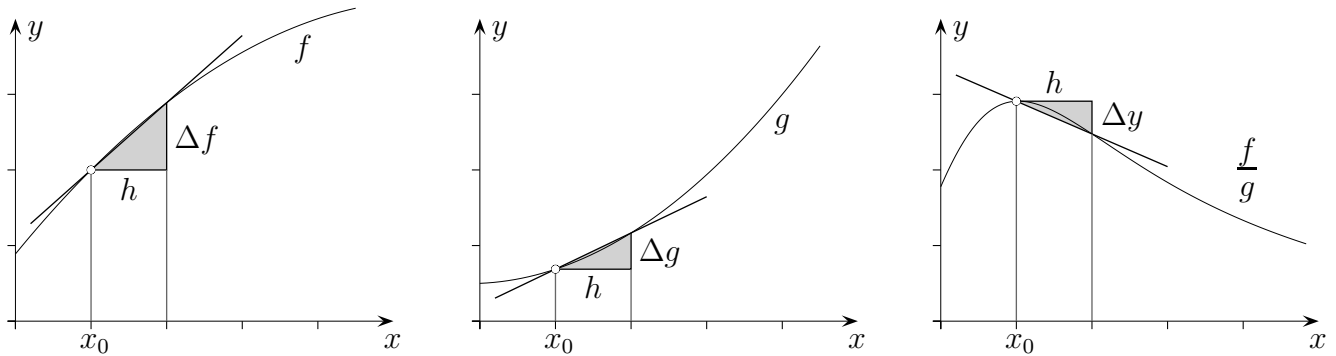


# Quotientenregel (Ableitung von $\frac{f}{g}$ )



$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} \quad \text{mit } \Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{h} \quad \text{mit } \Delta g = g(x_0 + h) - g(x_0)$$

Für den Quotienten der Funktionen gilt dann:

$$* \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h}$$

Mit  $f(x_0 + h) = f(x_0) + \Delta f$  und  $g(x_0 + h) = g(x_0) + \Delta g$  formen wir um (Hauptnenner):

$$\Delta y = \frac{f(x_0) + \Delta f}{g(x_0) + \Delta g} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{(f(x_0) + \Delta f)g(x_0) - f(x_0)(g(x_0) + \Delta g)}{(g(x_0) + \Delta g)g(x_0)} = \frac{\Delta f g(x_0) - f(x_0)\Delta g}{(g(x_0) + \Delta g)g(x_0)}$$

Dies setzen wir in \* ein, es ergibt sich:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(g(x_0) + \Delta g)g(x_0)} \cdot \left(\frac{\Delta f}{h}g(x_0) - f(x_0)\frac{\Delta g}{h}\right)$$

Indem wir zu den Grenzwerten übergehen, erhalten wir die Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \text{oder kurz} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Leite ab.

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$                       b)  $f(x) = \frac{3x - 5}{2x + 7}$

c)  $f(x) = \frac{1 - x}{x^2}$                       d)  $f(x) = \frac{4x}{1 + x^2}$

# Quotientenregel (Ableitung von $\frac{f}{g}$ )

Leite ab.

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = \frac{3x - 5}{2x + 7}$

c)  $f(x) = \frac{1 - x}{x^2}$

d)  $f(x) = \frac{4x}{1 + x^2}$

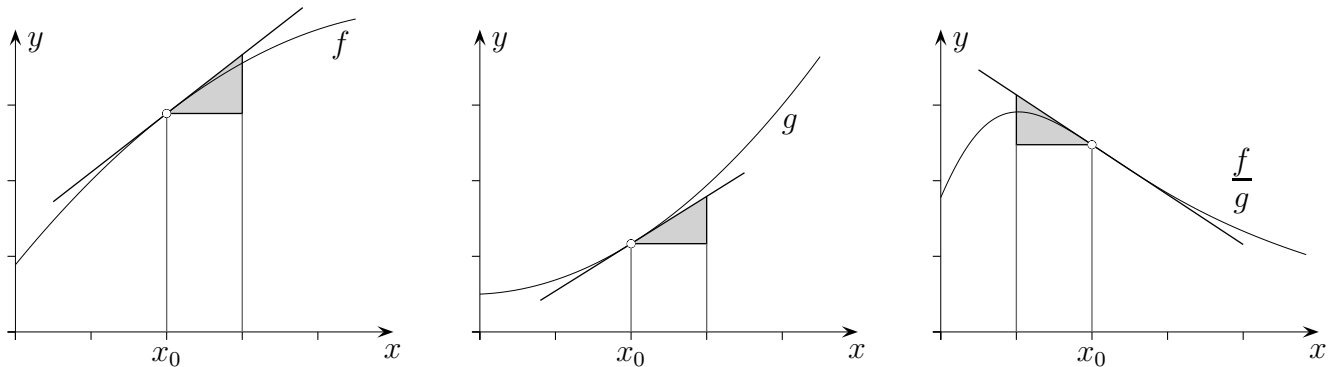
a)  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

b)  $f'(x) = \frac{31}{(2x + 7)^2}$

c)  $f'(x) = \frac{x - 2}{x^3}$

d)  $f'(x) = \frac{4 - 4x^2}{(1 + x^2)^2}$

# Quotientenregel (Ableitung von $\frac{f}{g}$ ) Leibniz (1646-1716)



Wir gehen hier von Näherungen durch Tangenten an der Stelle  $x_0 = 0$  aus

$$f(x) \approx f'(0) \cdot x + f(0) \quad \text{und}$$

$$g(x) \approx g'(0) \cdot x + g(0)$$

und bilden den Quotienten:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(0) \cdot x + f(0)}{g'(0) \cdot x + g(0)}$$

Um die Tangentengleichung zu erkennen, formen wir den Bruch um, wir erweitern.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &\approx \frac{[f'(0) \cdot x + f(0)] \cdot [g'(0) \cdot x - g(0)]}{[g'(0) \cdot x + g(0)] \cdot [g'(0) \cdot x - g(0)]} \\ &= \frac{-f'(0)g(0) + f(0)g'(0)}{(g'(0)x)^2 - (g(0))^2} x + \frac{f'(0)g'(0)x^2 - f(0)g(0)}{(g'(0)x)^2 - (g(0))^2} \\ &\approx \frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{(g(0))^2} x + \frac{f(0)}{g(0)} \end{aligned}$$

Allgemein:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \text{oder kurz} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$