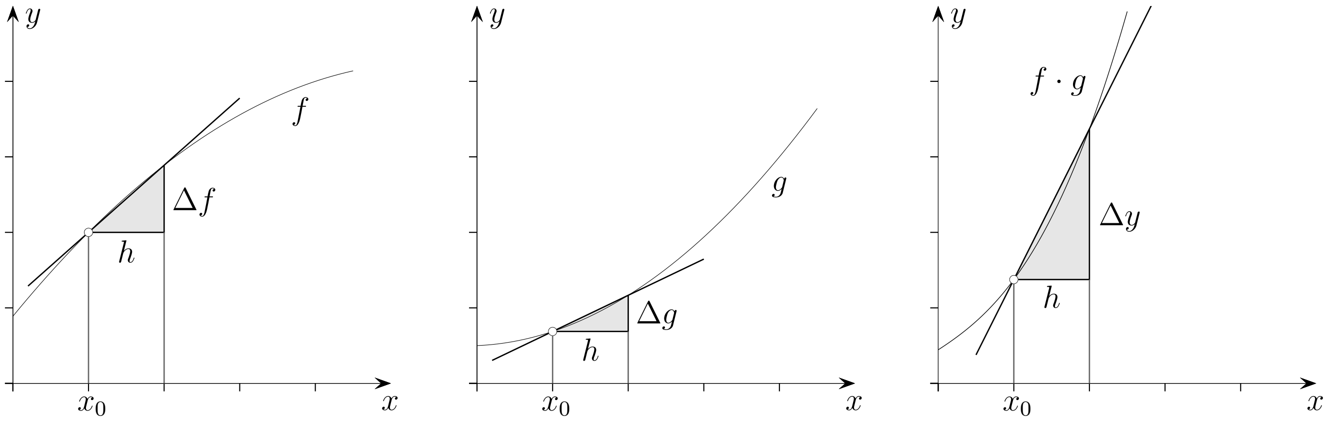
Produktregel (Ableitung von $f \cdot g$)



Wir haben die Hoffnung, dass die Ableitung von $f \cdot g$ mit Hilfe der Ableitungen von f und g ermittelt werden kann.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} \qquad \text{mit} \quad \Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$$

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta g}{h} \qquad \text{mit} \quad \Delta g = g(x_0+h) - g(x_0)$$

Für das Produkt der Funktionen gilt dann:

$$* \quad (f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h}$$

Mit $f(x_0+h) = f(x_0) + \Delta f$ und $g(x_0+h) = g(x_0) + \Delta g$ multiplizieren wir aus:

$$f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) = (f(x_0) + \Delta f) \cdot (g(x_0) + \Delta g) = f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta f \Delta g$$

Dies setzen wir in $*$ ein, es ergibt sich: $(f \cdot g)'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta f \Delta g}{h}$

Indem wir zu den Grenzwerten übergehen, erhalten wir die Produktregel:

$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$ oder kurz $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$

Leite ab.

a) $f(x) = \frac{1}{3} x \cdot x^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

e) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

Produktregel (Ableitung von $f \cdot g$)

Leite ab.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x \cdot x^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

e) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

Lösungen

a) $f'(x) = x^2$

b) $f'(x) = 4x^3$

c) $f'(x) = e^x\,(1 + x)$

d) $f'(x) = x\,e^x\,(2 + x)$

e) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Produktregel Ableitung von $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

Wir haben die Hoffnung, dass die Ableitung von $f(x)$
mit Hilfe der Ableitungen von $u(x)$ und $v(x)$ ermittelt werden kann.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0+h) \cdot v(x_0+h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$$

Der Zähler kann durch zwei zusammen null ergebende Terme so ergänzt werden,
dass durch Ausklammern die Differenzenquotienten der Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ entstehen.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0+h) \cdot v(x_0+h) \overbrace{- u(x_0) \cdot v(x_0+h) + u(x_0) \cdot v(x_0+h)}^{=0} - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\big(u(x_0+h) - u(x_0)\big) \cdot v(x_0+h) \;+\; u(x_0) \cdot \big(v(x_0+h) - v(x_0)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} \cdot v(x_0+h) \;+\; \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \cdot u(x_0)$$

Indem wir zu den Grenzwerten übergehen, erhalten wir die Produktregel:

$$(u(x_0) \cdot v(x_0))' \;=\; u(x_0) \cdot v'(x_0) + u'(x_0) \cdot v(x_0)$$

oder kurz: $\quad (u \cdot v)' \;=\; u \cdot v' + u' \cdot v$

Leite ab.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x \cdot x^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

e) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

Ableitungsregeln vermuten

1. Produktregel

Die Ableitung des Produkts $u(x) \cdot v(x)$ kann vermutet werden.

Hierzu zerlegen wir eine Funktion, z. B. $f(x) = x^6$, die wir ableiten können, in ein Produkt.
In diesem Fall gibt es mehrere Möglichkeiten.

a) $f(x) = x^3 \cdot x^3$ b) $f(x) = x^2 \cdot x^4$ c) $f(x) = x \cdot x^5$

Um den Zusammenhang zwischen der Ableitung $f'(x) = 6\,x^5$ und den Ableitungen der Faktoren aufzudecken, leiten wir zunächst nur einen Faktor ab, dann stimmt zumindest die Potenz.

a) $f'(x) = \underbrace{3x^2 \cdot x^3}_{3x^5} + ...$ b) $f(x) = \underbrace{2x \cdot x^4}_{2x^5} + ...$ c) $f(x) = \underbrace{1 \cdot x^5}_{x^5} + ...$

Nun probieren wir es auch mit dem zweiten Faktor:

a) $f'(x) = \underbrace{3x^2 \cdot x^3}_{3x^5} + \underbrace{x^3 \cdot 3x^2}_{3x^5}$ b) $f(x) = \underbrace{2x \cdot x^4}_{2x^5} + \underbrace{x^2 \cdot 4x^3}_{4x^5}$ c) $f(x) = \underbrace{1 \cdot x^5}_{x^5} + \underbrace{x \cdot 5x^4}_{5x^5}$

Die Vermutung $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
oder kürzer: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ liegt nun nahe.

2. Kettenregel für e-Funktionen

Um die Ableitungsregel für $f(x) = e^{2x}$ zu erkennen, zerlegen wir die Funktion in ein Produkt.
$f(x) = e^{2x} = e^{x+x} = e^x \cdot e^x$

Begründe, dass $f'(x) = 2e^{2x}$ gilt.

Wie wird wohl $f(x) = e^{g(x)}$, z. B. $f(x) = e^{-x^2+4x}$, abgeleitet?

3. Quotientenregel

Die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, kurz $f = \dfrac{u}{v}$, kann mit einem geschickten Ansatz ohne Mühe hergeleitet werden.

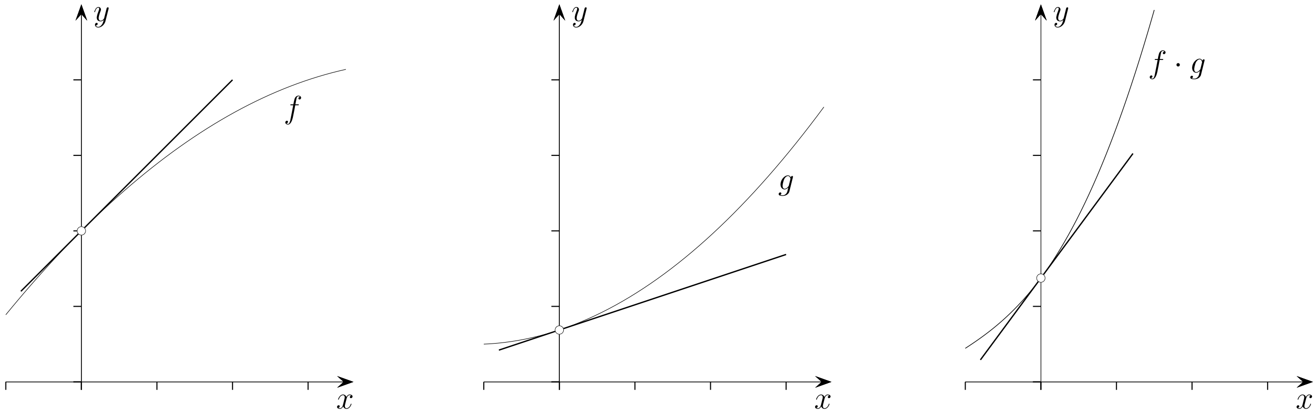
$$\frac{u}{v} \cdot v = u \qquad \text{(beide Seiten mit der Produktregel ableiten)}$$

$$(\frac{u}{v})' \cdot v + \frac{u}{v} \cdot v' = u'$$

$$(\frac{u}{v})' \cdot v = u' - \frac{u}{v} \cdot v'$$

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Produktregel (Ableitung von $f \cdot g$ an der Stelle $x = 0$)



Wir gehen von Näherungen durch Tangenten an der Stelle $x = 0$ aus

$$f(x) \approx f'(0) \cdot x + f(0) \quad \text{und}$$
$$g(x) \approx g'(0) \cdot x + g(0)$$

und bilden das Produkt:

$$f(x) \cdot g(x) \approx \big(f'(0) \cdot x + f(0)\big) \cdot \big(g'(0) \cdot x + g(0)\big)$$
$$= \underbrace{\big(f'(0) \cdot g(0) + f(0) \cdot g'(0)\big)}_{\text{Ableitung}} \cdot x \; + \; f(0) \cdot g(0) \; + \; g'(0) \cdot f'(0) \cdot x^2$$

Zwischenschritt: Ermittle für $f(x) = x^2 + bx + c$ die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 0$.
Für eine lineare Näherung (Tangente) bleibt der quadratische Restterm unberücksichtigt.

Allgemein lautet die Produktregel:

$(f \cdot g)'(x) \; = \; f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$ oder kurz $(f \cdot g)' \; = \; f \cdot g' + f' \cdot g$

oder $(u \cdot v)' \; = \; u' \cdot v + u \cdot v'$

Leite ab.

a) $f(x) = \dfrac{1}{4}x \cdot x^3$

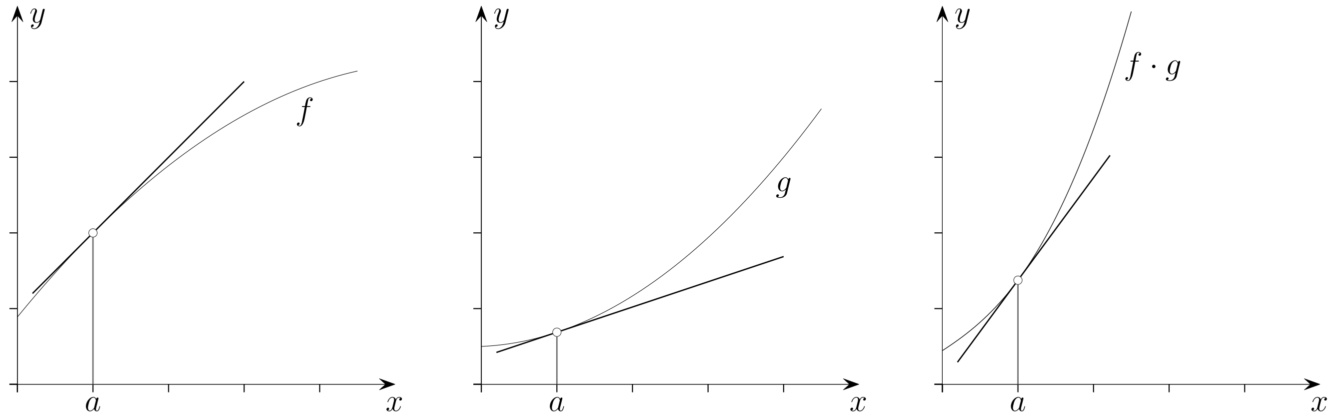
b) $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

e) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

Produktregel (Ableitung von $f \cdot g$ an der Stelle $x = a$)



Wir gehen von Näherungen durch Tangenten aus

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \quad \text{und}$$
$$g(x) \approx g(a) + g'(a) \cdot (x - a)$$

und bilden das Produkt:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &\approx \big(f(a) + f'(a) \cdot (x-a)\big) \cdot \big(g(a) + g'(a) \cdot (x-a)\big) \\ &= f(a) \cdot g(a) \; + \; \underbrace{\big(f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)\big)}_{\text{Ableitung}} \cdot (x-a) \; + \; g'(a) \cdot f'(a) \cdot (x-a)^2 \end{aligned}$$

Zwischenschritt: Ermittle für $f(x) = (x - a)^2 + bx + c$ die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = a$.

Beachte: Für $g(x) = (x - a)^2$ (verschobene Normalparabel) gilt $g'(a) = 0$. Für eine lineare Näherung (Tangente) bleibt der quadratische Restterm unberücksichtigt.

Leite ab.

a) $f(x) = \dfrac{1}{4}x \cdot x^3$

b) $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

e) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

Produktregel

Leite ab.

a) $f(x) = \dfrac{1}{4}x \cdot x^3$

b) $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

e) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

Lösungen

a) $f'(x) = x^3$

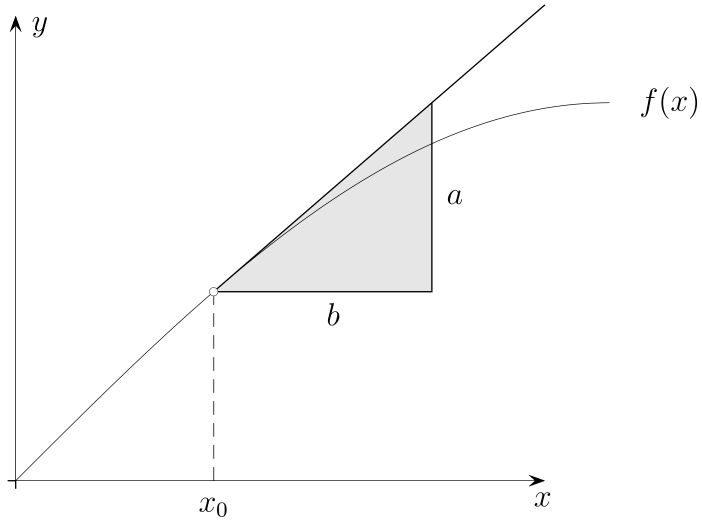
b) $f'(x) = 4x^3$

c) $f'(x) = e^x\,(x^2 + 2x)$

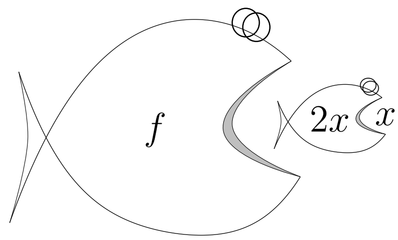
d) $f'(x) = e^{-x}\,(1 - x)$

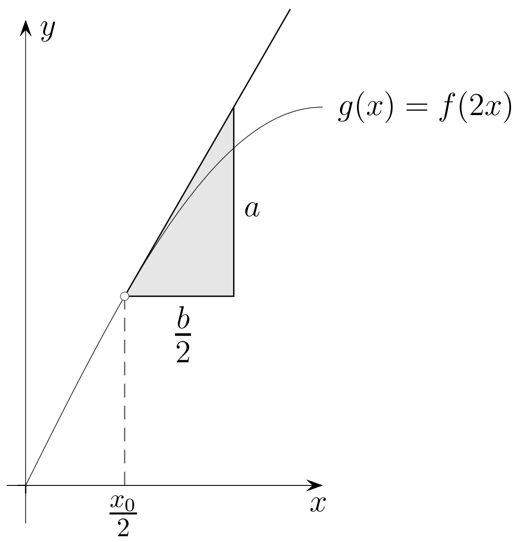
e) $f'(x) = \dfrac{5}{2}\sqrt{x^3}$

Ableitung von $f(2x)$



$m_1 = \frac{a}{b}$





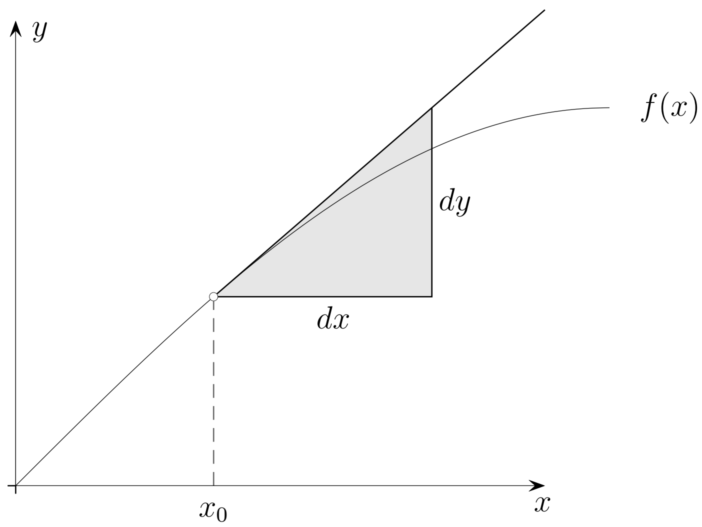
$m_2 = \frac{2a}{b}$

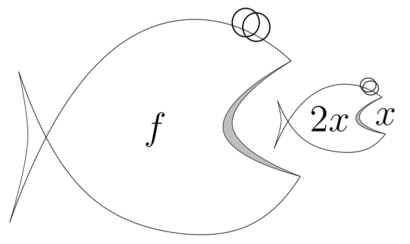
Der Graph von $g(x) = f(2x)$ ist gegenüber $f(x)$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in Richtung Ursprung gestaucht. Den Funktionswert, den f an der Stelle x_0 annimmt, nimmt g schon an der Stelle $\frac{x_0}{2}$ an. Die Steigungen an entsprechenden Stellen verdoppeln sich.

$$g'(\tfrac{x_0}{2}) = 2f'(x_0)$$

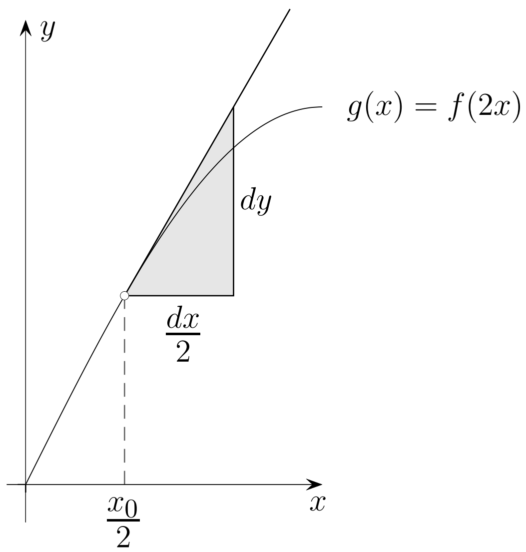
$$\Longrightarrow \quad g'(x) = 2\,f'(2x), \qquad \text{setze } x = \tfrac{x_0}{2}. \qquad \text{Allgemein gilt: } \big(f(kx)\big)' = f'(kx) \cdot k$$

Ableitung von $f(2x)$





$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$



$$g'(\frac{x_0}{2}) = \frac{2\,dy}{dx} = f'(x_0) \cdot 2$$

Der Graph von $g(x) = f(2x)$ ist gegenüber $f(x)$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in Richtung Ursprung gestaucht. Den Funktionswert, den f an der Stelle x_0 annimmt, nimmt g schon an der Stelle $\frac{x_0}{2}$ an. Die Steigungen an entsprechenden Stellen verdoppeln sich.

$$g'(\tfrac{x_0}{2}) = 2f'(x_0)$$

$\Longrightarrow \quad g'(x) = 2\,f'(2x), \qquad$ setze $x = \frac{x_0}{2}$. $\qquad$ Allgemein gilt: $\big(f(kx)\big)' = f'(kx) \cdot k$

Produktregel

Leite ab.

a) $f(x) = x^2 e^{-4x}$

b) $f(x) = x\, e^{-x^2}$

c) $f(x) = (x^2 - 5)(x^2 + 5)$

d) $f(x) = x^2 \sin x$

e) $f(x) = x \cdot \cos 2x$

f) $f(x) = \sin x \cos x$

Lösungen

a) $f'(x) = 2x(1 - 2x)\, e^{-4x}$

b) $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

c) $f'(x) = 4x^3$

d) $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

e) $f'(x) = \cos(2x) - 2x \sin(2x)$

f) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

Nicht immer, wenn wir einen Punkt sehen, der auf ein Produkt hinweist, ist für die Ableitung die Produktregel anzuwenden. Häufig erfolgt eine Produkt-Schreibweise ohne Punkt.

Die 5 im Funktionsterm von

$$f(x) = 5 \cdot e^{-x}$$

kann als konstante Funktion $g(x) = 5$ gesehen werden.
Die Ableitung von f wäre mit der Produktregel möglich,

$$f'(x) = 0 \cdot e^{-x} + 5 \cdot e^{-x}(-1) = -5 \cdot e^{-x}.$$

Besser wäre jedoch, die 5 als konstanten (Streck-)Faktor zu sehen, der bei der Ableitung erhalten bleibt (die Ableitung von e^{-x} wird auch mit dem Faktor 5 gestreckt, Regel für einen konstanten Faktor).

$$f'(x) = 5 \cdot \left(e^{-x}\right)' = 5 \cdot e^{-x}(-1) = -5 \cdot e^{-x}$$

Um $f(x) = 2 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$ abzuleiten,
wird man auch nicht dreimal die Produktregel bemühen,
sondern notiert unmittelbar $f'(x) = 6 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 3$.

Es zeugt von mathematischer Kompetenz, mögliche kurze Wege zu erkennen.