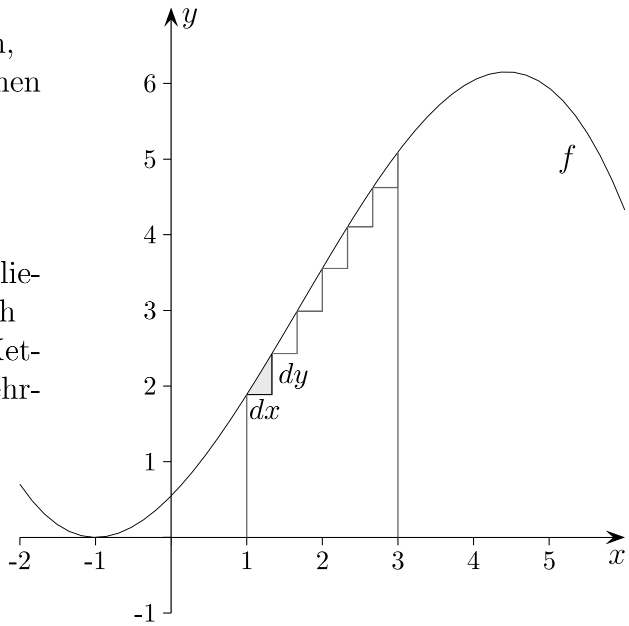
1. Leibniz' Kalkül Kurzfassung
2. Prioritäts- und Plagiatsstreit Newton/Leibniz
3. Leibniz calculus differentialis und calculus integralis
4. Mit der Lupe betrachtet Differentiale
5. Leibniz calculus differentialis auch Produktregel
6. Leibniz calculus differentialis Quotientenregel
7. Ableitung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$
8. Ableitung von $\tan\alpha$, Kalkül
9. Bemerkungen zur Didaktik
10. Tangentensteigung als Grenzwert
11. Grenzwert

↑ Leibniz' Kalkül

Im 17. Jahrhundert entdeckten Gregory, Barrow (Lehrer von Newton), Newton und Leibniz den Zusammenhang von Tangenten- und Flächenbestimmungen. Es entstand eine einheitliche Theorie zur Berechnung von Volumen, Schwerpunkten, Bogenlängen, Oberflächen usw. Zuvor konnten viele derartige Einzelprobleme von den Mathematikern Cavalieri, Roberval, Fermat, Huygens, Wallis und Descartes und weiteren gelöst werden.

Dass Leibniz' *calculus differentialis et integralis*[1] so erfolgreich war, liegt nicht zuletzt an den glücklichen, nach langem Überlegen und Probieren 1675 gefundenen Bezeichnungen wie

$$\frac{dy}{dx}, \qquad \int y\,dx, \qquad \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int dy, \qquad \int dy = y,$$



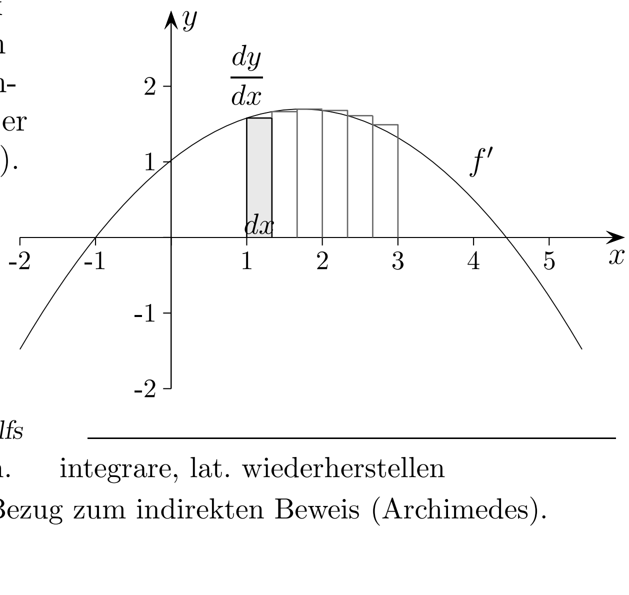
mit denen sich die Regeln des Kalküls einfach formulieren und handhaben lassen - und außerdem auch noch fast als selbstverständlich erscheinen, wie z. B. die Kettenregel oder die Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Leibniz rechnete vorteilhaft mit Differentialen wie dx, dy. Sie dienen der Approximation und können so klein (infinitesimal) gewählt werden, dass jeder vorgegebene Fehler ϵ unterschritten wird.[2] Für zwei Größen A und B mit $A = B + \epsilon$ folgt dann $A = B$.

Für Leibniz legten Differentiale "den eigentlichen Quell der Entdeckung frei". Eine unveröffentlichte Fehlerabschätzung für glatte Funktionen - und nur die gab es - wurde 1949 in seinen Aufzeichnungen gefunden.

Mit dieser Methode entwickelte sich die Mathematik rasant weiter. Neue Gebiete der Mathematik wurden entdeckt. Im 18. Jahrhundert, als mathematische Ungereimtheiten auftauchten, dachte man gründlich über das Fundament der Analysis nach (Bolzano, Cauchy).



Entnehme den nebenstehenden Zeichnungen die Leibnizsche Idee der Flächenberechnung.

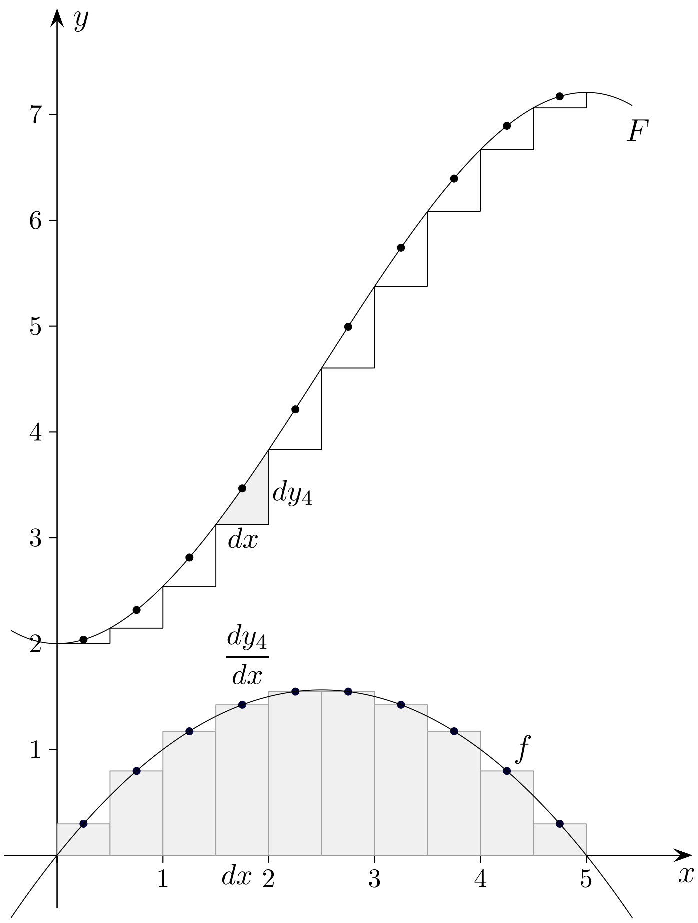
Berechne: $A = \int_0^2 x^2\,dx$

↑ © Roolfs

[1]Differenzieren und Integrieren sind inverse Operationen. integrare, lat. wiederherstellen

[2]Leibniz erwähnt 1702 in einem Brief an Varignon den Bezug zum indirekten Beweis (Archimedes).

↑ Leibniz' Kalkül



F ist eine Stammfunktion von f,

d. h. $\dfrac{dF}{dx} = f$.

Der Inhalt des 1. Rechtecks (ganz links) beträgt $\dfrac{dy_1}{dx} \cdot dx = dy_1$,

der des 2. $\dfrac{dy_2}{dx} \cdot dx = dy_2$, usw.

$A = dy_1 + dy_2 + \ldots + dy_n$ ist die Summe aller Rechteckinhalte, hier $n = 10$.

Sie kann kürzer (mit einem beliebig kleinen Fehler ϵ für entsprechend großes n) als Funktionsdifferenz $A + \epsilon = F(5) - F(0)$ ermittelt werden.

Der Inhalt der Fläche unter einem Graphen kann als Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion an der Stelle der rechten und linken Grenze bestimmt werden.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Leibniz-Notation:

$$A = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int dy = y$$

Integrationsgrenzen entfallen.
y ist hier der Funktionswert F(rechte Grenze).
Die Stammfunktion beginnt im Ursprung.

↑ Prioritäts- und Plagiatsstreit Newton/Leibniz

um 1664 Barrow (1630-1677) und zuvor Gregory (1638-1675) erkennen den Zusammenhang von Tangentenproblem und Flächenberechnung. Barrow leitet in den *Lectiones geometricae* 1670 u.a. Gleichwertiges zur Produkt- und Quotientenregel und den Hauptsatz geom. ab.
Wegbereiter für die Analysis waren unter anderem: Bonaventura Cavalieri (1598-1647)
René Descartes (1596-1650)
Pierre de Fermat (1607-1665)
John Wallis (1616-1703)
Blaise Pascal (1623-1662)

1665-1666 Newton entwickelt ausgehend von der Untersuchung von Momentangeschwindigkeiten und Änderungsraten die Fluxionsrechnung. Newton nennt die Ableitung Fluxion.

1672 Leibniz beschäftigt sich in Paris mit seinem Mentor Huygens intensiv mit Mathematik.

1673 Leibniz besucht zum ersten Mal für zwei Monate die Royal Society in London und wird deren Mitglied. Seine vorgeführte Rechenmaschine aus Holz funktioniert nicht einwandfrei.[1]
Die vorgelegten Ergebnisse über unendliche Reihen stellen sich als bekannt heraus.
Er wird des Plagiats bezichtigt. Leibniz erwirbt die genannte Schrift von Barrow, einem Lehrer von Newton, und die Schrift *Exercitationes geometricae* von Gregory.
Londoner Mathematiker sind in Newtons Methoden eingeweiht.

1675 Leibniz entwickelt in Paris vom Tangentenproblem ausgehend den Infinitesimalkalkül.
Viele Ergebnisse stimmen mit der Fluxionsrechnung überein. Aufgrund der geschickten Bezeichnungen lassen sich Regeln einfacher handhaben und erscheinen leicht verständlich.

1676 Leibniz besucht zum zweiten Mal London und erhält Einsicht in Newtons Arbeiten.

1677 Im kurzen Briefwechsel mit Newton führt Leibniz Ideen seiner Differenzialrechnung aus.

1684 Leibniz publiziert seine Ableitungsmethode samt Regeln, die über Bekanntes (Fermat, Sluse) hinausgehen, 1686 folgt die Integralrechnung. Später wird Leibniz des Plagiats beschuldigt.

1687 Newton erwähnt kurz die Fluxionsrechnung in seinem Werk *Philosophiae naturalis principia mathematica*. 1693 und 1704 folgen weitere Veröffentlichungen.

1712 Eine Kommission der Royal Society (Präsident Newton) kommt zu dem Ergebnis, dass Newton als Erster den *calculus* erfunden hat (first inventor). Die Behauptung, Leibniz habe nur den Namen und die Schreibweise geändert, bleibt unwidersprochen.

1713 Johann Bernoulli versucht Leibniz zu Unrecht davon zu überzeugen, dass Newton zur vollständigen Methode seiner Fluxionsrechnung erst nach der Publikation der Differentialrechnung (1684) gelangt sei (Newton hatte einige seiner Ergebnisse umformuliert).
Die Auseinandersetzung nimmt an Schärfe zu. Rede zieht Widerrede nach sich.
Die Lager beharken sich in Briefen und Veröffentlichungen mit nicht enden wollenden provozierenden Bemerkungen, Unterstellungen und Anschuldigungen.

Newton überlebte Leibniz um über zehn Jahre. Sie sahen sich nie. Im Gegensatz zu Leibniz wurde Newton zu Lebzeiten mit Ehrungen überhäuft. In England wurde die Fluxionsrechnung noch fast 100 Jahre trotzig beibehalten. Auf dem Kontinent entwickelte sich die Mathematik durch Varignon, Jakob und Johann Bernoulli, Euler, d'Alembert, Lagrange und Laplace stürmisch weiter.

[1] Der Nachbau der Universität Hannover 2005 einer Weiterentwicklung von Leibniz löste problemlos 12305897 x 96878532.

Bei physikalischen Anwendungen erwies sich das Rechnen mit Differenzialen dx, dy im Leibniz-Kalkül als vorteilhafter, neuere Schreibweise: $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. Die Newtonschen Bezeichnungen $\dot{x}$, $\ddot{x}$ für Ableitungen werden noch in Zusammenhängen verwendet, in denen die Variable t *(Zeit)* nicht gewechselt wird. Dynamische Vorstellungen und Änderungsraten wurden in der Didaktik ab 2000 verstärkt aufgegriffen.

Es ist nicht bekannt, in welchem Umfang Leibniz während des Londonaufenthalts 1673 von Newtons neuer Mathematik Kenntnis erlangte, da sie mit großer Geheimniskrämerei umgeben war. Spätestens jedoch nach seiner Rückkehr erfuhr Leibniz aus einem Brief von Collins, dem die math. Korrespondenz der Royal Society oblag, dass Newton über eine allgemeine Methode zur Berechnung von Tangenten, Flächeninhalten, Bogenlängen usw. verfügt, ohne dass Einzelheiten genannt wurden. 1675 suchte der Mathematiker Tschirnhaus, der sich zuvor für drei Monate in London aufgehalten und Collins kontaktiert hatte, Leibniz in Paris auf, der im Anschluss daran seine mathematischen Studien intensivierte.
Im Nachhinein war die Geheimhaltung für den math. Fortschritt eher förderlich. Leibniz konnte so nach dem frustrierenden Londonaufenthalt eigenständige Gedanken zur Infinitesimalrechnung entwickeln - Einzelbeispiele für die Beziehung Tangentenproblem/Flächenberechnung lagen vielfältig vor[1] - und den in der Luft liegenden Kalkül in eine noch heute bestehende Form bringen.
Newton zögerte seine Veröffentlichungen hinaus, weil er weiter an den Grundlagen feilte (dem Grenzwertbegriff kam er dabei recht nahe) und sich für Unvollständiges keiner Kritik aussetzen wollte. Leibniz veröffentlichte seinen Kalkül mit Beispielen ohne Begründungen. Seine Manuskripte belegen jedoch, dass er bereits die ϵ-δ-Methode (Bolzano 1817, Cauchy 1820, Weierstrass 1861) antizipiert hatte.

Collins gewährte Leibniz 1676 bei dessen zweitem Besuch in London Einblick in einige Dokumente Newtons (der das missbilligt hätte). Dieser Umstand nährte den späteren Plagiatsvorwurf. Für die englische Seite nicht erkennbar hatte Leibniz bis zu diesem Zeitpunkt jedoch die wesentlichen Teile seines Infinitesimalkalküls gefunden.

Für Newton war Leibniz “a second inventor“. “Second inventors have no right. Whether Mr Leibniz found the Method by himself or not is not the Question ... “
“To take away the Right of the first inventor, and divide it between him and that other [the second inventor], would be an Act of Injustice.“

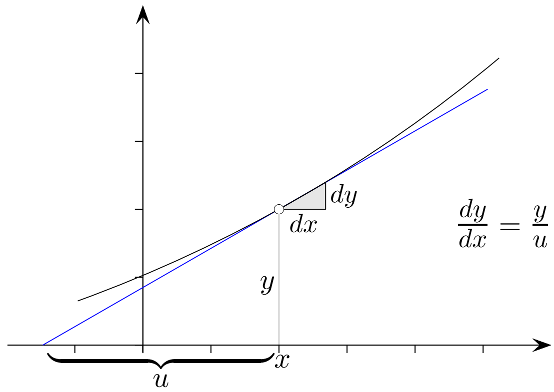
Newton verließ 1696 die Universität, nahm ein Amt an der königlichen Münze an und reformierte das Münzwesen. Der Prioritätsstreit hatte zur Folge, dass es Leibniz verwehrt wurde, seinem Herzog als dessen Bibliothekar - er sollte die Geschichte der Welfen und damit deren Thronansprüche untersuchen - nach London zu folgen, als dieser 1714 den englischen Thron bestieg. Als Leibniz ein Reiseverbot erhielt und dieses ignorierte, wurde er als Bibliothekar abgelöst. Er starb vereinsamt 1716 in Hannover und wurde in kleinstem Kreise beigesetzt. Alle Hofbeamte waren geladen worden, jedoch erschien niemand. Für die Hannoveraner war Leibniz ein Ungläubiger, sie interessierte sein Tod nicht. Ein Nachruf - der einzige - der Académie des Sciences in Paris würdigte Leibniz als großen Wissenschaftler. Sein Nachlass umfasst eine Rechenmaschine und 200 000 beschriebene Seiten, davon 20000 Briefe.

[1] Fermat: $\int_0^a x^n\,dx = \frac{1}{n+1}a^{n+1}$, Gregory: $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a$, Roberval (1602-75): $\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b = \big[-\cos x\big]_a^b$

↑ Leibniz calculus differentialis und calculus integralis

$$
\begin{aligned}
y &= x^3\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx}\\
&= \frac{(x^3+3x^2dx+3x(dx)^2+(dx)^3) - x^3}{dx}\\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

Potenzen der Differentiale, also Fehlerterme, die bei fortschreitender Approximation vernachlässigbar sind, entfallen.



Mit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + \epsilon$ kann für $\Delta x \to 0$ die Tangentensteigung $m_{\text{Tangente}} = 3x^2$ ermittelt werden. Infinitesimale Größen (Differentiale) dx, dy vereinfachen die Schreibweise, d von lat. differentia. Die Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ für die Ableitung verleitet jedoch zu der irreführenden Vorstellung von unendlich kleinen Größen, die es hier nicht gibt[1], siehe 1. Seite zur Art des Schließens. Hilfreich ist die Vorstellung, dass die „unvergleichbar kleinen" Größen (Leibniz inassignabilis lat., unassignable engl. unangebbar, ability Vermögen) eines Steigungsdreiecks so klein gewählt werden, dass die längste Seite mit dem Kurvenverlauf (bis auf einen zu vernachlässigenden Fehler) übereinstimmt. dx ist ein verschwindend kleiner Anteil von x. Der Inhalt einer Fläche unterhalb von y setzt sich aus einer Summe von Infinitesimalen $y\,dx$ zusammen, $\int y\,dx = \sum y\,dx$.

$$
\begin{aligned}
dx^a &= ax^{a-1}dx\\
d(ay) &= a\,dy\\
d(u+v) &= du + dv\\
d(uv) &= u\,dv + v\,du
\end{aligned}
$$

Umkehrung führt zur partiellen Integration $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

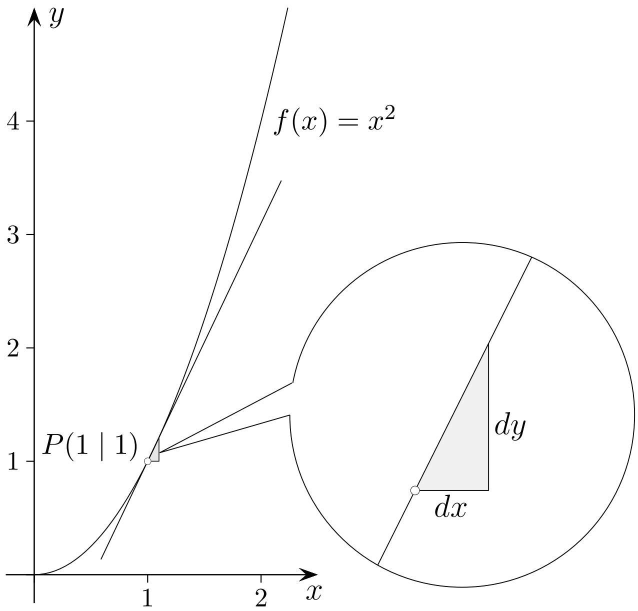
$$
\begin{aligned}
d\,\frac{u}{v} &= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}
\end{aligned}
$$

$\int$ Buchstabe S von Summe, lat. summa

$$
\begin{aligned}
d\sqrt[b]{x^a} &= \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}\,dx\\
d\sin x &= \cos x\,dx\\
\int \frac{dy}{dx}\,dx &= y\\
ds &= \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx\\
s &= \int ds
\end{aligned}
$$

[1] Leibniz erläutert 1676 in seinem grundlegenden, erst im 20. Jh. aufgefundenen Manuskript *De quadratura arithmetica* den Begriff „unendlich klein" und antizipiert das Riemann-Integral. Die Nichtstandardanalysis trägt nicht dazu bei, sich dem Denken von Newton und Leibniz anzunähern.

↑ Mit der Lupe betrachtet



Letztendlich liegt ein linearer (proportionaler) Zusammenhang von dx und dy vor.
Der Proportionalitätsfaktor ist die gesuchte Tangentensteigung.

Newton sprach angesichts $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+dx)^2 - 1}{dx} = 2 + dx$

vom „letzten Verhältnis (hier 2) verschwindender Größen".

Differentiale können so klein gewählt werden, dass der Fehler ϵ, der bei der Berechnung einer Tangentensteigung, einer Bogenlänge, einer krummlinig begrenzten Fläche (z. B. durch Approximation mit einer geradlinig begrenzten treppenförmigen Fläche) entsteht, kleiner als jede vorgegebene positive Zahl ist, d. h. beliebig klein ist. Differentiale können dann in einem Abstraktionsschritt als feste Rechengrößen mit speziellen Regeln aufgefasst werden.
Die Summanden von ϵ, z. B. Potenzen und Produkte von Differentialen, werden weggelassen, das Gleichheitszeichen beibehalten. Ein Grenzwertprozess wird in dieser Weise berücksichtigt.
Ohne dass tieferes Verständnis erforderlich wäre (ganz im Sinne von Leibniz), können mit dieser Methode (Kalkül) Ergebnisse erzielt werden. Das trug zur raschen Ausbreitung bei.

Newton erläuterte 1686:
„Quantities, and also ratios of quantities, which in any finite time constantly tend to equality, and which before the end of that time approach so close to one another that their difference is less than any given quantity, become ultimately equal.

If you deny this, let them become ultimately unequal, and let their ultimate difference be D. Then they cannot approach so close to equality that their difference is less than the given difference D, contrary to the hypothesis."

↑

Für den holländischen Mathematiker Nieuwentijt (1654-1718) war eine infinitesimale Größe eine Größe, die kleiner als jede andere endliche Größe ist. Leibniz widersprach.

↑ Leibniz calculus differentialis

Leibniz 1695:
Außerdem denke ich, dass nicht nur die Dinge gleich sind, deren Unterschied absolut Null ist, sondern auch die, deren Unterschied unvergleichlich klein ist. Und obwohl dieser [Unterschied] nicht absolut Nichts genannt zu werden braucht, ist er auch keine Größe, die mit denen vergleichbar ist, deren Unterschied er ist.

$$\begin{aligned}
y &= x^4 \\
y + dy &= (x+dx)^4 && \text{Wir vergößern } x \text{ und } y \text{ ein wenig.} \\
&= x^4 + 4x^3dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4 \\
&= x^4 + 4x^3dx && \text{Differentiale höherer Ordnung entfallen.} \\
dy &= 4x^3dx && y = x^4 \text{ wird subtrahiert.} \\
\frac{dy}{dx} &= 4x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= x^5 \\
y + dy &= (x+dx)^5 \\
&= x^5 + 5x^4dx + 10x^3(dx)^2 + 10x^2(dx)^3 + 5x(dx)^4 + (dx)^5 \\
&= x^5 + 5x^4dx; \\
dy &= 5x^4dx \\
\frac{dy}{dx} &= 5x^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= u \cdot v && u \text{ und } v \text{ sind Funktionen von } x. \\
y + dy &= (u+du) \cdot (v+dv) \\
&= u \cdot v + u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv \\
&= u \cdot v + u \cdot dv + v \cdot du && \text{Differential } du \cdot dv \text{ entfällt.} \\
dy &= u \cdot dv + v \cdot du && y = u \cdot v \text{ wird subtrahiert.} \\
\frac{dy}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} && \text{Produktregel 1675}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dx^n &= (x+dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + \ldots \text{ (Differentiale höherer Ordnung)} \\
&= nx^{n-1}dx
\end{aligned}$$

↑ Leibniz calculus differentialis

Quotientenregel 1676

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{u}{v} \\
y + dy &= \frac{u + du}{v + dv} \\
&= \frac{u}{v} + \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2} \qquad\qquad \text{siehe Division} \\
dy &= \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2} \\
&= \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
(u + du) : (v + dv) = \frac{u}{v} + \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2} \\
\underline{-\,(u + \frac{u \cdot dv}{v})} \\
\qquad du - \frac{u \cdot dv}{v} \\
\qquad \underline{-\,(du + \frac{du \cdot dv}{v})} \\
\qquad\qquad - \frac{u \cdot dv}{v} - \frac{du \cdot dv}{v} \\
\qquad\qquad \underline{-\,(- \frac{u \cdot dv}{v} - \frac{u \cdot dv \cdot dv}{v^2})} \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{du \cdot dv}{v} + \frac{u \cdot dv \cdot dv}{v^2}
\end{array}
$$

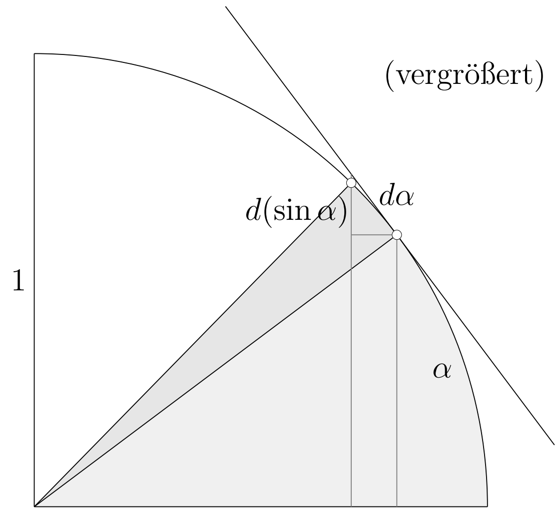
Hier kann die Division abgebrochen werden.
Der Restterm und alle weiteren bestehen aus Differentialen höherer Ordnung.

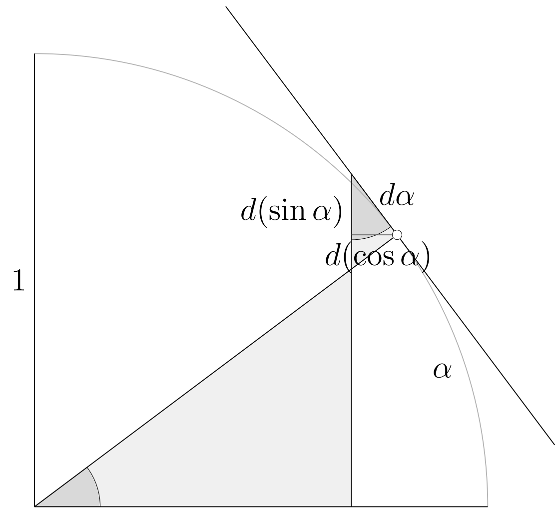
Leibniz entgegnete 1701 auf abwegige Deutungen der Differentiale:
Car au lieu de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donée, de sorte, qu'on ne diffère du stile d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans nôtre méthode et plus conformes à l'art d'inventer.

Denn anstelle des unendlich Kleinen nimmt man die Größen so groß oder so klein wie nötig an, damit der Fehler kleiner ist als jeder angegebene Fehler, so dass man von Archimedes' Stil nur in bezug auf die Ausdrücke abweicht, welche eher auf unsere Methode ausgerichtet sind und mit der Erfindungskunst konform gehen.

In dem Acta-Artikel *Versuch über die Ursachen der Bewegungen der Himmelskörper* erklärte Leibniz 1689 den Begriff *unendlich klein* im Sinne von *unvergleichlich klein*, und zwar so klein, dass der Näherungsfehler vernachlässigbar sei.

↑ Ableitung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$

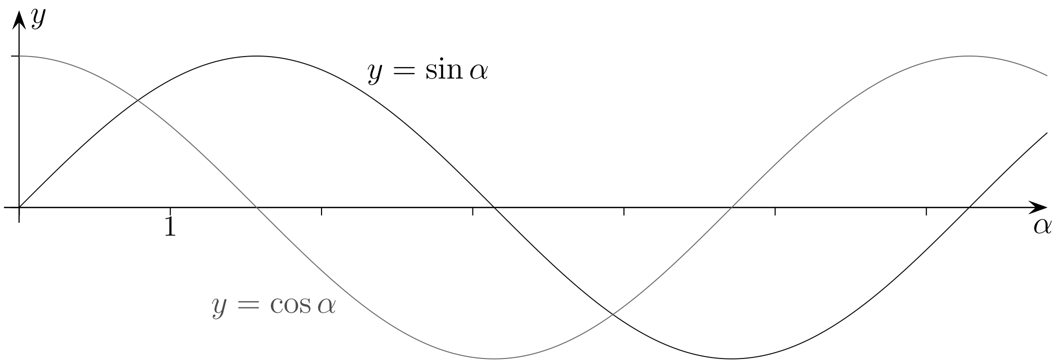




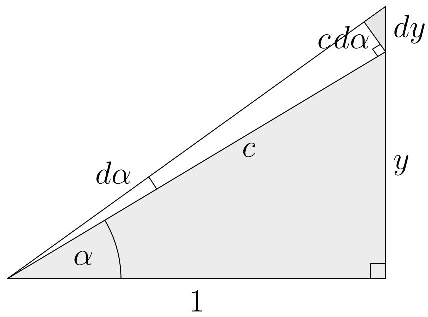
$d(\sin\alpha) = \sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha$
Die Schenkel stehen senkrecht aufeinander (gleiche Winkel, ähnliche Dreiecke).

$$\frac{d(\sin\alpha)}{d\alpha} = \cos\alpha \qquad \text{sowie} \quad d(\cos\alpha) = -(\underbrace{\cos\alpha - \cos(\alpha + d\alpha)}_{\text{pos.}}), \qquad \frac{d(\cos\alpha)}{d\alpha} = -\sin\alpha$$

Summation von $d(\sin\alpha) = \cos\alpha\, d\alpha$ führt zur Flächenberechnung $\displaystyle\int_a^b \cos\alpha\, d\alpha = \sin b - \sin a$.
Pascal hatte dies bereits 1659 ganz ähnlich hergeleitet.



↑ Ableitung von $\tan\alpha$



$$\begin{aligned}
\frac{dy}{c\,d\alpha} &= \frac{c}{1} \qquad \text{Im Grenzfall } d\alpha \text{ gegen Null sind die grau gefärbten Dreiecke ähnlich.}\\
\frac{dy}{d\alpha} &= c^2 = 1 + y^2\\
(\tan\alpha)' &= 1 + \tan^2\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \tan\alpha\\
\alpha &= \arctan x\\
\frac{d\alpha}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{d\alpha}}\\
&= \frac{1}{1+\tan^2\alpha}\\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Der Kalkül *(Calculus)* besteht aus einem System von allgemein anwendbaren Regeln zur Lösung vielfältiger Infinitesimalprobleme. Aus verstreuten Einzelergebnissen haben Newton und Leibniz allgemeine, außerordentlich leistungsfähige, richtungsweisende Methoden entwickelt. Mit Leibniz' Bezeichnungen werden Zusammenhänge intuitiv widergespiegelt.
Er meinte denn auch, sein Kalkül führe *presque sans meditation* zu Resultaten und enthebe einen der Notwendigkeit, *de travailler avec l'imagination*.

↑ Bemerkungen zur Didaktik

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y + dy &= (x+dx)^2 && \text{Wir vergößern } x \text{ und } y \text{ ein wenig.} \\ &= x^2 + 2x\,dx + (dx)^2 \\ dy &= 2x\,dx && y = x^2 \text{ wird subtrahiert, Differentiale höherer Ordnung entfallen.} \\ \frac{dy}{dx} &= 2x \end{aligned}$$

Bis zum Ende des 17. Jahrhunderts waren x und y noch gleichberechtigt. Diese Sichtweise ist für den Kalkül sehr vorteilhaft. Der funktionale Zusammenhang wurde erstmalig 1698 von Johann Bernoulli erwähnt.
In der 4. Zeile wird statt $\approx$ das Gleichheitszeichen beibehalten, da der Fehler ϵ für kleine dx vernachlässigbar ist. Hier geht die offensichtliche lineare Approximierbarkeit von $y = x^2$ ein (Proportionalitätsfaktor $2x$). Nur die letzte Zeile ist problematisch.
$\frac{dy}{dx}$ kann als Quotient verschwindend kleiner Näherungs-Größen dx und dy $(dx \neq 0)$ gelesen werden (z. B. zweckmäßig beim Aufstellen einer Differenzialgleichung); $\frac{dy}{dx}$ ist zugleich ein neues Symbol für die Tangentensteigung $f'(x)$ als Grenzwert für $dx \to 0$ mit $dx \neq 0$.
Die zu Fehlinterpretationen verleitende, jedoch sehr suggestive Schreibweise wurde beibehalten.
Als 4. Zeile wäre $dy = 2x\,dx + (dx)^2$ möglich und weiter $\frac{dy}{dx} = 2x + dx$. Vermeintlich führt $dx = 0$ zur Tangentensteigung. Wegen dieses scheinbaren Widerspruchs wurde die Methode anfänglich heftig kritisiert.

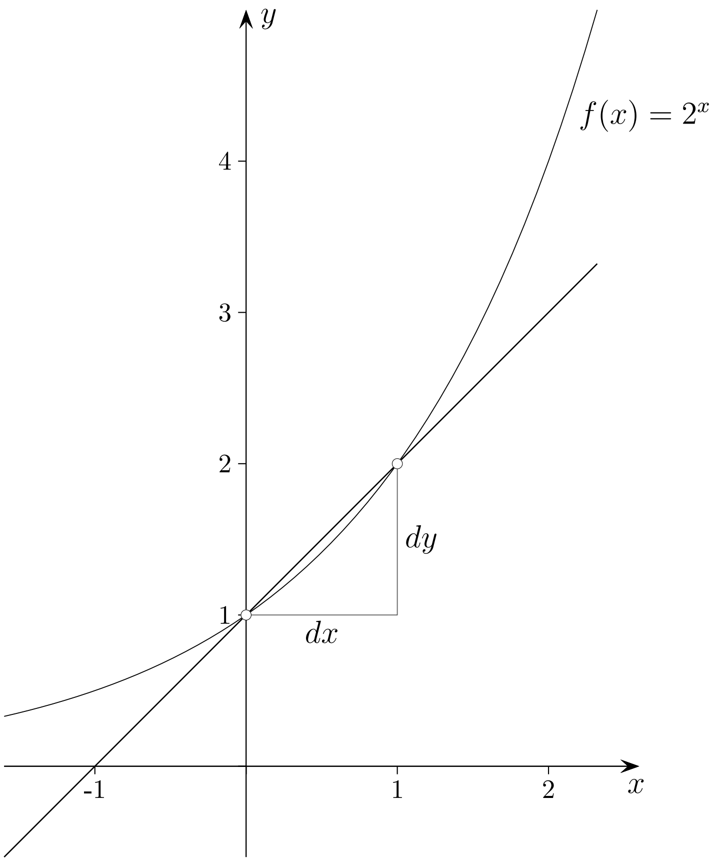
Marquis de l'Hospital verfasste 1696 das erste Buch zur Differentialrechnung mit dem bezeichnenden Titel *Analyse des infiniment petits*. Es basiert auf einem Skript von Johann Bernoulli. Die Brüder Bernoulli hatten Probleme, Leibniz' erste Abhandlung zur Differentialrechnung zu verstehen, „une énigme plutôt qu'une explication". Jakob Bernoulli wandte sich 1687 an Leibniz und bat ihn um Erläuterungen. Leibniz befand sich jedoch in Italien und konnte erst drei Jahre später antworten. In der Zwischenzeit hatten sich die Brüder den Kalkül selbstständig angeeignet.

Für Leibniz war das Rechnen mit Differentialen eine Kurzfassung eines Kalküls endlicher Größen und Grenzwerte. Um dies zu veranschaulichen, verwendete er verschiedene Interpretationen von Infinitesimalen (unendlich kleine, vernachlässigbare, unvergleichbar kleine Größen, kleiner als irgendeine angebbare Größe). Unendlich klein heißt in Relation zu den übrigen Größen so klein, dass der Näherungfehler vernachlässigbar ist. Seine Bemühungen waren wenig erfolgreich. Widersprüchliche Vorstellungen konnten nicht verhindert werden, taten aber der rasanten Ausbreitung des *calculus* keinen Abbruch.

Für den Unterricht kann es bereichernd sein, die Anfänge der Analysis zu thematisieren und den Leibniz-Kalkül der h-Methode gegenüber zu stellen. Die grundlegende Eigenschaft der linearen Approximierbarkeit sollte hervorgehoben werden (Funktionszoom).
Den Hauptsatz wird man zunächst mit Hilfe linearer Funktionen vermuten und überprüfen (Integralfunktionen können elementargeometrisch gefunden werden) und in das Thema Änderungsrate und Bestand einbetten. Die dahinter stehende Gesetzmäßigkeit ist der Grafik auf Seite 2 zu entnehmen. Eine Fehlerabschätzung z. B. für eine auf dem Intervall $[a, b]$ monoton steigende Funktion ist mit $\epsilon \leq f(b) \cdot dx$ leicht möglich. Quadraturen nach Fermat mit expliziter Ermittlung von Unter- bzw. Obersumme sind für den Aufbau nicht erforderlich.

$\uparrow$ Tangentensteigung als Grenzwert

Tangentensteigung für $f(x) = 2^x$ an der Stelle $x_0 = 0$



$$
\begin{aligned}
m_1 &= 1 \\
m_2 &= 0{,}82842\ldots \\
m_4 &= 0{,}75682\ldots \\
m_8 &= 0{,}72406\ldots \\
m_{16} &= 0{,}70838\ldots \\
m_{32} &= 0{,}70070\ldots \\
m_{64} &= 0{,}69691\ldots \\
m_{128} &= 0{,}69502\ldots \\
m_{256} &= 0{,}69408\ldots \\
m_{512} &= 0{,}69361\ldots \\
m_{1024} &= 0{,}69338\ldots \\
m_{2048} &= 0{,}69326\ldots \\
m_{4096} &= 0{,}69320\ldots \\
m_{8192} &= 0{,}69317\ldots \\
m_{16384} &= 0{,}69316\ldots \\
m_{32768} &= 0{,}69315\ldots \\
\longrightarrow &\quad 0{,}693147\ldots
\end{aligned}
$$

m_n ist der Differenzenquotient $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$ für $dx = \frac{1}{n}$

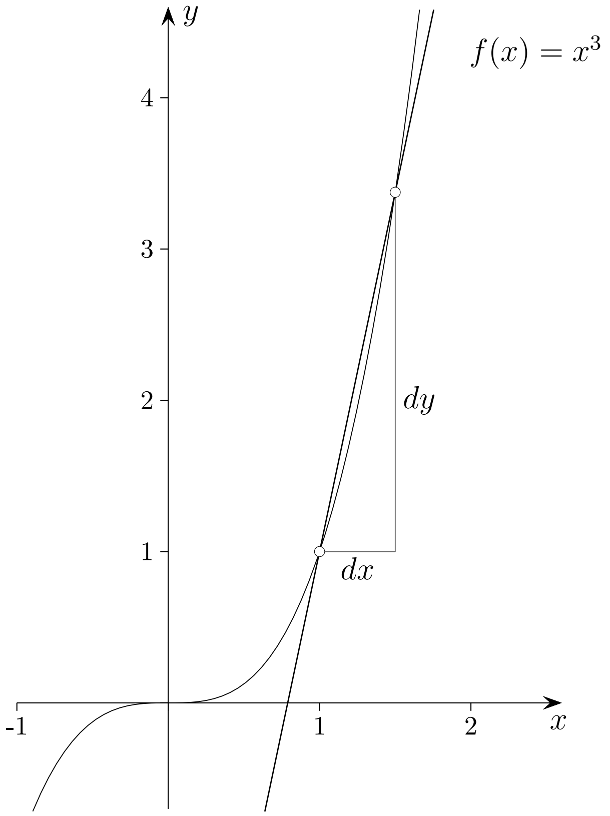
Die Folge erzeugt den Grenzwert $\ln(2)$. Es gilt $e^{\ln(2)} = 2$.

Mit größer werdendem n werden immer weitere gültige Nachkommastellen enthüllt.
Gleichwohl ist von einer irrationalen Zahl stets nur ein endliches Anfangsstück sichtbar.

$$\ln(2) = 0{,}693147180559945309417232\ldots$$

↑ Grenzwert

Tangentensteigung für $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1$



$$\begin{aligned}
m_2 &= 4{,}75 \\
m_4 &= 3{,}8125 \\
m_8 &= 3{,}390625 \\
m_{16} &= 3{,}191406\ldots \\
m_{32} &= 3{,}094726\ldots \\
m_{64} &= 3{,}047119\ldots \\
m_{128} &= 3{,}023498\ldots \\
m_{256} &= 3{,}011734\ldots \\
m_{512} &= 3{,}005863\ldots \\
m_{1024} &= 3{,}002930\ldots \\
m_{2048} &= 3{,}001465\ldots \\
m_{4096} &= 3{,}000732\ldots \\
m_{8192} &= 3{,}000366\ldots \\
m_{16384} &= 3{,}000183\ldots \\
m_{32768} &= 3{,}000091\ldots \\
m_{65536} &= 3{,}000045\ldots \\
m_{131072} &= 3{,}000022\ldots \\
m_{262144} &= 3{,}000011\ldots \\
m_{524288} &= 3{,}000005\ldots \\
\longrightarrow &\quad 3{,}000000\ldots
\end{aligned}$$

m_n ist der Differenzenquotient $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$ für $dx = \frac{1}{n}$
Die Folge erzeugt (konvergiert gegen) den Grenzwert 3.
Die Beschäftigung mit reellen Zahlen und Grenzwerten ermöglicht ein intuitives Verständnis, (siehe hier).

$$3 = 3{,}000000000000000000000\ldots$$

Leibniz' Kalkül
Newton
Startseite