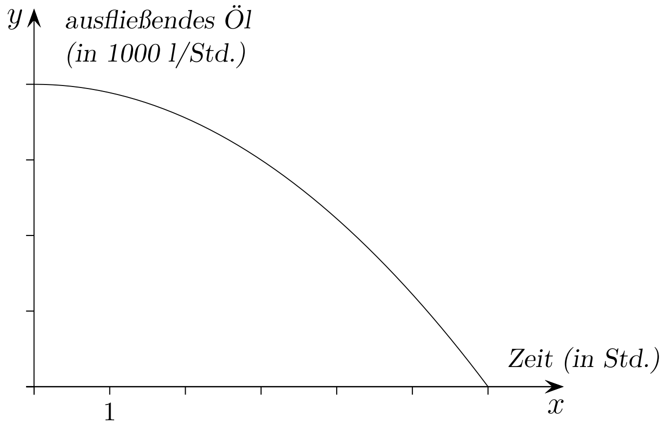
Integration Ölpest

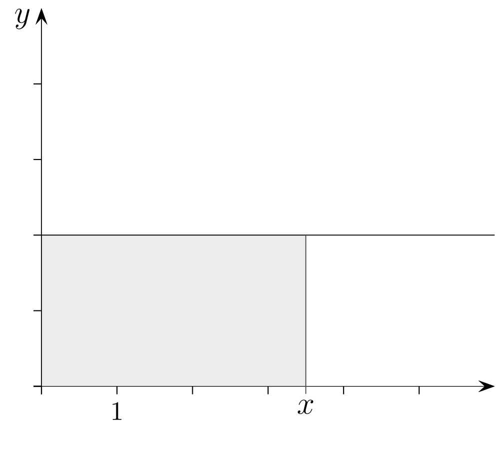
Kaum haben wir uns ins Amt für Umweltschutz versetzen lassen, läuft ein Tanker auf Grund und wir sollen die Menge des ausgeströmten Öls berechnen. (Dabei hatten wir gedacht, wir könnten in der Sonne liegen und Frösche zählen.)

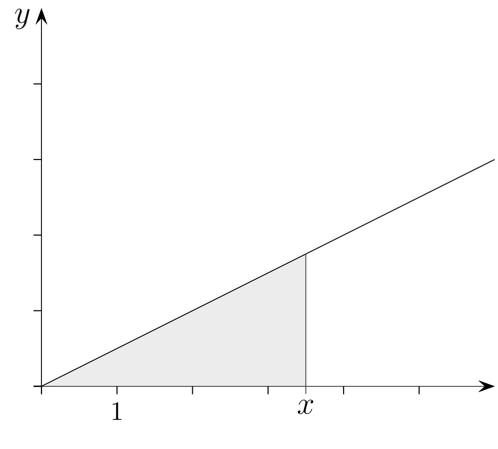


Irgendwie könnte das Problem mit der Berechnung einer Fläche zusammenhängen.
Ob das wohl stimmt? (Warum hat man uns in der Schule nicht gesagt, wie wichtig die Mathematik ist? Dann hätten wir auch besser aufgepasst.) Auch wenn wir den Ehrgeiz haben, das Problem exakt zu lösen, für eine Pressemitteilung wird eine Schätzung genügen.

Sehen wir uns nun zuerst die Flächenberechnung an einigen einfachen Beispielen an.
Vielleicht bringt das was.

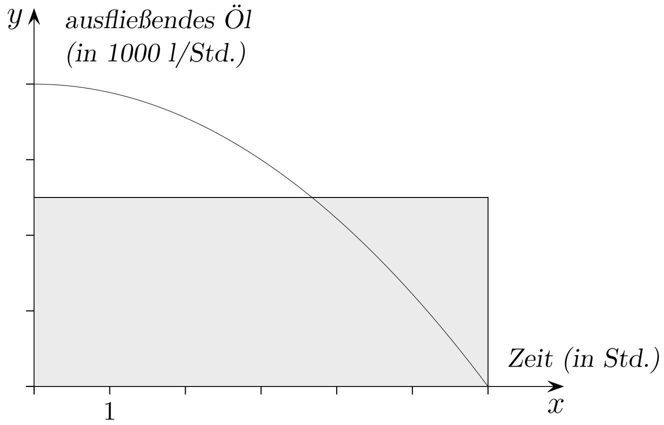
Wie groß ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen in den Grenzen von 0 bis x?
Es wird uns nicht überfordern, die Inhaltsfunktion $A(x)$ zu ermitteln und grafisch darzustellen.

a) 

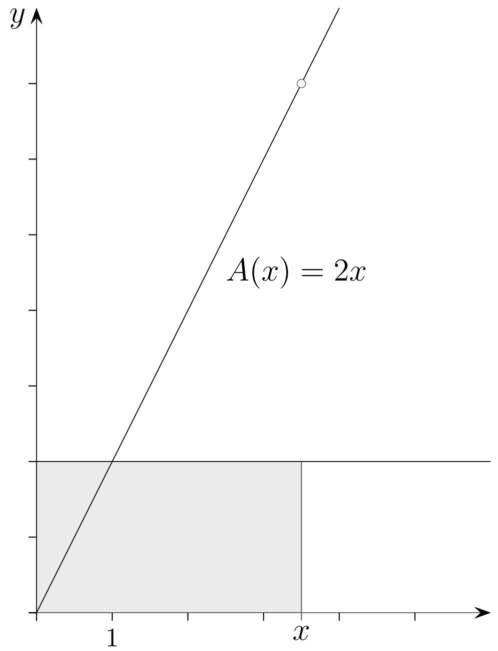
b) 

Integration Ölpest

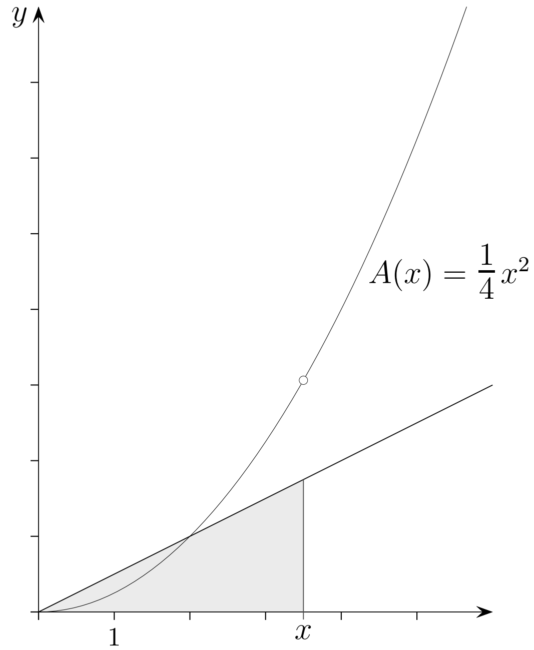
Wenn wir die ausfließende Ölmenge pro Stunde als konstant annehmen,
erhalten wir eine Schätzung: 15000 l.
Für eine genauere Schätzung müsste die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 4$
(aus $f(0) = 4$ und $f(6) = 0$) aufgestellt werden und eine feinere Rechteckunterteilung vorgenommen werden.



a)

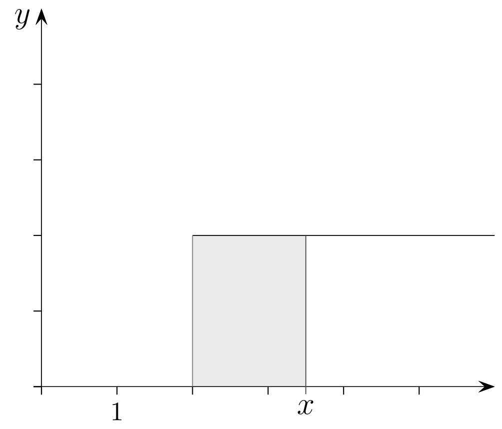


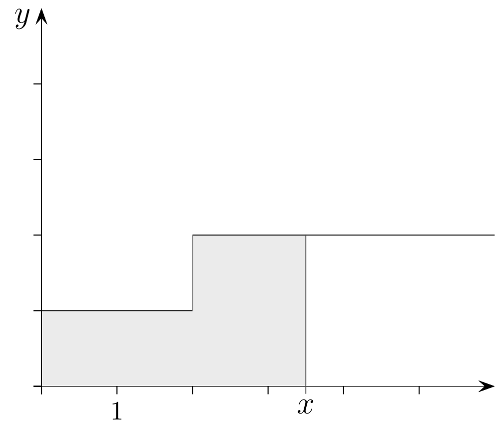
b)

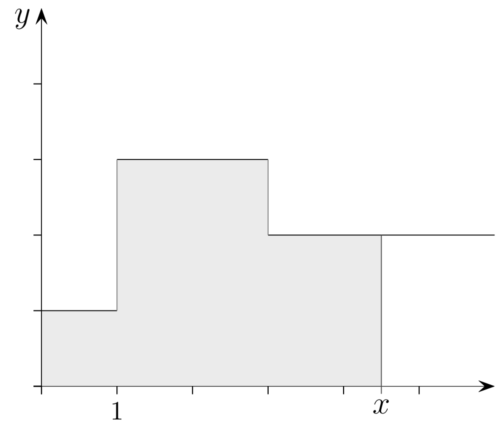


Integration

Zeichne den Graphen der Flächeninhaltsfunktion (Integralfunktion) $A(x)$.

c)


d)


e)


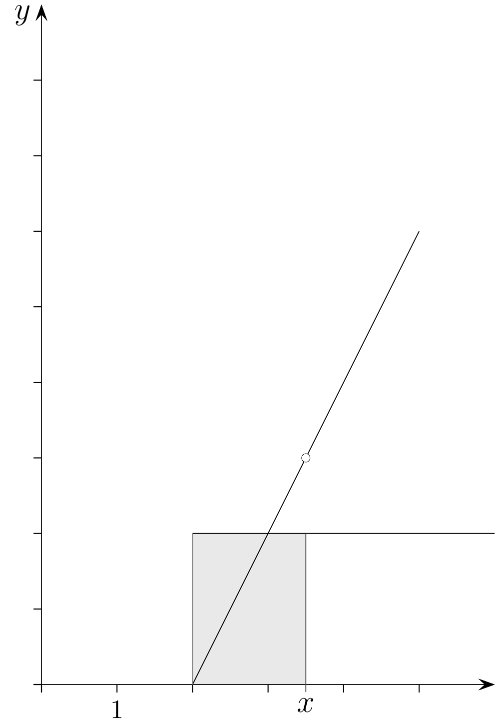
Von der Änderung zum Bestand

Bei Anwendungen ist häufig die Änderungsratenfunktion gegeben, denke an Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit oder an einen zeitlich variierenden Zu- und Abfluss (negativer Zufluss) eines Wasserbeckens und es ist die Bestandsfunktion gesucht, also die Funktion, die den zurückgelegten Weg oder das Wasservolumen im Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Die Änderungsrate - hier betrachten wir die momentane bzw. lokale - ist an der Einheit, z. B. km pro h, ℓ pro min, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ usw., zu erkennen.

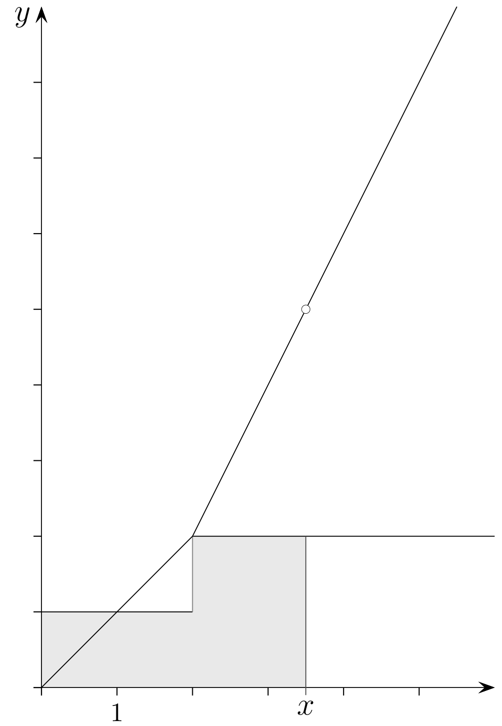
Die Formulierung der Aufgabenstellung: *Rekonstruieren Sie den Bestand und zeichnen Sie die Bestandsfunktion* erinnert daran, dass in der Differenzialrechnung zu gegebener Bestandsfunktion die Änderungsratenfunktion durch Ableiten ermittelt wurde.

Zu beachten ist, dass der Bestand zur Zeit $t = 0$ nicht null sein muss.

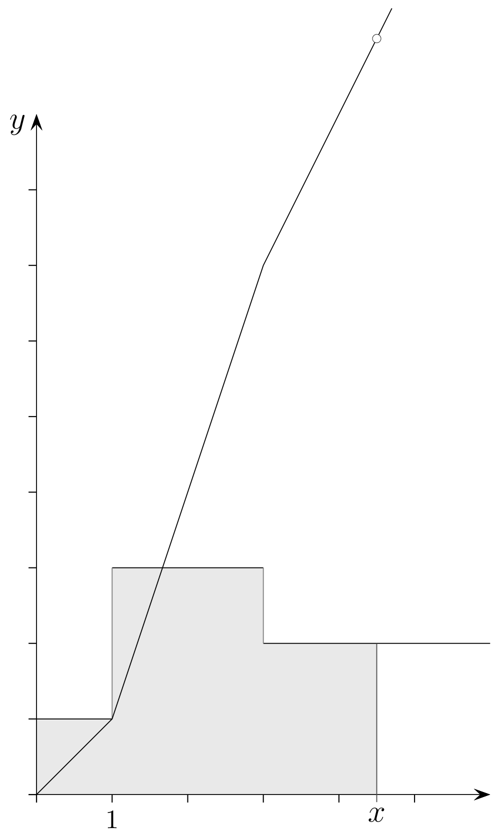
c)



d)

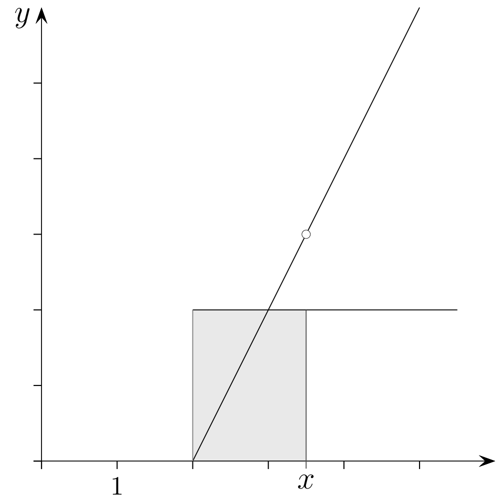


e)



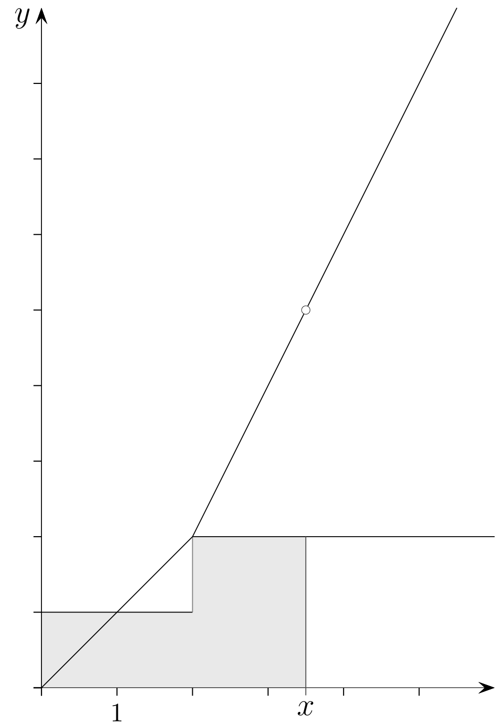
Integration

c)

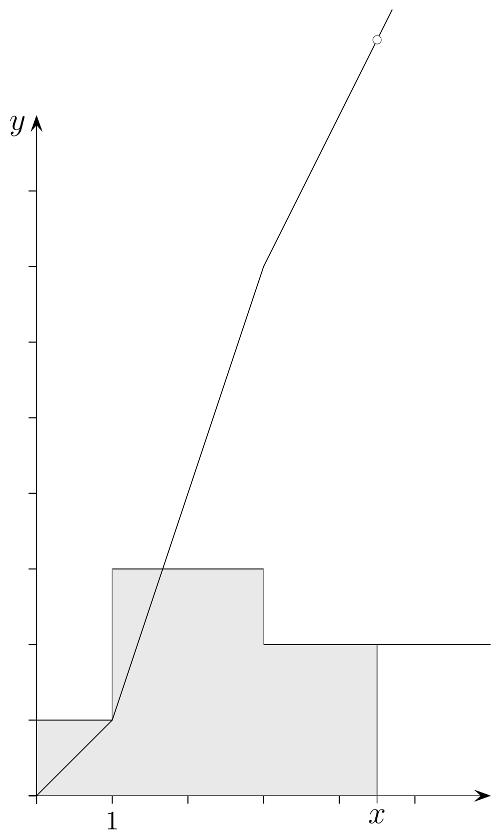


$$A(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 2 \\ 2(x-2) & x \ge 2 \end{cases}$$

d)



e)

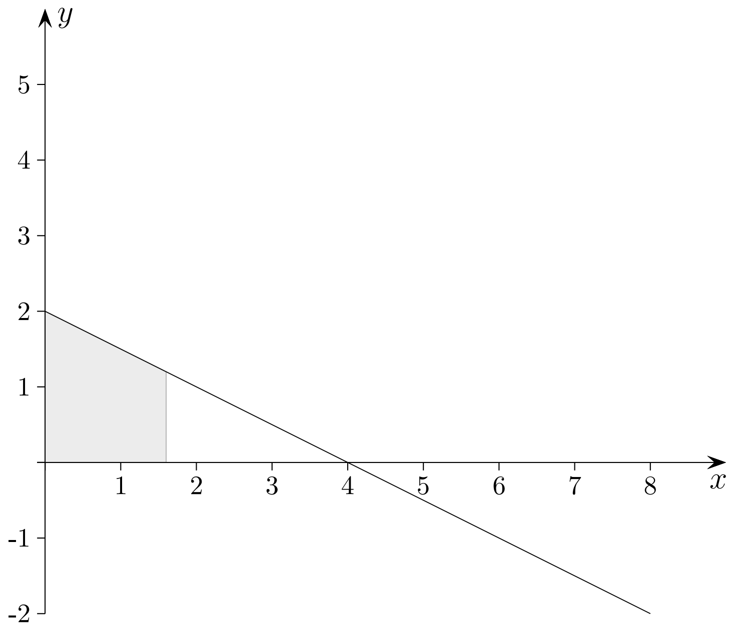


$$A(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 2 \\ 2(x-2)+2 & x \ge 2 \end{cases}$$

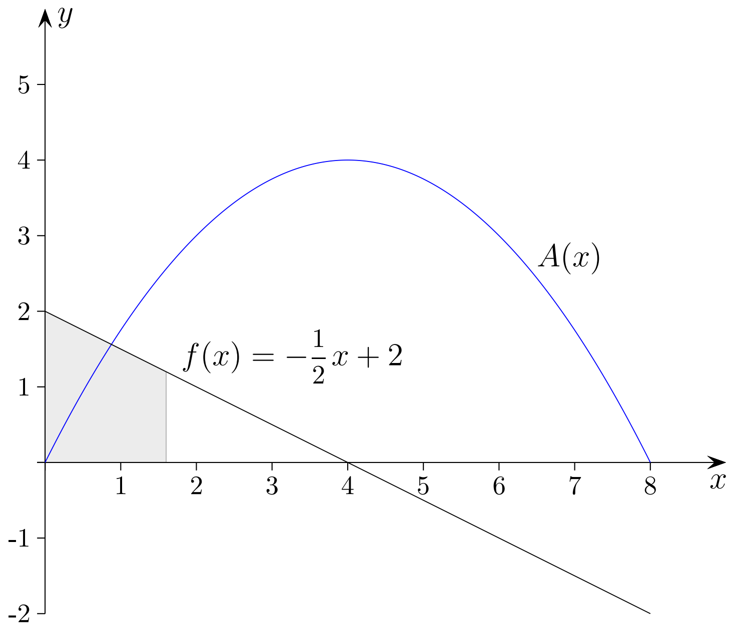
$$A(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 3(x-1)+1 & 1 \le x < 3 \\ 2(x-3)+7 & x \ge 3 \end{cases}$$

Für das weitere Verständnis ist das Ermitteln der abschnittsweise definierten Funktionen nicht erforderlich.

Skizziere den Graphen der Flächeninhaltsfunktion (Integralfunktion) $A(x)$ auf dem Intervall $[0; 8]$ und ermittle den Funktionsterm von $A(x)$.



Skizziere den Graphen der Flächeninhaltsfunktion (Integralfunktion) $A(x)$ auf dem Intervall $[0;\, 8]$ und ermittle den Funktionsterm von $A(x)$.



Der Graph von f ist punktsymmetrisch zu $\big(4 \mid 0\big)$.
$A(x)$ hat daher die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$ und das Maximum an der Stelle $x = 4$.

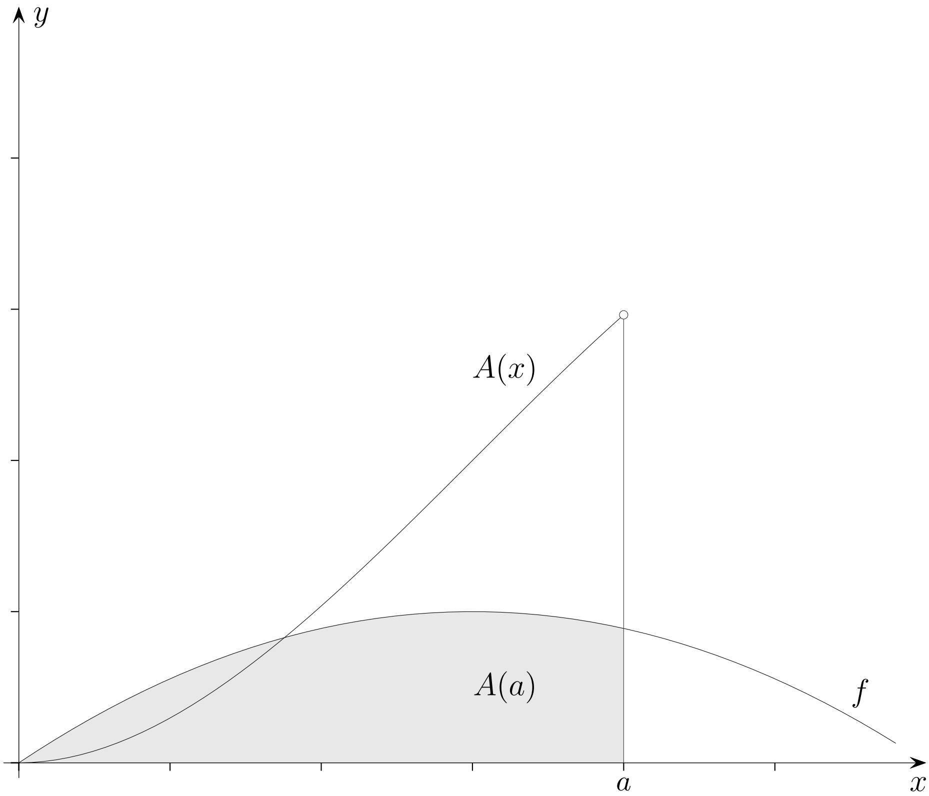
$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2}\big(2 + f(x)\big) \cdot x && \text{Trapezinhalt} \\ &= \frac{1}{2}\big(4 - \frac{1}{2}x\big) \cdot x \\ &= \frac{1}{4}(8 - x)x && \text{Nullstellen sind erkennbar} \\ &= -\frac{1}{4}x^2 + 2x && \text{auf dem Intervall } [0;\, 4] \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt $A(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ auch auf dem Intervall $[4;\, 8]$.
Das wird rechnerisch verifiziert.

$$\begin{aligned} A(x) &= 4 - \frac{1}{2}(x - 4) \cdot \big(-f(x)\big) && \text{Dreiecksinhalt wird subtrahiert} \\ &= 4 + \frac{1}{2}(x - 4)\big(-\frac{1}{2}x + 2\big) && = 4 - \frac{1}{4}(x - 4)^2 \\ &= \ldots \\ &= -\frac{1}{4}x^2 + 2x && \text{auf dem Intervall } [4;\, 8] \end{aligned}$$

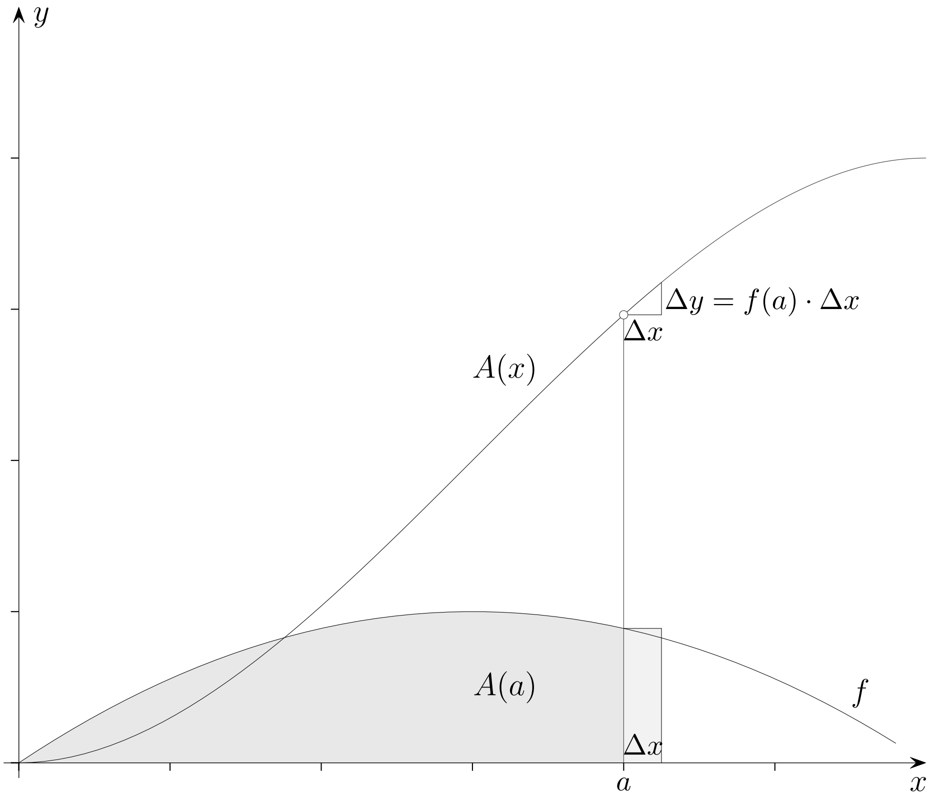
Zusammenhang entdecken

Nehmen wir an, dass $A(x)$ bis zur Stelle $x = a$ den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f erfasst. Wie verläuft $A(x)$ weiter?



Zusammenhang entdecken

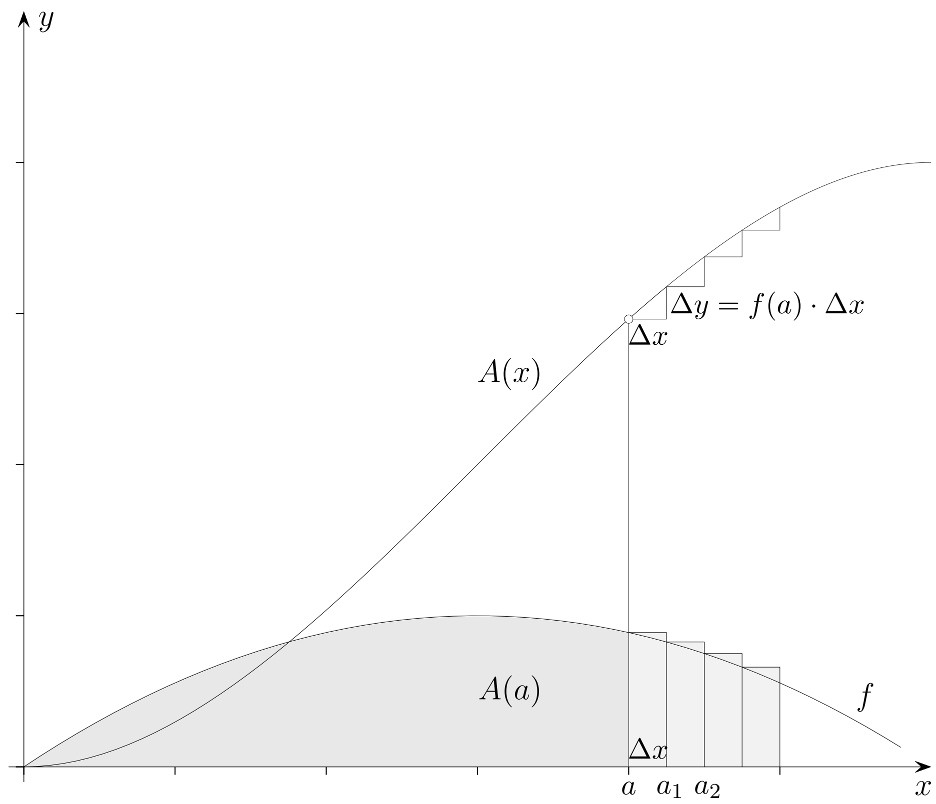
Nehmen wir an, dass $A(x)$ bis zur Stelle $x = a$ den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f erfasst. Wie verläuft $A(x)$ weiter?



Δx sei hinreichend klein.
Der Zuwachs von $A(x)$ an der Stelle $x = a$ (genauer $\Delta y = A(a + \Delta x) - A(a)$)
beträgt $\approx f(a) \cdot \Delta x$, dem Inhalt des gezeichneten Rechtecks.
$A(x)$ hat an der Stelle $x = a$ somit die Steigung $f(a)$.
Die Stelle a ist beliebig, daher gilt $A'(x) = f(x)$.

Zusammenhang entdecken

Nehmen wir an, dass $A(x)$ bis zur Stelle $x = a$ den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f erfasst. Wie verläuft $A(x)$ weiter?



Δx sei hinreichend klein.
Der Zuwachs von $A(x)$ an der Stelle $x = a$ (genauer $\Delta y = A(a + \Delta x) - A(a)$)
beträgt $\approx f(a) \cdot \Delta x$, dem Inhalt des gezeichneten linken Rechtecks.
$A(x)$ hat an der Stelle $x = a$ somit die Steigung $f(a)$.
Die Stelle a ist beliebig, daher gilt $A'(x) = f(x)$.

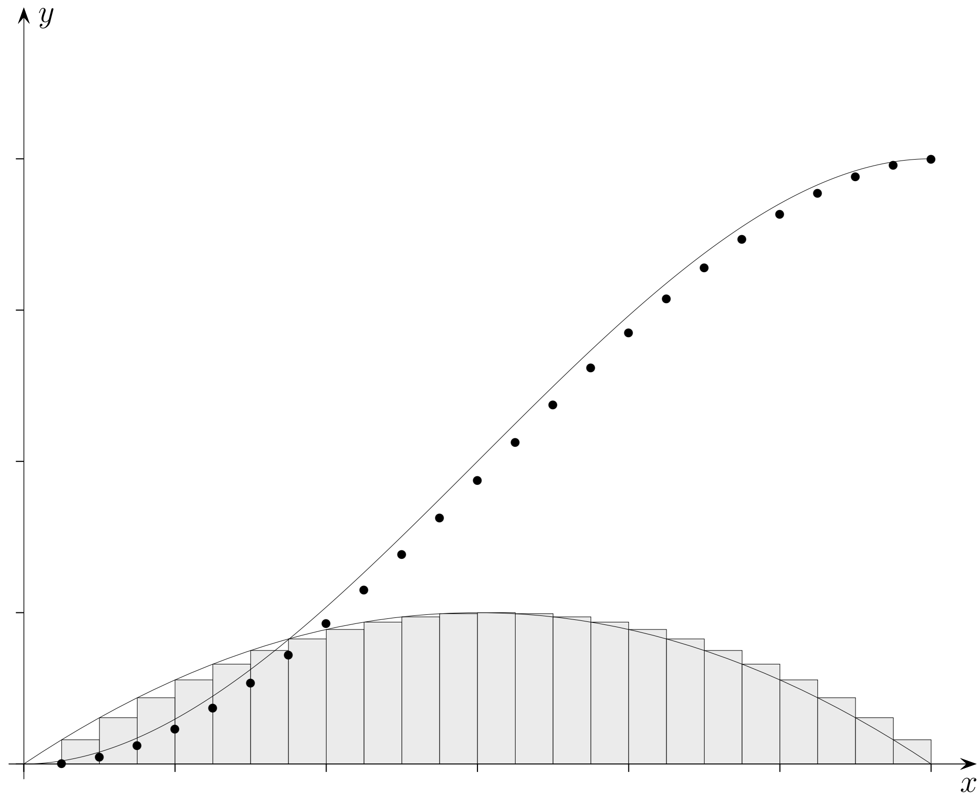
GTR

\Y$_1$ = -1/9∗X∗(X−6)
\Y$_2$ = fnInt(Y$_1$, X, 0, X) fnInt(Y$_1$, Variable, linke Grenze, rechte Grenze)

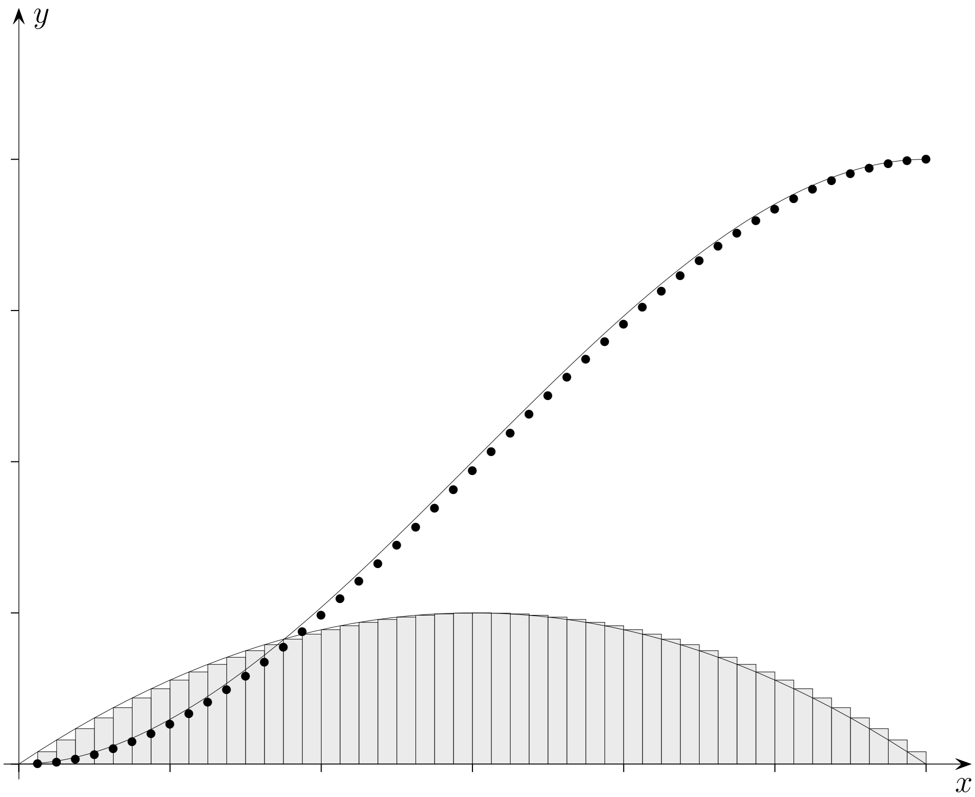
Dieser GTR-Befehl ist geeignet, um ein Verständis für Inhalts- (Bestands-)Funktionen zu vermitteln. Deren Ableitung dürfte überraschend sein.

Zusammenhang

Erläutere die Grafik.



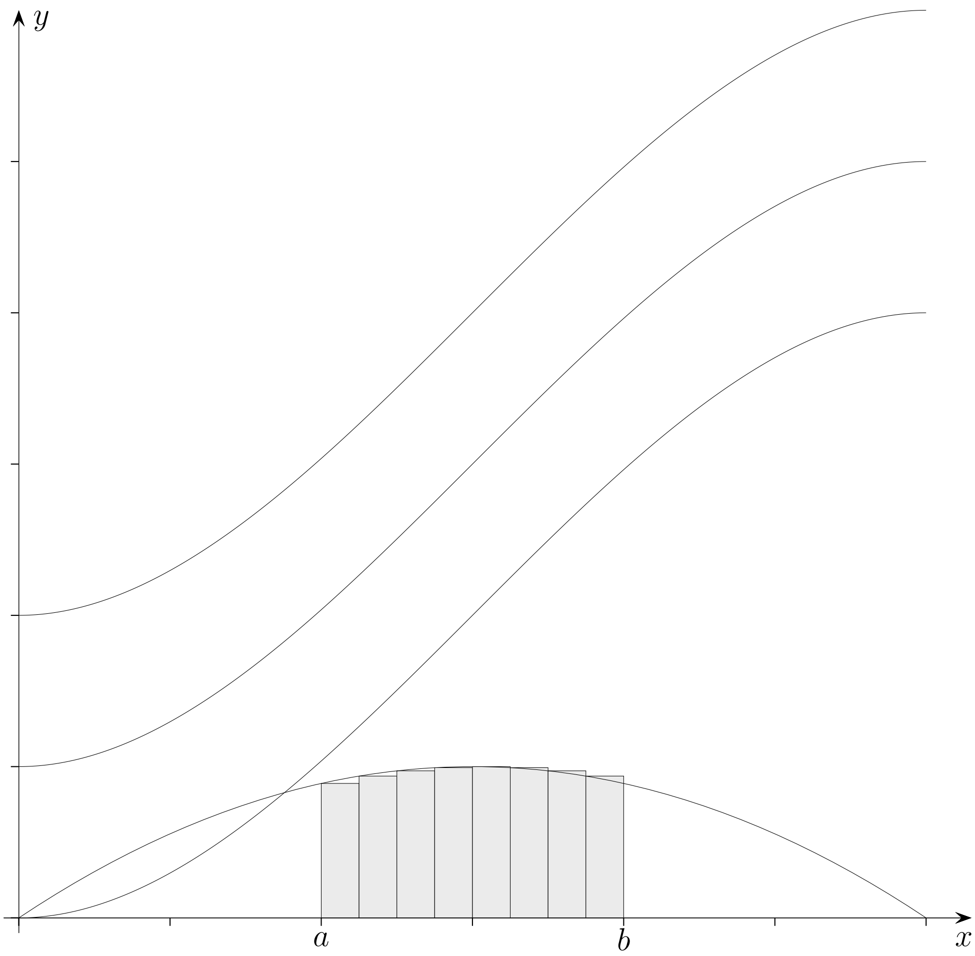
Zusammenhang



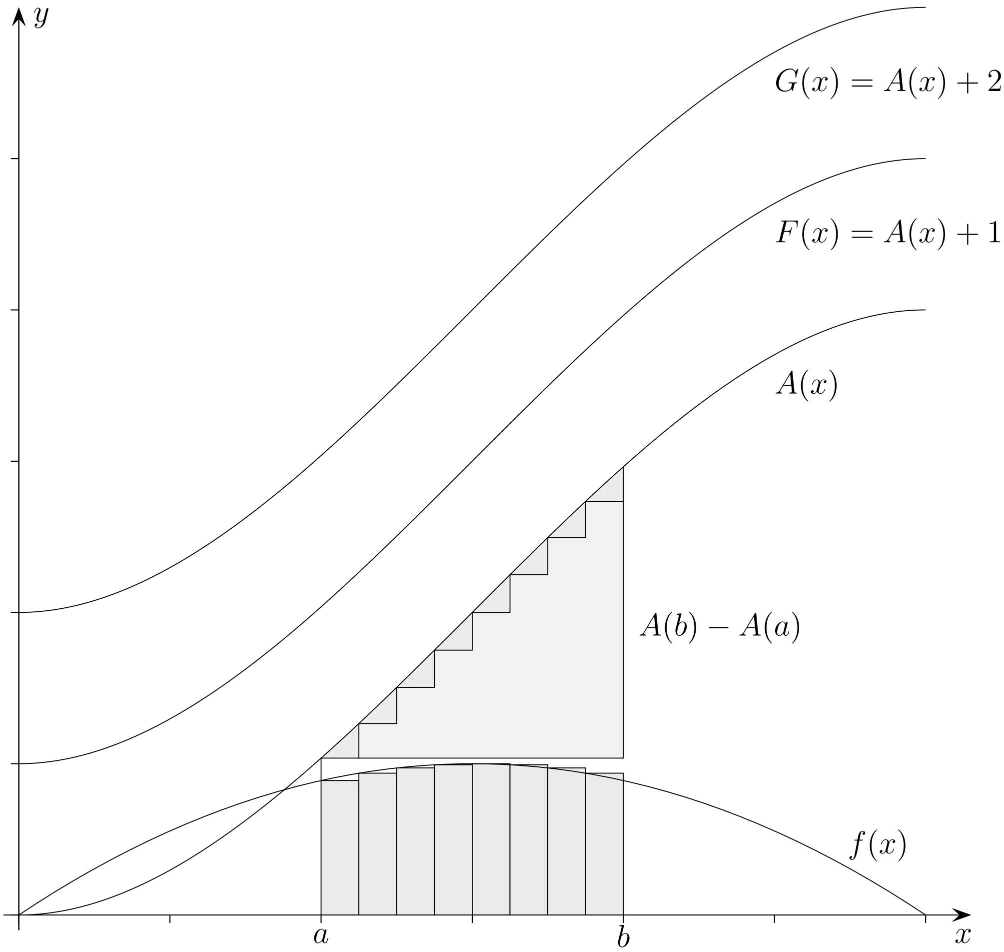
Die Punkte stellen die Summe der Rechteckinhalte von 0 bis x dar.

Integral- (Inhalts-) und Stammfunktion

Erläutere die Grafik.



Integral- (Inhalts-) und Stammfunktion



Eine Funktion F heißt Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion f, wenn $F'(x) = f(x)$ ist.
Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um einen konstanten Summanden C.
Bei Fragestellungen, bei denen von der Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, muss diese Konstante C dem Anfangsbestand angepasst werden.

Zur Flächenberechnung kann eine beliebige Stammfunktion (vorzugsweise $C = 0$) verwendet werden, da die Differenz $F(b) - F(a)$ stets mit $A(b) - A(a)$ übereinstimmt, da C herausfällt.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Eine Integralfunktion $A(x)$ erfasst den Flächeninhalt auf dem Intervall $[0, x]$, $A(0) = 0$.
Grundsätzlich hätte die linke Grenze 0 auch anders gewählt werden können.
Die Integralfunktionen sind Stammfunktionen mit (mindestens) einer Nullstelle.
Eine Nullstelle u ist dann die linke Grenze des Integrationsintervalls $[u, x]$, $A(u) = 0$.

Funktion f	1	x	x^2	x^3	x^4	x^n
Fläche unter f von 0 bis x	Rechteck	Dreieck	Fl. unter Parabel			
Flächeninhalt	$\frac{x}{1}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Im 17. Jh. war dieser Zusammenhang bereits Fermat und Wallis vor Newton und Leibniz bekannt.

GeoGebra, Bestandsfunktion, Untersumme, usw.
Startseite