Approximation der Funktion $f(x) = e^x$

1. Zunächst soll die Funktion $f(x)$ durch eine lineare Funktion $g(x) = ax + b$ an der Stelle $x = 0$ approximiert werden.

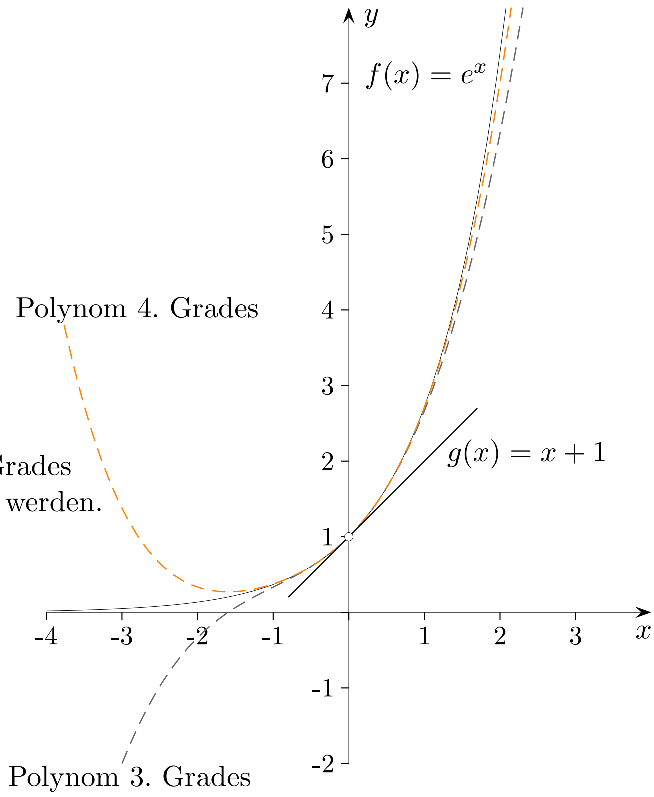
   a) $g(0) = 1$

   b) $g'(0) = 1$

   Dies ergibt:

   $$\begin{aligned} b &= 1 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

   Die Funktion lautet daher: $g(x) = x + 1$



2. Nun soll die Funktion $f(x)$ durch ein Polynom 2. Grades $g(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = 0$ approximiert werden.

   a) $g(0) = 1$

   b) $g'(0) = 1$

   c) $g''(0) = 1$

   Dies ergibt:

   $$\begin{aligned} c &= 1 \\ b &= 1 \\ 2a &= 1 \end{aligned}$$

   Also: $a = \frac{1}{2}$

   Die Funktion lautet daher: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

3. Die nächstbesseren Näherungen durch Polynome 3. und 4. Grades lauten:

   $g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$ und $g(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$

4. Wir vermuten, dass gilt: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ ...$

5. Und insbesondere: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ ...$

Leite die einzelnen Summanden der e-Reihe ab. Was stellst du fest?

Reihenentwicklung

Gesucht ist eine Funktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt und an der Stelle null den Wert 1 hat, d. h. $f'(x) = f(x),\ f(0) = 1$ ($f(0) = c$ führt in der Lösungsfunktion zu einem Faktor c).

Wir werden uns der Lösung schrittweise nähern und beginnen mit f_1.

$f_1(x) = 1$ — Da $f_1'(x) = 0$ ist, verbessern wir den Ansatz mit f_2.

$f_2(x) = 1 + x$ — $f_2'(x) = 1$, die Aufleitung von x wird hinzugefügt.

$f_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ — $f_3'(x) = 1 + x$, die Aufleitung von $\frac{1}{2}x^2$ wird hinzugefügt, usw.

$f_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3$ — Der letzte Summand wird wiederholt aufgeleitet.

$f'_{n+1}(x) = f_n(x),\ \ f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{n!}\,x^n$

$n!$ wächst schnell an, $\frac{1}{n!}$ wird schnell verschwindend klein.

Das Ergebnis lautet:

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \ldots$$

Die folgenden Sachverhalte werden in der Schule nicht begründet.

a) Die Reihe konvergiert für jedes x.

b) f darf gliedweise differenziert werden. Damit gilt $f'(x) = f(x)$.

c) $f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots = e$

d) $f(x) = e^x$