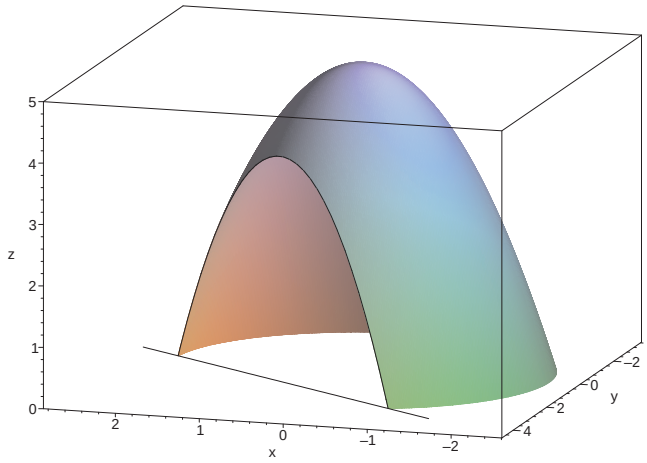
Extrema mit Nebenbedingung



Gesucht ist das Extremum der Funktion $f(x,y) = 5 - x^2 - \frac{1}{2}y^2$
unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x + y - 2 = 0$.

Anhand dieses einfachen Beispiels soll das allgemeine Vorgehen gezeigt werden.

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0 \\ dg &= \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy = 0 \end{aligned}$$

Weichen wir von der Extremstelle $(x|y)$ um dx und dy ab, so ist $dz = 0$ offensichtlich.
Die Änderung ist so zu wählen, dass die Nebenbedingung (linear approximiert) eingehalten wird.

Das lineare Gleichungssystem hat nur dann eine von $(0|0)$ verschiedene Lösung,
wenn die Vektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{gleichwertig} \qquad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

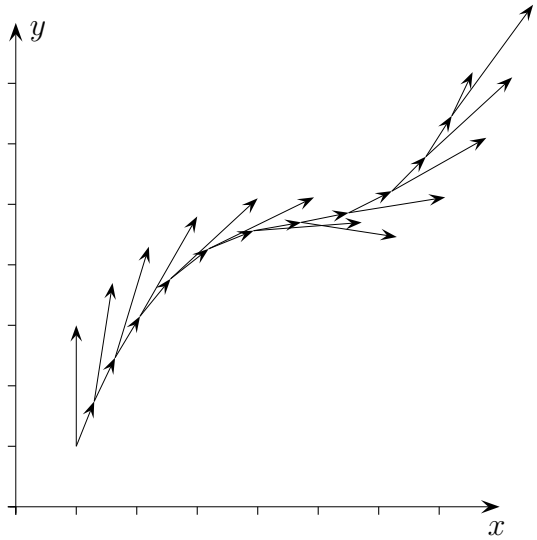
Die Bedingung der linearen Abhängigkeit ist die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.
Geringfügig einfacher ist:

$$\det \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ -y & 1 \end{pmatrix} = -2x + y = 0$$

Mit der Nebenbedingung $x + y = 2$ folgt $x = \frac{2}{3}$ und $y = \frac{4}{3}$.

Kurvenintegral

$$
\begin{aligned}
y &= f(x,y) \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= P(x,y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= Q(x,y)
\end{aligned}
$$

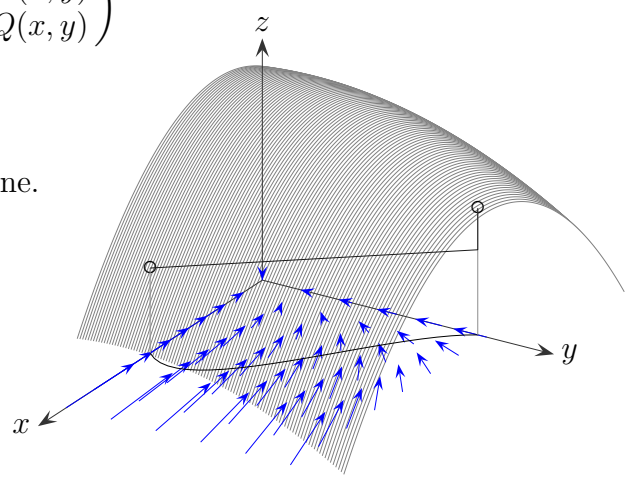


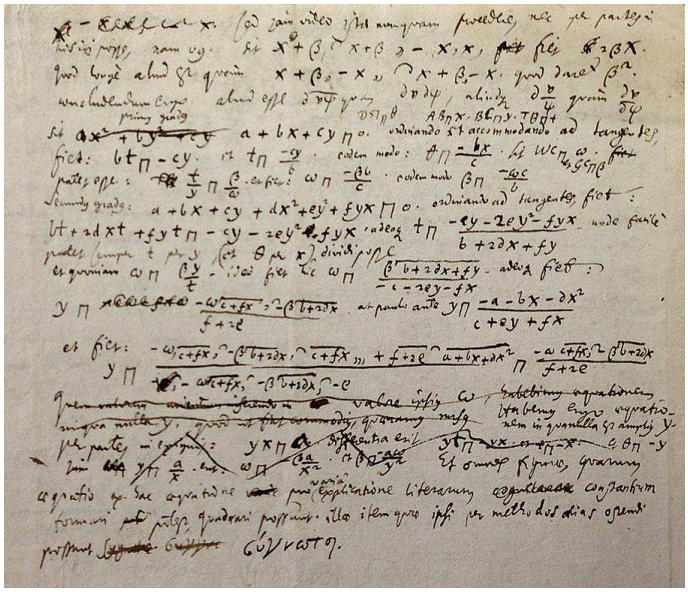
Kurve C $\quad \big(x(t), y(t)\big), \quad a \le t \le b$

Kettenregel

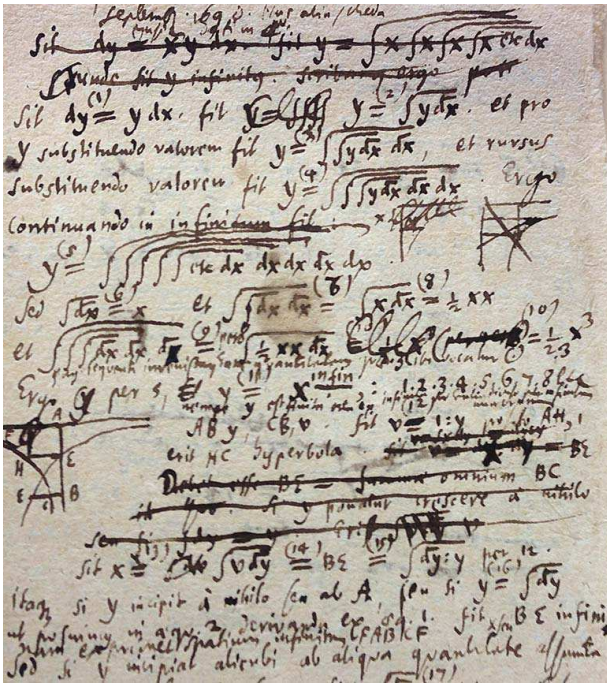
$$
\begin{aligned}
\frac{df(x(t),y(t))}{dt} &= P(x(t),y(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} + Q(x(t),y(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt} \qquad \Big| \int \ldots \, dt \\
\int_a^b df(\ldots) &= \int_a^b P(\ldots) \cdot dx(t) + Q(\ldots) \cdot dy(t) \\
f(x(b),y(b)) - f(x(a),y(a)) &= \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad \text{Kurzschreibweise}
\end{aligned}
$$

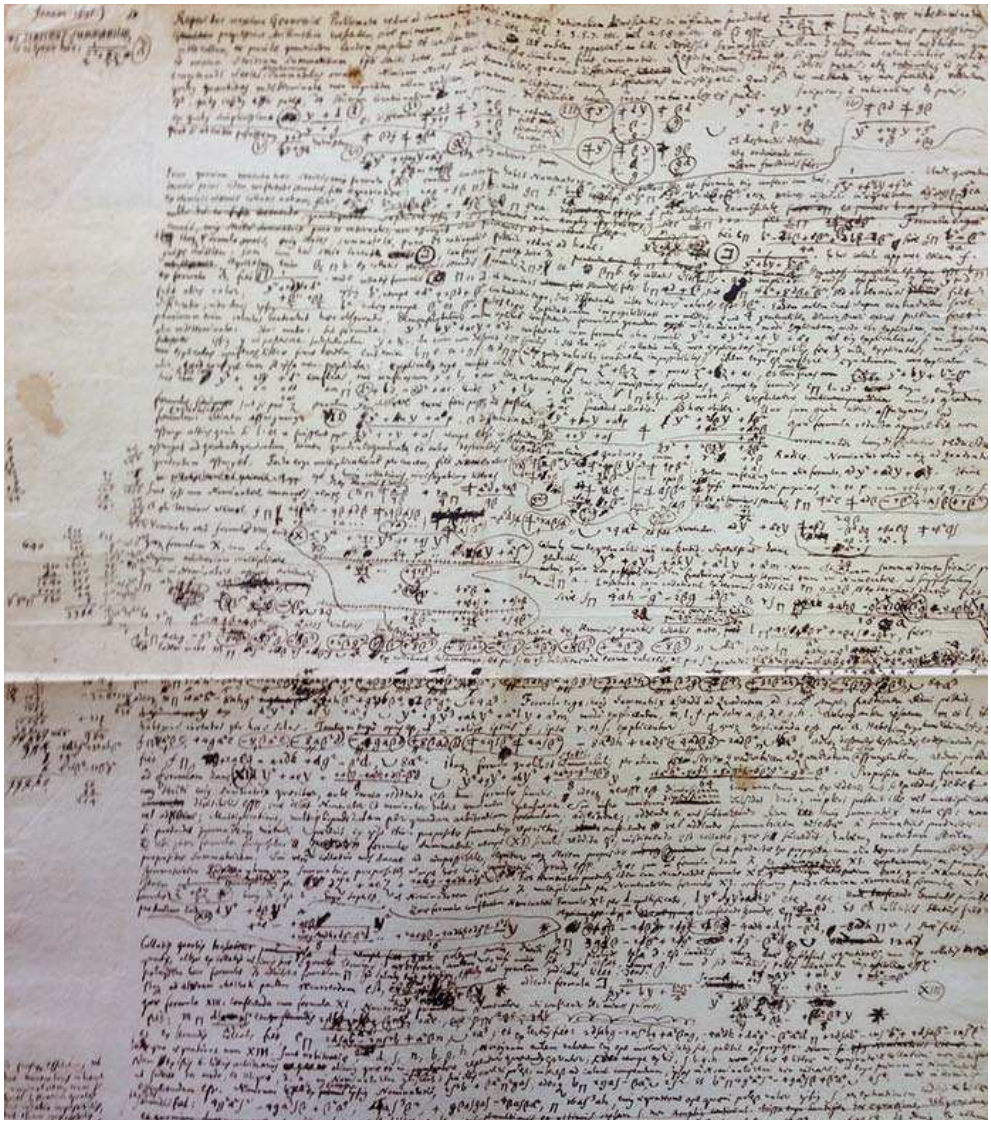
Rechts steht das Skalarprodukt des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$
mit den Tangentialvektoren von C
(verrichtete Arbeit längs C),
links die Höhendifferenz der *Potentialfunktion* f.
Beachte den anschaulichen Bezug zur Tangentialebene.

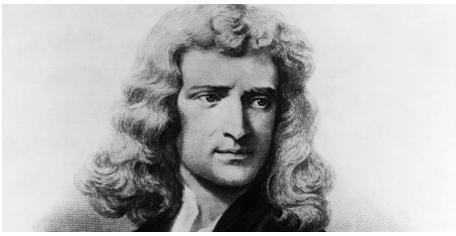




Notizen von Leibniz







Sir Isaac Newton 1643-1727

Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716