Aufgabe Abkühlung

1. In einem Labor wird ein Körper mit der Temperatur $90°C$ zum Zeitpunkt $x = 0$ zum Abkühlen in einen Raum der gleichbleibenden Temperatur $10°C$ gebracht. Der Abkühlungsvorgang wird durch die Differentialgleichung

$$h'(x) = -2 \cdot (h(x) - 10), \quad x \geq 0$$

beschrieben. Darin ist $h(x)$ die Temperatur in $°C$ und x die Zeit in Stunden.

a) Erläutern Sie das der Gleichung zugrunde gelegte Modell. Lösen Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie die Temperatur, die der Körper nach einer halben Stunde hat. Zeichnen Sie den Graphen des zeitlichen Verlaufs der Körpertemperatur.

b) Nach einer Stunde wird die Raumtemperatur jetzt linear um $20°C$ pro Stunde zwei Stunden lang erhöht. Erläutern Sie, warum nun für $t \geq 1$ die Differentialgleichung

$$g'(x) = -2 \cdot (g(x) - 10 - 20 \cdot (x - 1)), \quad x \geq 1$$

den Temperaturverlauf beschreibt.
Ermitteln Sie die diskrete Näherungslösung für die nächsten fünf Werte für $\Delta x = 0{,}1$.
Bestimmen Sie die stetige Lösung, indem Sie die Differentialgleichung lösen und die Konstante so anpassen, dass bei $x = 1$ ein stetiger Übergang zu der Lösung von a) erfolgt.
Vergleichen Sie die diskreten Werte mit der stetigen Lösung und kommentieren Sie die Abweichungen.

c) Bestimmen Sie die tiefste Temperatur, die der Körper erreicht, und den zugehörigen Zeitpunkt. Skizzieren Sie die Temperaturkurve im Koordinatensystem von a). Untersuchen Sie dazu nur das asymptotische Verhalten und die Monotonie.
Bestimmen Sie auf vier Stellen genau den Zeitpunkt, bei dem der Körper eine Temperatur von exakt $22°C$ hat.

Sie können gegebenenfalls die Ersatzlösungen

$$h(x) = 10 + 80 \cdot e^{-2x} \quad \text{und} \quad g(x) = 20 \cdot x - 20 + 153{,}89 \cdot e^{-2x}, \quad x \geq 1$$

benutzen.

Lösungshinweise:

Differentialgleichungen dieser Art können gelöst werden, indem sie auf eine ähnliche Form wie $\dfrac{h'(x)}{h(x)} = ...$ *gebracht und integriert werden oder es wird ein Lösungsansatz* $a(x) \cdot b(x)$ *durchgeführt, wobei ein Faktor so gewählt wird, dass die Rechnung erheblich vereinfacht wird, indem ein Term null wird.*
Für eine diskrete Näherungslösung einer Differentialgleichung wird $g'(x)$ *durch* $\dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$ *ersetzt und nach* $g(x + \Delta x)$ *aufgelöst.* $g(x + \Delta x)$ *kann dann iterativ errechnet werden.*

Lösung:

1. a) $\dfrac{\Delta h}{\Delta x}$ *ist proportional zur Differenz der Temperatur und dem langfristigen Wert 10.*

$$\frac{h'(x)}{-10+h(x)} \;=\; -2 \quad\Longrightarrow\quad \ln(h(x)-10) \;=\; -2x+C \quad\Longrightarrow\quad h(x) = k\cdot e^{-2x}+10$$

$90 = k+10, \qquad h(x) = 10+80\cdot e^{-2x}, \quad h(0{,}5) = 39{,}43$

b) *Temperatur 10 wird ersetzt durch* $10+20\cdot x-20 = 20\cdot x-10$ *für* $x\geq 1$.

Diskrete Lösung $g(x+\Delta x) \;=\; 4\cdot x-2+0{,}8\cdot g(x)$. *Startwert:* $g(1) = h(1) = 20{,}826$

x	*1*	*1,1*	*1,2*	*1,3*	*1,4*	*1,5*
Näherung	*20,826*	*18,661*	*17,328*	*16,662*	*16,530*	*16,824*

$g'(x)+2\cdot g(x) \;=\; 40\cdot x-20$, *Produktansatz:* $g(x) = a(x)\cdot b(x)$, *kurz:* $g = a\cdot b$

$$\begin{aligned} a'\cdot b+a\cdot b'+2\cdot a\cdot b &= 40\cdot x-20 \\ a\cdot(b'+2b)+a'\cdot b &= 40\cdot x-20 \qquad \text{wähle } b \text{ so, dass } b'+2b=0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad b = e^{-2x}$, *DGL:* $a'\cdot e^{-2x} = 40\cdot x-20$, $\quad a' = e^{2x}\cdot(40\cdot x-20)$

partielle Integration führt zu: $a = (20x-20)\cdot e^{2x}+C$, $\quad g = a\cdot b = 20\cdot x-20+C\cdot e^{-2x}$

Bedingung $h(1) = g(1)$, $\quad 20-20+C\cdot e^{-2} = 10+80\cdot e^{-2} \quad\Longrightarrow\quad C = 80+10\cdot e^{2} = 153{,}8906$

Vergleich der Werte:

x	*1*	*1,1*	*1,2*	*1,3*	*1,4*	*1,5*
exakt	*20,826*	*19,051*	*17,960*	*17,430*	*17,358*	*17,662*

Gute Übereinstimmung, bei beiden ein Minimum, exakte Lösung liegt höher, da man bei der diskreten Lösung linear nach unten schreitet, der fallende Graph in Wirklichkeit aber linksgekrümmt ist.

c) *Es ist eine Lösung von b) zu untersuchen, da der Graph von a) monoton fallend ist.*

$g'(x) = 20-307{,}78\cdot e^{-2x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = 1{,}3668, \qquad Min(\,1{,}37\mid 17{,}336)$

Asymptote: $\quad y = 20\cdot x-20$, *Für* $x\geq 1{,}37$ *ist der Graph monoton steigend.*

Newtonverfahren für die Funktion $f(x) = g(x)-22 = 20x-42+153{,}89\cdot e^{-2x}$

Startwert $x_0 = 2$ *führt auf 1,94300 ..., 1,941615 ..., 1,941614 ...,*