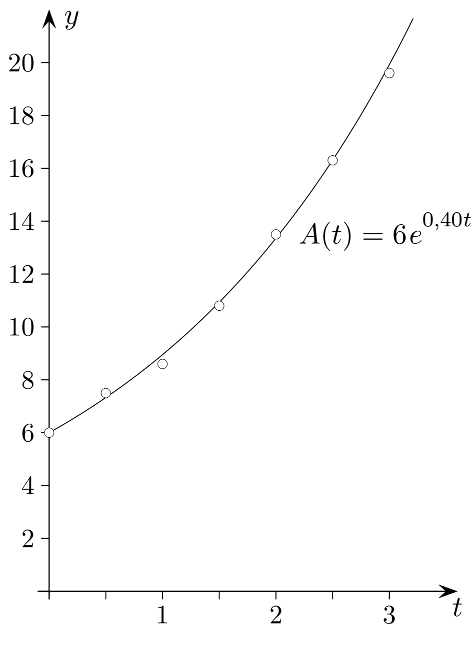
Die Fläche nimmt durchschnittlich um $p_{\varnothing} = 21{,}9\,\%$ pro halbe Stunde zu,
daher liegt in Näherung exponentielles Wachstum vor.

Pro halbe Stunde: $k = \ln(1 + p_{\varnothing}) = 0{,}198$

modellierende Funktion: $A(t) = 6e^{k\frac{t}{\Delta t}} = 6e^{2kt}$, t in h

Dies stimmt mit dem Ergebnis der exponentiellen Regression (GTR)
mit anschließender Umrechnung in eine e-Funktion überein.

Unter STAT im EDIT-Menü die Tabellenwerte als Listen L1 und L2 eingeben und
ExpReg Y1 unter STAT CALC 0: aufrufen.
Die Regressionskurve $y = a \cdot b^x$, $a = 6{,}0$, $b = 1{,}487$ ist dann als Y1 gespeichert.
$y = 6 \cdot b^x = 6 \cdot \left(e^{\ln b}\right)^x \approx 6 \cdot e^{0{,}40x}$
Unter STATPLOT den Plot1 auf On schalten (2ND Y=),
Messpunkte und Regressionskurve über GRAPH plotten.



2. Das Paarungsverhalten von sechs Ratten, die in einem Käfig gehalten werden, der maximal 50 Ratten fasst, wird drei Monate lang in zweiwöchigen Abständen beobachtet. Prüfen Sie, ob (einfaches) beschränktes Wachstum vorliegt und ermitteln Sie eine modellierende e-Funktion.

t in Wochen	0	2	4	6	8	10	12
Anzahl der Ratten R	6	21	33	38	41	45	47

Für das durchschnittliche $p_{\varnothing}$ erhalten wir mit

$$R(n+1) = R(n) + \frac{p}{100}(50 - R(n))$$

$p_{\varnothing} = 0{,}357.$

Ansatz: $R(t) = S - ae^{k\frac{t}{\Delta t}} = 50 - ae^{k\frac{t}{2}}$

$$a = 44 \text{ mit } R(0) = 6, \quad k = \ln(1 - p_{\varnothing}) = -0{,}44$$

Dies stimmt mit dem Ergebnis der exponentiellen Regression
für das Sättigungsmanko $M(t) = 50 - R(t)$
mit anschließender Umrechnung in eine e-Funktion überein.

$$M(t) = 44{,}3 \cdot 0{,}804^t = 44{,}3 \cdot e^{-0{,}22\,t}$$

$$R(t) = 50 - 44{,}3 \cdot e^{-0{,}22\,t}$$