1. Leibniz' Kalkül
2. Prioritäts- und Plagiatsstreit Newton/Leibniz
3. Hoax
4. Newton calculus
5. Newton Typisches
6. Zwei Beispiele für Newtons Fluxionsrechnung
7. Newton Method of Fluxions, London 1736
8. Begründung der Fluxionsrechnung 1666
9. Blaise Pascal
10. Leibniz' erste Schritte
11. Leibniz calculus differentialis und calculus integralis
12. Mit der Lupe betrachtet Differentiale
13. Leibniz calculus differentialis auch Produktregel
14. Leibniz calculus differentialis Quotientenregel
15. Isaac Barrow und der Hauptsatz
16. Gerade TF ist Tangente, Nachweis
17. Barrow 2. Version des Hauptsatzes
18. Barrow Transmutation
19. Zur Einschätzung von J. M. Child
20. Newton und der Hauptsatz
21. Ableitung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$
22. Ableitung von $\tan\alpha$, Kalkül
23. Beweis eines Satzes von Barrow
24. Geschicktes Rechnen mit Differentialen
25. Differential 2. Ordnung
26. Krümmung
27. Kreisevolvente mehrere Seiten

28. Substitution
29. Bemerkungen zur Didaktik
30. Tangentensteigung als Grenzwert
31. Grenzwert
32. Zur Begründung des Infinitesimalkalküls durch Leibniz
33. Leibniz *De quadratura arithmetica* Textstellen
34. Transmutation
35. Leibniz-Reihe
36. Quadratur der Zykloide
37. Roberval Quadratur der Zykloide
38. DGL der Zykloide
39. Extremwertproblem Brechungsgesetz
40. Brachistochrone
41. Parameterdarstellung der Zykloide
42. Einige Aspekte des Streits
43. Ergänzungen zu Gottfried Wilhelm Leibniz
44. Tautochrone
45. Differentialgleichung, Trennung der Variablen
46. Isochrone
47. Trennung der Variablen
48. Totales Differential
49. Extrema mit Nebenbedingung Teil 2
50. Kurvenintegral
51. Notizen von Leibniz und Newton Abbildungen Teil 3
52. Veröffentlichung von Leibniz 1684 engl. Übersetzung
53. Veröffentlichung von Leibniz 1686 Integration

↑ Leibniz' Kalkül

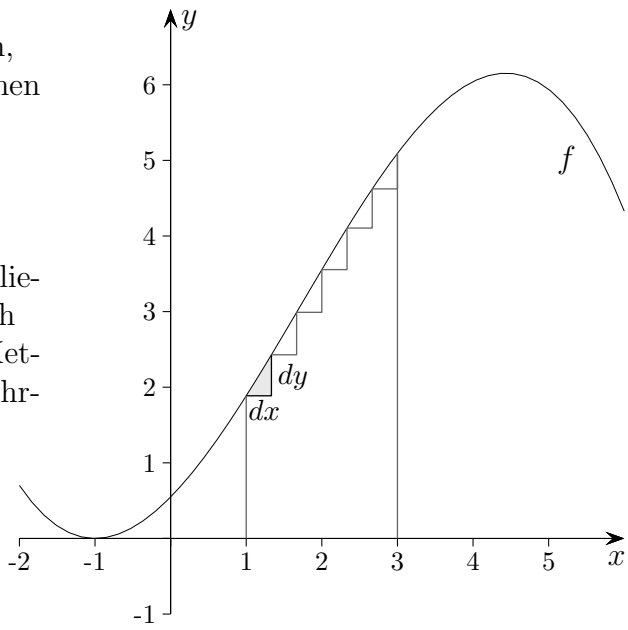
Im 17. Jahrhundert entdeckten Gregory, Barrow (Lehrer von Newton), Newton und Leibniz den Zusammenhang von Tangenten- und Flächenbestimmungen. Es entstand eine einheitliche Theorie zur Berechnung von Volumen, Schwerpunkten, Bogenlängen, Oberflächen usw. Zuvor konnten viele derartige Einzelprobleme von den Mathematikern Cavalieri, Roberval, Fermat, Huygens, Wallis und Descartes und weiteren gelöst werden.

Dass Leibniz' *calculus differentialis et integralis*[1] so erfolgreich war, liegt nicht zuletzt an den glücklichen, nach langem Überlegen und Probieren 1675 gefundenen Bezeichnungen wie

$$\frac{dy}{dx}, \quad \int y\,dx, \quad \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int dy, \quad \int dy = y,$$

mit denen sich die Regeln des Kalküls einfach formulieren und handhaben lassen - und außerdem auch noch fast als selbstverständlich erscheinen, wie z. B. die Kettenregel oder die Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion:

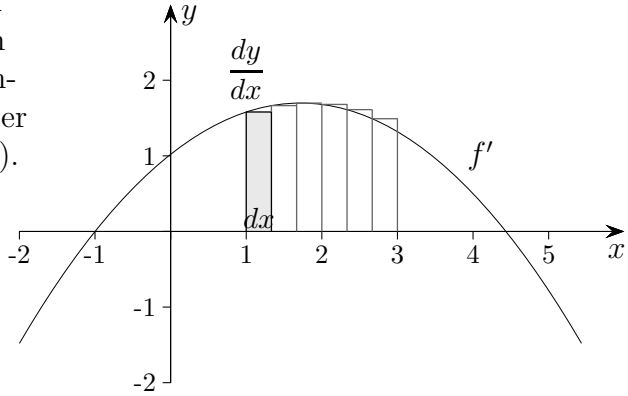
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$



Leibniz rechnete vorteilhaft mit Differentialen wie dx, dy. Sie dienen der Approximation und können so klein (infinitesimal) gewählt werden, dass jeder vorgegebene Fehler ϵ unterschritten wird.[2] Für zwei Größen A und B mit $A = B + \epsilon$ folgt dann $A = B$.

Für Leibniz legten Differentiale "den eigentlichen Quell der Entdeckung frei". Eine unveröffentlichte Fehlerabschätzung für glatte Funktionen - und nur die gab es - wurde 1949 in seinen Aufzeichnungen gefunden.

Mit dieser Methode entwickelte sich die Mathematik rasant weiter. Neue Gebiete der Mathematik wurden entdeckt. Im 18. Jahrhundert, als mathematische Ungereimtheiten auftauchten, dachte man gründlich über das Fundament der Analysis nach (Bolzano, Cauchy).



Entnehme den nebenstehenden Zeichnungen die Leibnizsche Idee der Flächenberechnung.

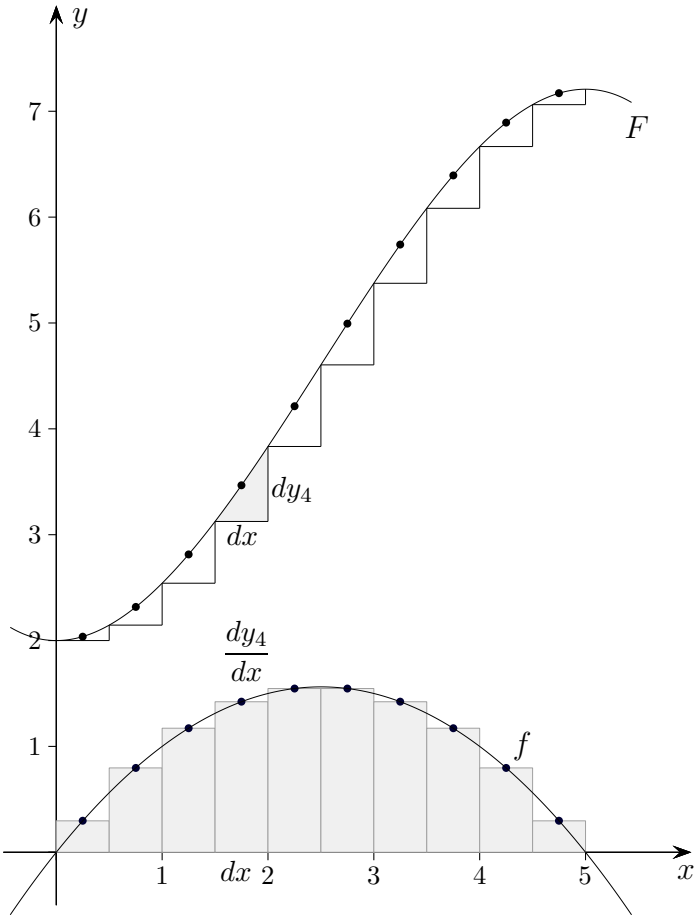
Berechne: $A = \int_0^2 x^2\,dx$

© Roolfs

[1] Differenzieren und Integrieren sind inverse Operationen. integrare, lat. wiederherstellen

[2] Leibniz erwähnt 1702 in einem Brief an Varignon den Bezug zum indirekten Beweis (Archimedes): Die Annahme, eine Größe ist kleiner bzw. größer als ein gegebener Wert, führt jeweils zu einem Widerspruch.

↑ Leibniz' Kalkül



F ist eine Stammfunktion von f,

d. h. $\dfrac{dF}{dx} = f$.

Der Inhalt des 1. Rechtecks (ganz links) beträgt $\dfrac{dy_1}{dx} \cdot dx = dy_1$,

der des 2. $\dfrac{dy_2}{dx} \cdot dx = dy_2$, usw.

$A = dy_1 + dy_2 + \ldots + dy_n$ ist die Summe aller Rechteckinhalte, hier $n = 10$.

Sie kann kürzer (mit einem beliebig kleinen Fehler ϵ für entsprechend großes n) als Funktionsdifferenz $A + \epsilon = F(5) - F(0)$ ermittelt werden.

Der Inhalt der Fläche unter einem Graphen kann als Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion an der Stelle der rechten und linken Grenze bestimmt werden.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Leibniz-Notation, Integrationsgrenzen entfallen:

$$\begin{aligned} f &= \frac{dF}{dx} \\ f dx &= dF \\ \int f(x)\,dx &= \int dF = F(\text{rechte Grenze}) \qquad \text{Summation, } F(0) = 0 \end{aligned}$$

↑ Prioritäts- und Plagiatsstreit Newton/Leibniz

um 1664 Barrow (1630-1677) und zuvor Gregory (1638-1675) erkennen den Zusammenhang von Tangentenproblem und Flächenberechnung. Barrow leitet in den *Lectiones geometricae* 1670 u.a. Gleichwertiges zur Produkt- und Quotientenregel und den Hauptsatz geom. ab. Wegbereiter für die Analysis waren unter anderem: Bonaventura Cavalieri (1598-1647)
René Descartes (1596-1650)
Pierre de Fermat (1607-1665)
John Wallis (1616-1703)
Blaise Pascal (1623-1662)

1665-1666 Newton entwickelt ausgehend von der Untersuchung von Momentangeschwindigkeiten und Änderungsraten die Fluxionsrechnung. Newton nennt die Ableitung Fluxion.

1672 Leibniz beschäftigt sich in Paris mit seinem Mentor Huygens intensiv mit Mathematik.

1673 Leibniz besucht zum ersten Mal für zwei Monate die Royal Society in London und wird deren Mitglied. Seine vorgeführte Rechenmaschine funktioniert nicht einwandfrei.[1]
Die vorgelegten Ergebnisse über unendliche Reihen stellen sich als bekannt heraus.
Er wird des Plagiats bezichtigt. Leibniz erwirbt die genannte Schrift von Barrow, einem Lehrer von Newton, und die Schrift *Exercitationes geometricae* von Gregory.
Londoner Mathematiker sind in Newtons Methoden eingeweiht.

1675 Leibniz entwickelt in Paris vom Tangentenproblem ausgehend den Infinitesimalkalkül. Viele Ergebnisse stimmen mit der Fluxionsrechnung überein. Aufgrund der geschickten Bezeichnungen lassen sich Regeln einfacher handhaben und erscheinen leicht verständlich.

1676 Leibniz besucht zum zweiten Mal London und erhält Einsicht in Newtons Arbeiten.

1677 Im kurzen Briefwechsel mit Newton führt Leibniz Ideen seiner Differenzialrechnung aus.

1684 Leibniz publiziert seine Ableitungsmethode samt Regeln, die über Bekanntes (Fermat, Sluze) hinausgehen, 1686 folgt die Integralrechnung. Später wird Leibniz des Plagiats beschuldigt.

1687 Newton erwähnt kurz die Fluxionsrechnung in seinem Werk *Philosophiae naturalis principia mathematica*. 1693 und 1704 folgen weitere Veröffentlichungen.

1712 Eine Kommission der Royal Society (Präsident Newton) kommt zu dem Ergebnis, dass Newton als Erster den *calculus* erfunden hat (first inventor). Die Behauptung, Leibniz habe nur den Namen und die Schreibweise geändert, bleibt unwidersprochen.

1713 Johann Bernoulli versucht Leibniz zu Unrecht davon zu überzeugen, dass Newton zur vollständigen Methode seiner Fluxionsrechnung erst nach der Publikation der Differentialrechnung (1684) gelangt sei (Newton hatte einige seiner Ergebnisse umformuliert).
Die Auseinandersetzung nimmt an Schärfe zu. Rede zieht Widerrede nach sich.
Die Lager beharken sich in Briefen und Veröffentlichungen mit nicht enden wollenden provozierenden Bemerkungen, Unterstellungen und Anschuldigungen.

Newton überlebte Leibniz um über zehn Jahre. Sie sahen sich nie. Im Gegensatz zu Leibniz wurde Newton zu Lebzeiten mit Ehrungen überhäuft. In England wurde die Fluxionsrechnung noch fast 100 Jahre trotzig beibehalten. Auf dem Kontinent entwickelte sich die Mathematik durch Varignon, Jakob und Johann Bernoulli, Euler, d'Alembert, Lagrange und Laplace stürmisch weiter.

↑
© Roolfs

[1] Der Nachbau der Universität Hannover 2005 einer Weiterentwicklung von Leibniz löste problemlos $12305897 \cdot 96878532$.

Der Leibniz' Kalkül erwies sich als leicht handhabbar und von großer Überzeugungskraft, neuere Schreibweise für Differenziale: $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. Die Newtonschen Bezeichnungen $\dot{x}$, $\ddot{x}$ für Ableitungen werden noch in Zusammenhängen verwendet, in denen die Variable t *(Zeit)* nicht gewechselt wird. Dynamische Vorstellungen und Änderungsraten wurden in der Didaktik ab 2000 verstärkt aufgegriffen.

Anfang des Jahres 1675 erfuhr Leibniz aus einem Brief von Oldenburg, einem Sekretär der Royal Society, dass Newton über eine allgemeine Methode zur Berechnung von Tangenten, Flächeninhalten, Bogenlängen usw. verfügt, ohne dass Einzelheiten genannt wurden.

Im Herbst 1675 formulierte Leibniz den Zusammenhang von Differentiation und Integration und führte das Integralzeichen $\int$ ein. Für Leibniz war die Integration eine Summation, für Newton die Ermittlung der Bestandsfunktion aus der Änderungsrate.

Im Nachhinein war die gängige Geheimhaltung der Methoden für den math. Fortschritt eher förderlich. Leibniz konnte so nach dem frustrierenden Londonaufenthalt 1673 eigenständige Gedanken zur Infinitesimalrechnung entwickeln - Einzelbeispiele für die Beziehung Tangentenproblem/Flächenberechnung lagen vielfältig vor[1] - und den in der Luft liegenden Kalkül in eine noch heute bestehende Form bringen.
Newton zögerte seine Veröffentlichungen hinaus, weil er weiter an den Grundlagen feilte - dem Grenzwertbegriff kam er dabei recht nahe - und sich für Unvollständiges keiner Kritik aussetzen wollte. Leibniz veröffentlichte seinen Kalkül mit Beispielen ohne Begründungen. Seine Manuskripte belegen jedoch, dass er bereits die ϵ-δ-Methode (Bolzano 1817, Cauchy 1820, Weierstrass 1861) antizipiert hatte.

Collins, dem die math. Korrespondenz der Royal Society oblag, gewährte Leibniz 1676 bei dessen zweitem Besuch in London Einblick in einige Dokumente Newtons, der das missbilligt hätte. Dieser Umstand nährte den späteren Plagiatsvorwurf. Für die englische Seite nicht erkennbar hatte Leibniz bis zu diesem Zeitpunkt jedoch die wesentlichen Teile seines Infinitesimalkalküls gefunden.

Für Newton war Leibniz "a second inventor". "Second inventors have no right.
Whether Mr Leibniz found the Method by himself or not is not the Question ... "
"To take away the Right of the first inventor, and divide it between him and that other [the second inventor], would be an Act of Injustice."

Newton verließ 1696 die Universität, nahm ein Amt an der königlichen Münze an und reformierte das Münzwesen. Der Prioritätsstreit hatte zur Folge, dass es Leibniz verwehrt wurde, seinem Herzog als dessen Bibliothekar - er sollte die Geschichte der Welfen und damit deren Thronansprüche untersuchen - nach London zu folgen, als dieser 1714 den englischen Thron bestieg. Als Leibniz ein Reiseverbot erhielt und dieses ignorierte, wurde er als Bibliothekar abgelöst. Er starb vereinsamt 1716 in Hannover und wurde in kleinstem Kreise beigesetzt. Alle Hofbeamte waren geladen worden, jedoch erschien niemand. Für die Hannoveraner war Leibniz ein Ungläubiger, sie interessierte sein Tod nicht. Ein Nachruf - der einzige - der Académie des Sciences in Paris würdigte Leibniz als großen Wissenschaftler. Sein Nachlass umfasst eine Rechenmaschine und 200 000 beschriebene Seiten, davon 20000 Briefe.

↑
© Roolfs

[1] Fermat: $\displaystyle\int_0^a x^n\,dx = \frac{1}{n+1}a^{n+1}$, Gregory: $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a$

Roberval (1602-75): $\displaystyle\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b = \big[-\cos x\big]_a^b$

Bei den im Internet aufgefundenen Briefen handelt es sich um einen Hoax (Scherz, Schwindel). Der Tonfall der kurzen realen Leibniz/Newton-Korrespondenz war betont freundlich.

January 13, 1677
My Dearest Newton,

I must express my profound gratitude for your letters of June and October sent on to me by Oldenburg. I have as yet only scratched the surface of the wondrous mysteries whose depths are revealed in them. I am most eager to apply myself to a thorough study of your wonderful ideas, but I felt that I must stop, take pen in hand and acknowledge your generosity. Too, I wish to express my gratitude in a more substantial fashion by explaining to you some of my own notions regarding tangents and quadratures. I suspect, from hints I discern from my first perusal of your letters, that some of these ideas are already known to you.

Imagine a vanishingly small increment of x, which we will call the differential of x, and the corresponding increment in y.
...

June 12, 1677
My Dearest Newton,

Yes, it seems that your fluxions are identical to my ratio of differentials. As you say, I was confused by your notation, even more was I confused by your language. You seem to be conceiving of these curves as being generated by moving points while my methods dispense with that notion and treat the curve as a static object. ...

August 3, 1703
My Dearest Newton,

...
I confess to you that I feel no great pride in my actions in this conspiracy, I wish that we had never concocted this plots. I very much doubt that we have accomplished any part of our goal of diminishing priority disputes, I fear we have made things worse. I am

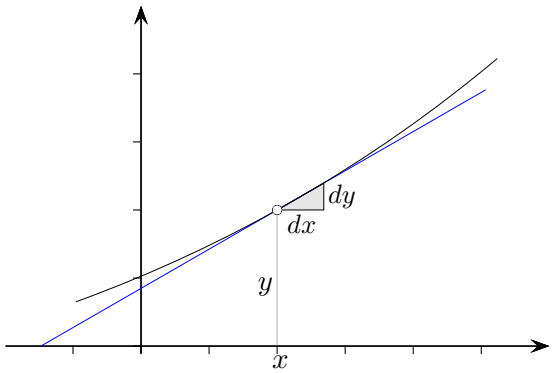
Your most humble Servant.
Leibniz

↑ Newton calculus

Die Idee von Newton zur Bestimmung der Tangentensteigung sei an zwei Beispielen (in der Schreibweise der Differentiale) gezeigt. Fluxions- und Differentialrechnungen lassen sich mit $\dot{y}o = dy$, $\dot{x}o = dx$ ineinander überführen. Barrow hat die Fluxions-Methode von Newton übernommen und in die *Lectiones geometricae* eingefügt („auf den Rat eines Freundes“). Das charakteristische Dreieck taucht schon vor Barrow bei Pascal auf. Leibniz ging nach eigener Schilderung beim Anblick „ein Licht auf“.

$$\begin{aligned}
y &= x^2 \\
y - x^2 &= 0 \\
(y + dy) - (x + dx)^2 &= 0 \\
y + dy - (x^2 + 2x\,dx + (dx)^2) &= 0 \qquad y - x^2 = 0, \text{ Differentiale höherer Ordnung entfallen} \\
dy - 2x\,dx &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= 2x
\end{aligned}$$

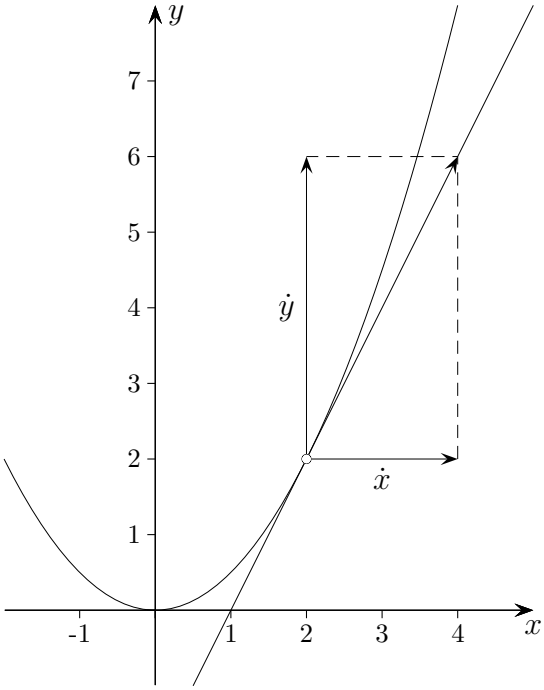
$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{x} \\
y^2 &= x \\
y^2 - x &= 0 \\
(y + dy)^2 - (x + dx) &= 0 \\
y^2 + 2y\,dy + (dy)^2 - x - dx &= 0 \qquad y^2 - x = 0, \ \ (dy)^2 \text{ entfällt} \\
2y\,dy - dx &= 0 \\
2y\,dy &= dx \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$



Newton knüpfte $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ $\left(= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right)$, *letztes Verhältnis verschwindender Größen, Bahnkurve* $\big(x(t), y(t)\big)$, z. B. an die Geschwindigkeit, mit der eine Kugel auf eine Unterlage auftrifft.

↑ Newton Typisches

Die Bahnkurve[1] eines Punktes $\big(x(t), y(t)\big) = \big(2t, 2t^2\big)$ ist die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$.
Newton bezeichnet den Parameter t in *Methodus Fluxionum* als Zeit, ohne sich auf die wirkliche Bedeutung festzulegen. Desgleichen sind die lokalen Änderungsraten $\dot{x}$ und $\dot{y}$ dann die gesuchten Geschwindigkeiten (Fluxionen) der sich ändernden Größen x und y (Fluenten von flowing quantity).



Annahme: Für eine infinitesimale Zeitspanne o (entspricht dt) bewegt sich der Punkt mit konstanter Geschwindigkeit. In einer solchen Zeitspanne legt also x die Strecke $o\dot{x}$ und y die Strecke $o\dot{y}$ zurück.

$$
\begin{aligned}
y - \frac{1}{2}x^2 &= 0 \\
(y + o\dot{y}) - \frac{1}{2}(x + o\dot{x})^2 &= 0 && \mid\ o\dot{y} = dt \cdot \frac{dy}{dt} = dy, \quad o\dot{x} = dt \cdot \frac{dx}{dt} = dx \\
2(y + o\dot{y}) - (x^2 + 2xo\dot{x} + (o\dot{x})^2) &= 0 && \mid\ 2y - x = 0 \quad \mid : o \\
2\dot{y} - 2x\dot{x} - o\dot{x}^2 &= 0 && \mid\ \text{Term mit } o \text{ ist vernachlässigbar} \\
2\dot{y} - 2x\dot{x} &= 0 \\
\frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= x && \mid\ = \frac{dy}{dx}
\end{aligned}
$$

Wird $o\dot{x}$ durch dx ersetzt und $o\dot{y}$ durch dy, erhalten wir Terme, die dem Leibniz-Kalkül entstammen könnten. Es ist offensichtlich, dass die Herangehensweisen sehr unterschiedlich sind.

↑ © Roolfs

[1] Archimedes 287-212 v. Chr. konstruierte mit kinematischen Überlegungen eine Tangente an die nach ihm benannte Spirale. Roberval 1602-1675 entwickelte diese Idee weiter.

↑ Zwei Beispiele für Newtons Fluxionsrechnung

Die Bahnkurve eines Punktes $\big(x(t), y(t)\big) = \big(2t, 8t^2\big)$ ist die Parabel $y = 2x^2$.
Gesucht ist eine Beziehung zwischen den Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$.

Wir folgen Newtons Anweisungen:

1) Forme die Gleichung so um, dass auf einer Seite null steht.

   $y - 2x^2 = 0$

2) Multipliziere jeden Summanden mit $n\dot{x}/x$, wenn n die höchste Potenz ist, mit der x^n im Summanden enthalten ist.

   $y \cdot 0\dfrac{\dot{x}}{x} - 2x^2 \cdot 2\dfrac{\dot{x}}{x} \qquad (= -4x\dot{x})$

3) Multipliziere jeden Summanden mit $n\dot{y}/y$, wenn n die höchste Potenz ist, mit der y^n im Summanden enthalten ist.

   $y \cdot 1\dfrac{\dot{y}}{y} - 2x^2 \cdot 0\dfrac{\dot{y}}{y} \qquad (= \dot{y})$

4) Addiere die Terme, die Summe muss null sein.

   $-4x\dot{x} + \dot{y} = 0, \quad$ damit gilt $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = 4x$

Die Bahnkurve eines Punktes $\big(x(t), y(t)\big)\big)$ ist die Hyperbel $x \cdot y = 1$.
Gesucht ist eine Beziehung zwischen den Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$.

1) $x \cdot y - 1 = 0$

2) $x \cdot y \cdot \dfrac{\dot{x}}{x} \qquad (= y\dot{x})$

3) $x \cdot y \cdot \dfrac{\dot{y}}{y} \qquad (= x\dot{y})$

4) $y\dot{x} + x\dot{y} = 0, \quad$ dann folgt $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\dfrac{1}{x^2}$

Der wenig bekannte Autor Ditton schrieb in seinem Buch *An Institution of Fluxions 1706*: „Quantities are not to be imagined as the aggregates or sums total of an infinite number of little constituent elements but as the result of a regular flux, proceeding incessantly, from the first moment of its beginning to that of perfect rest. A line is described not by the apposition of little lines or parts, but by the continual motion of a point ... The fundamental principle upon which the method of fluxions is built is more accurate, clear, and convincing than those of differential calculus.“

Sieben Jahre nach Newtons Tod wurde die Fluxionsrechnung (Division durch o, daher $o \neq 0$, anschließend wird vermeintlich $o = 0$ gesetzt, bei Leibniz war es dx) von dem Bischof George Berkeley in der einflußreichen Schrift The Analyst angeprangert: „All das scheint mir eine höchst widerspruchsvolle Art der Beweisführung zu sein, wie man sie in der Theologie nicht erlauben würde.“ Berkeley bestritt die Korrektheit der Begründungen und vermutete eine Kompensation von Fehlern, die zu richtigen Ergebnissen führte.

↑ Newton Method of Fluxions, London 1736

Original in Latein, Auszug, S. 20, 24 und 25

Now those Quantities which I consider as gradually and indefinitely increasing, I shall hereafter call Fluents, or Flowing Quantities .... And the Velocities by which every Fluent is increased by its generating Motion, (which I may call Fluxions, or simply Velocities or Celerities,) I shall represent by the same Letters pointed thus $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$. ...

15. Now since the Moments, as $\dot{x}o$ and $\dot{y}o$, are the indefinitely little accessions of the flowing Quantities x and y, by which those Quantities are increased through the several indefinitely little intervals of Time; ist follows, that those Quantities x and y, after any indefinitely small interval of Time, become $x + \dot{x}o$ and $y + \dot{y}o$. And therefore the Equation, which at all times indifferently expresses the Relation between $x + \dot{x}o$ and $y + \dot{y}o$, as between x and y: So that $x + \dot{x}o$ and $y + \dot{y}o$ may be substituted in the same Equation for those Quantities, instead of x and y.

16. Therefore let any Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ be given,
and substitute $x + \dot{x}o$ for x, and $y + \dot{y}o$ for y, and there will arise

$$\left.\begin{array}{c} x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oox + \dot{x}^3o^3 \\ -ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo \\ axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 \\ -y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = 0$$

Now by Supposition $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, which therefore being expunged, and the remaining Terms being divided by o, there remain
$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3oo = 0$

But whereas o is supposed to be infinitely little, that it may represent the Moments of Quantities; the Terms that are multiply'd by it will be nothing in respect of the rest. therefore I reject them, and there remains
$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$

↑ Begründung der Fluxionsrechnung 1666

Eine Kurve sei implizit durch eine polynomiale Summe $\sum a_{ij}x^iy^j = 0$ gegeben, $i, j \in \mathbb{N}$.
Gesucht ist eine Beziehung zwischen den Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$.

Wegen der als geradlinig gleichförmig angenommenen Bewegung innerhalb der infinitesimalen Zeitspanne o geht Newton davon aus, dass dann auch

$\sum a_{ij}(x+o\dot{x})^i(y+o\dot{y})^j = 0$ gilt.

Die Produkte $(x+o\dot{x})^i(y+o\dot{y})^j$ werden untersucht.

$$\begin{aligned}
(x+o\dot{x})^i &= x^i + i\cdot x^{i-1}(o\dot{x}) \;+\; \text{Terme}^1 \text{ mit } (o\dot{x})^k,\ k=2,\dots,i \\
(y+o\dot{y})^j &= y^j + j\cdot y^{j-1}(o\dot{y}) \;+\; \text{Terme mit } (o\dot{y})^k,\ k=2,\dots,j \\
0 = \sum a_{ij}(x+o\dot{x})^i(y+o\dot{y})^j &= \underbrace{\sum a_{ij}x^iy^j}_{0} + \sum a_{ij}\big(x^ij\cdot y^{j-1}(o\dot{y}) + y^ji\cdot x^{i-1}(o\dot{x})\big) \;+\text{ Terme mit } o^k,\ k\geq 2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mid \text{ Division durch } o \\
&= \sum a_{ij}\big(x^ij\cdot y^{j-1}\dot{y} + y^ji\cdot x^{i-1}\dot{x}\big) \;+\; \underbrace{\text{Terme mit } o^k,\ k\geq 1}_{\text{für Newton „gerade verschwindende Größen“}}
\end{aligned}$$

Bischof Berkeley spottete:
„May we not call them the ghosts of departed quantities?“

Die restliche Summe wird umgeformt zu:

$$= \sum a_{ij}x^iy^j\big(i\frac{\dot{x}}{x} + j\frac{\dot{y}}{y}\big)$$

Wie hätte Leibniz gerechnet?
Eine Kurve sei implizit durch eine polynomiale Summe $\sum a_{ij}x^iy^j = 0$ gegeben, d. h.
$\sum a_{ij}x(t)^iy(t)^j = 0$. Implizites Differenzieren (Produkt- und Kettenregel) ergibt:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum a_{ij}\big(ix^{i-1}\dot{x}y^j + x^ijy^{j-1}\dot{y}\big) \\
&= \sum a_{ij}\big(i\frac{\dot{x}}{x}x^iy^j + j\frac{\dot{y}}{y}x^iy^j\big) \\
&= \sum a_{ij}\big(i\frac{\dot{x}}{x}x^iy^j + j\frac{\dot{y}}{y}x^iy^j\big) \\
&= \sum a_{ij}x^iy^j\big(i\frac{\dot{x}}{x} + j\frac{\dot{y}}{y}\big)
\end{aligned}$$

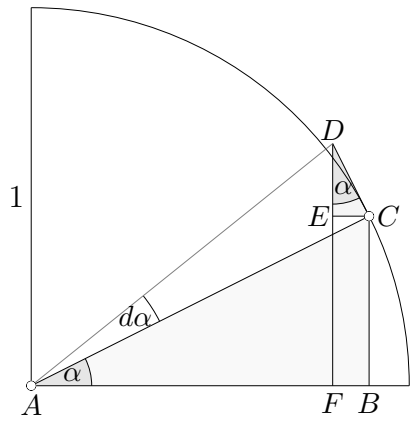
Newton bewies 1669 in seiner Schrift De analysi, die er 1711 veröffentlichte, durch Ableitung der Flächenfunktion, dass der Inhalt unter der Kurve $y = ax^{m/n}$ durch $\dfrac{ax^{m/n+1}}{m/n+1}$ gegeben ist.

↑ © Roolfs

[1] $(x+o\dot{x})^i = x^i + \binom{i}{1}x^{i-1}(o\dot{x}) + \binom{i}{2}x^{i-2}(o\dot{x})^2 + \cdots + \binom{i}{i}x^{i-i}(o\dot{x})^i$

↑ Blaise Pascal

Der Mathematiker, Physiker und Philosoph Blaise Pascal 1623-1662 veröffentlichte 1659 unter anderem Folgendes: In einem Viertelkreis sind gemäß der (etwas abgewandelten) Zeichnung zwei rechtwinklige Dreiecke gegeben, die zudem in einem weiteren Winkel übereinstimmen, da deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen. Die Dreiecke sind somit ähnlich.



Übersetzt in die Leibniz-Notation gilt (Winkel im Bogenmaß):

$$
\begin{aligned}
\triangle ABC &\simeq \triangle DEC \\
d\alpha &= CD && \mid CD \text{ tangential, } CD \perp AC \\
\cos\alpha &= AB \\
d(\cos\alpha) &= BF = CE \\
\sin\alpha &= \frac{CE}{CD} \\
\sin\alpha \cdot d\alpha &= d(\cos\alpha) && \mid CE \text{ wird subtrahiert, somit ist } d(\cos\alpha) \text{ negativ.} \\
\int_a^b \sin\alpha \cdot d\alpha &= \cos a - \cos b && \mid \text{Summation, beachte } \ (\cos\alpha)' = -\sin\alpha
\end{aligned}
$$

Diese Inhalte inspirierten Leibniz, um 1673.
Ihre Weiterentwicklung war für sein Denken fortan zentral.

↑ Leibniz' erste Schritte

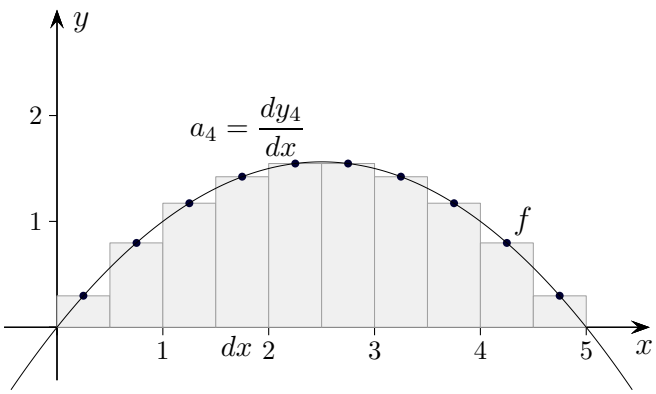
Leibniz beschäftigte sich ab 1672 auf Anregung von Huygens in Paris mit Folgen und deren Summe. Er erkannte, dass die Summe einer Differenzenfolge stets leicht zu ermitteln ist, z. B.

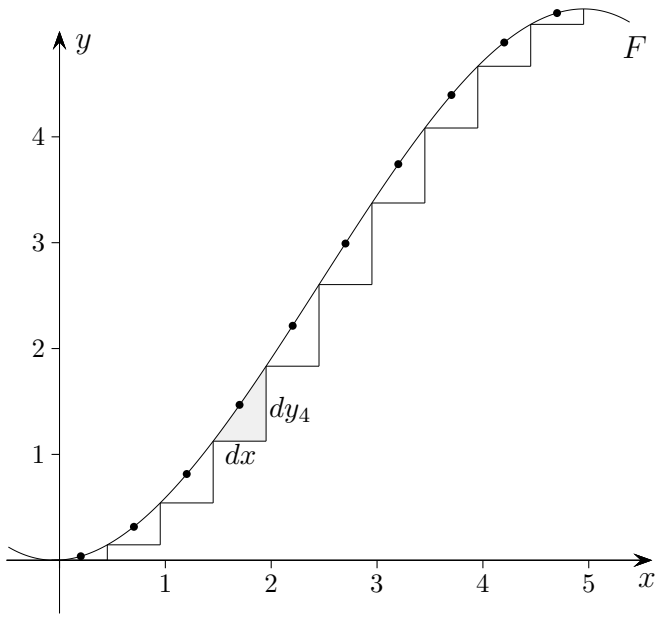
	$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$	$y_n,\ n = 0, \ldots, 10$
Differenzenfolge	$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$	$a_n = y_n - y_{n-1},\ n = 1, \ldots, 10$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}(y_n - y_{n-1}) &= (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + (y_4 - y_3) + (y_5 - y_4) + \\ &\quad (y_6 - y_5) + (y_7 - y_6) + (y_8 - y_7) + (y_9 - y_8) + (y_{10} - y_9) \\ &= y_{10} - y_0 = 100\end{aligned}$$

Um also die Summe einer Folge a_n zu berechnen, kann eine Folge y_n mit $y_0 = 0$ bestimmt werden, so dass a_n die Differenzenfolge von y_n ist. Es gilt dann: $\sum_{n=1}^{\ell} a_n = y_\ell$

Diese Art der Summierung hat Leibniz auf die Flächenberechnung übertragen.





Die Rechtecksumme beträgt: $a_1 \cdot dx + a_2 \cdot dx + \ldots + a_\ell \cdot dx$
Zur Folge $a_n \cdot dx$ ist eine Folge y_n mit $y_0 = 0$ und $a_n \cdot dx = y_n - y_{n-1}$ $(= dy_n)$ zu bestimmen, d. h. es muss $a_n \cdot dx = dy_n$ sein und damit $a_n = \frac{dy_n}{dx}$. f ist somit die Ableitung von F.

Leibniz-Notation:

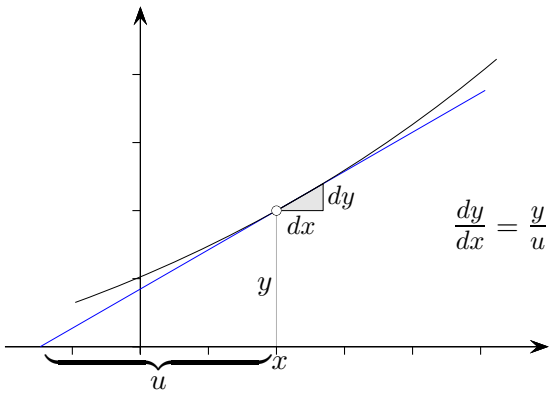
$$A = \int f(x)\,dx = \int dy = y$$

Integrationsgrenzen entfallen.
y ist hier der Funktionswert F(rechte Grenze).
Die Stammfunktion beginnt im Ursprung.

↑ Leibniz calculus differentialis und calculus integralis

$$
\begin{aligned}
y &= x^3 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} \\
&= \frac{(x^3 + 3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3) - x^3}{dx} \\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

Potenzen der Differentiale, also Fehlerterme, die bei fortschreitender Approximation vernachlässigbar sind, entfallen.



Mit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + \epsilon$ kann für $\Delta x \to 0$ die Tangentensteigung $m_{\text{Tangente}} = 3x^2$ ermittelt werden. Infinitesimale Größen (Differentiale) dx, dy vereinfachen die Schreibweise, d von lat. differentia. Die Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ für die Ableitung verleitet jedoch zu der irreführenden Vorstellung von unendlich kleinen Größen, die es hier nicht gibt[1], siehe 1. Seite zur Art des Schließens. Hilfreich ist die Vorstellung, dass die „unvergleichbar kleinen“ Größen (Leibniz inassignabilis lat., unassignable engl. unangebbar, ability Vermögen) eines Steigungsdreiecks so klein gewählt werden, dass die längste Seite mit dem Kurvenverlauf (bis auf einen zu vernachlässigenden Fehler) übereinstimmt. dx ist ein verschwindend kleiner Anteil von x. Der Inhalt einer Fläche unterhalb von y setzt sich aus einer Summe von Infinitesimalen $y\,dx$ zusammen, $\int y\,dx = \sum y\,dx$.

$$dx^a = a x^{a-1} dx$$

$$d(ay) = a\,dy$$

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

Umkehrung führt zur partiellen Integration $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$\int$ Buchstabe S von Summe, lat. summa

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}\,dx$$

$$d\sin x = \cos x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{dx}\,dx = y$$

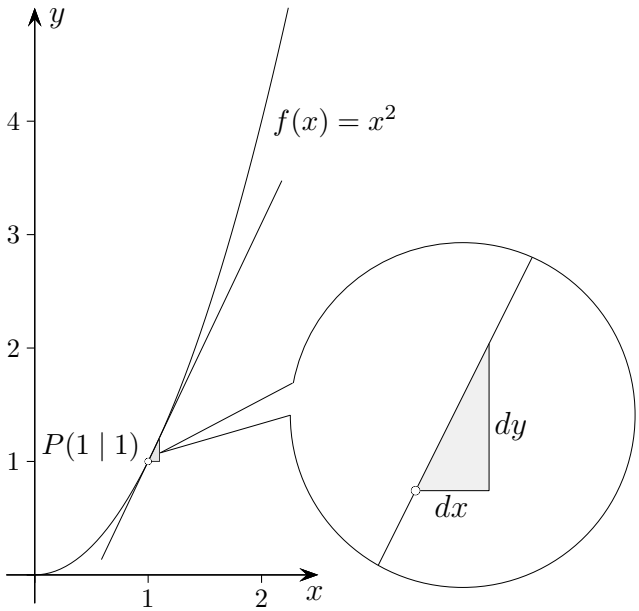
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$$

$$s = \int ds$$

↑ © Roolfs

[1] Leibniz erläutert 1676 in seinem grundlegenden, erst im 20. Jh. aufgefundenen Manuskript *De quadratura arithmetica* den Begriff „unendlich klein“ und antizipiert das Riemann-Integral. Die Nichtstandardanalysis trägt nicht dazu bei, sich dem Denken von Newton und Leibniz anzunähern.

↑ Mit der Lupe betrachtet



Letztendlich liegt ein linearer (proportionaler) Zusammenhang von dx und dy vor.
Der Proportionalitätsfaktor ist die gesuchte Tangentensteigung.

Newton sprach angesichts $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+dx)^2 - 1}{dx} = 2 + dx$

vom „letzten Verhältnis (hier 2) verschwindender Größen“.

Differentiale können so klein gewählt werden, dass der Fehler ϵ, der bei der Berechnung einer Tangentensteigung, einer Bogenlänge, einer krummlinig begrenzten Fläche (z. B. durch Approximation mit einer geradlinig begrenzten treppenförmigen Fläche) entsteht, kleiner als jede vorgegebene positive Zahl ist, d. h. beliebig klein ist. Differentiale können dann in einem Abstraktionsschritt als feste Rechengrößen mit speziellen Regeln aufgefasst werden.
Die Summanden von ϵ, z. B. Potenzen und Produkte von Differentialen, werden weggelassen, das Gleichheitszeichen beibehalten. Ein Grenzwertprozess wird in dieser Weise berücksichtigt. Ohne dass tieferes Verständnis erforderlich wäre (ganz im Sinne von Leibniz), können mit dieser Methode (Kalkül) Ergebnisse erzielt werden. Das trug zur raschen Ausbreitung bei.

Newton erläuterte 1686:
„Quantities, and also ratios of quantities, which in any finite time constantly tend to equality, and which before the end of that time approach so close to one another that their difference is less than any given quantity, become ultimately equal.

If you deny this, let them become ultimately unequal, and let their ultimate difference be D. Then they cannot approach so close to equality that their difference is less than the given difference D, contrary to the hypothesis.“

↑ © Roolfs

Für den holländischen Mathematiker Nieuwentijt (1654-1718) war eine infinitesimale Größe eine Größe, die kleiner als jede andere endliche Größe ist. Leibniz widersprach.

↑ Leibniz calculus differentialis

Leibniz 1695:
Außerdem denke ich, dass nicht nur die Dinge gleich sind, deren Unterschied absolut Null ist, sondern auch die, deren Unterschied unvergleichlich klein ist. Und obwohl dieser [Unterschied] nicht absolut Nichts genannt zu werden braucht, ist er auch keine Größe, die mit denen vergleichbar ist, deren Unterschied er ist.

$$\begin{aligned}
y &= x^4 \\
y + dy &= (x + dx)^4 && \text{Wir vergößern } x \text{ und } y \text{ ein wenig.} \\
&= x^4 + 4x^3dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4 \\
&= x^4 + 4x^3dx && \text{Differentiale höherer Ordnung entfallen.} \\
dy &= 4x^3dx && y = x^4 \text{ wird subtrahiert.} \\
\frac{dy}{dx} &= 4x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= x^5 \\
y + dy &= (x + dx)^5 \\
&= x^5 + 5x^4dx + 10x^3(dx)^2 + 10x^2(dx)^3 + 5x(dx)^4 + (dx)^5 \\
&= x^5 + 5x^4dx; \\
dy &= 5x^4dx \\
\frac{dy}{dx} &= 5x^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= u \cdot v && u \text{ und } v \text{ sind Funktionen von } x. \\
y + dy &= (u + du) \cdot (v + dv) \\
&= u \cdot v + u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv \\
&= u \cdot v + u \cdot dv + v \cdot du && \text{Differential } du \cdot dv \text{ entfällt.} \\
dy &= u \cdot dv + v \cdot du && y = u \cdot v \text{ wird subtrahiert.} \\
\frac{dy}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} && \text{Produktregel 1675}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dx^n &= (x + dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + \ldots \text{ (Differentiale höherer Ordnung)} \\
&= nx^{n-1}dx
\end{aligned}$$

↑ Leibniz calculus differentialis

Quotientenregel 1676

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{u}{v} \\
y + dy &= \frac{u + du}{v + dv} \\
&= \frac{u}{v} + \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2} \qquad \text{siehe Division} \\
dy &= \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2} \\
&= \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(u + du) : (v + dv) = \frac{u}{v} + \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2} \\
&\underline{-\left(u + \frac{u \cdot dv}{v}\right)} \\
&\qquad du - \frac{u \cdot dv}{v} \\
&\qquad \underline{-\left(du + \frac{du \cdot dv}{v}\right)} \\
&\qquad\qquad -\frac{u \cdot dv}{v} - \frac{du \cdot dv}{v} \\
&\qquad\qquad \underline{-\left(-\frac{u \cdot dv}{v} - \frac{u \cdot dv \cdot dv}{v^2}\right)} \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{du \cdot dv}{v} + \frac{u \cdot dv \cdot dv}{v^2}
\end{aligned}
$$

Hier kann die Division abgebrochen werden.
Der Restterm und alle weiteren bestehen aus Differentialen höherer Ordnung.

Leibniz entgegnete 1701 auf abwegige Deutungen der Differentiale:
Car au lieu de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donée, de sorte, qu'on ne diffère du stile d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans nôtre méthode et plus conformes à l'art d'inventer.

Denn anstelle des unendlich Kleinen nimmt man die Größen so groß oder so klein wie nötig an, damit der Fehler kleiner ist als jeder angegebene Fehler, so dass man von Archimedes' Stil [doppelter Wiederspruchsbeweis, siehe hier] *nur in bezug auf die Ausdrücke abweicht, welche eher auf unsere Methode ausgerichtet sind und mit der Erfindungskunst konform gehen.*

↑ © Roolfs

In dem Acta-Artikel *Versuch über die Ursachen der Bewegungen der Himmelskörper* erklärte Leibniz 1689 den Begriff *unendlich klein* im Sinne von *unvergleichlich klein*, und zwar so klein, dass der Näherungsfehler vernachlässigbar sei.

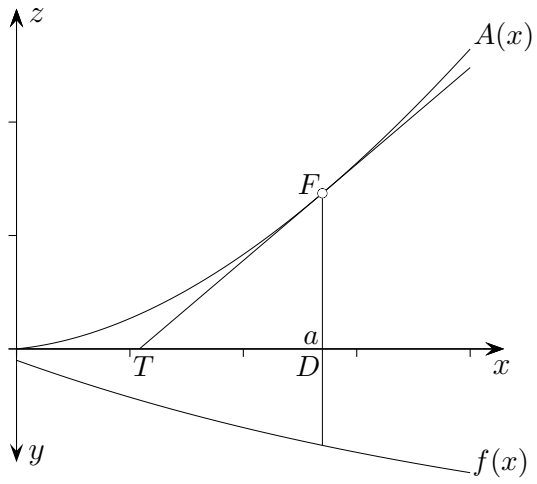
↑ Isaac Barrow und der Hauptsatz

In Barrow's *Geometrical Lectures* wurden die Erkenntnisse von Torricelli, Galileo und Roberval integriert und Tangenten, Bogenlängen und Flächen geometrisch detailliert samt Hauptsatz ($A'(x) = f(x)$, Integralfunktion $A(x)$ von f, also Fläche von f zwischen 0 und x) behandelt.
Da Leibniz auf seiner Londonfahrt 1673 ein Exemplar erwarb, stellten Mathematik-Historiker kontroverse Mutmaßungen über den Einfluss dieser Schrift auf Leibniz an. 1694 sagte Leibniz in einem Brief an l'Hospital, dass [die Lektüre von] Barrow für die Entwicklung seiner *Methoden* keine Hilfe war: „... je n'ay tiré aucun secours pour mes methodes".

Im Folgenden soll $A'(x) = f(x)$ nach Barrow bewiesen werden.

Seit Fermat war bekannt $\displaystyle\int_0^x t^n\,dt = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n.$

Die Vermutung des Hauptsatzes war daher naheliegend.
Für Barrow (und Archimedes/Roberval) konnten Kurven durch einen sich bewegenden Punkt erzeugt werden, dessen Geschwindigkeit durch die Tangentensteigung erfasst wird. Aus der Kenntnis der momentanen Änderungsrate kann auf die Weg-Zeit-Kurve durch Quadratur geschlossen werden.



Sei f eine monoton steigende Funktion.
Ihr Graph wurde der besseren Übersicht halber an der x-Achse gespiegelt.

Um $A'(a) = f(a)$ $\left(= \frac{DF}{TD}\right)$ nachzuweisen, wird der Punkt T so gewählt, dass gilt:

$TD = \frac{A(a)}{f(a)}$ (man möchte ja zeigen: $\frac{A(a)}{TD} = f(a)$)

Die Gerade TF ist dann Tangente (ist noch nachzuweisen) an $A(x)$ mit dem Berührpunkt F, ihre Steigung ist:

$$A'(a) = \frac{DF}{TD} = \frac{A(a)}{\frac{A(a)}{f(a)}} = f(a)$$

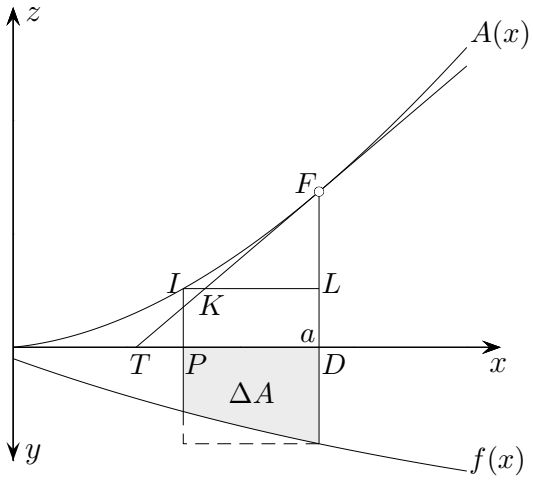
↑ Gerade TF ist Tangente, Nachweis

T wurde so gewählt, dass gilt:

$$TD = \frac{A(a)}{f(a)} \quad *$$

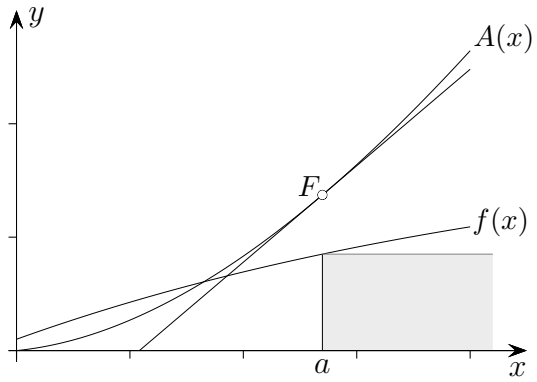
Es wird gezeigt, dass die Gerade TF unterhalb der monoton steigenden Funktion $A(x)$ verläuft.

Hierzu wird $KL < IL$ nachgewiesen, wobei P ein beliebiger Punkt auf der x-Achse zwischen T und D ist.



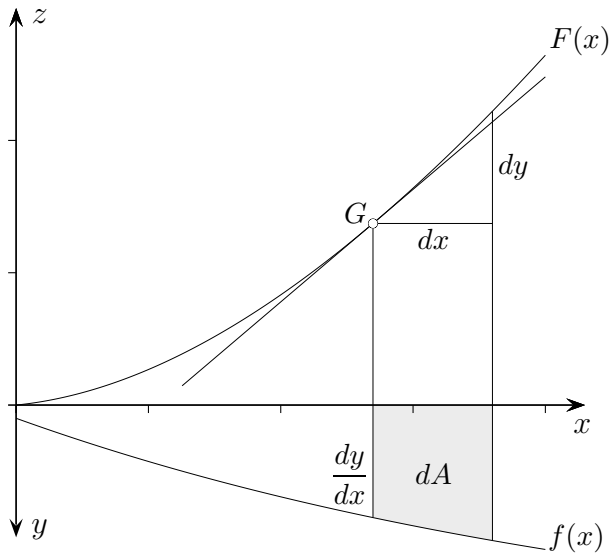
$\Delta A = LF$		$A(x)$ nimmt um ΔA zu.
$PD \cdot f(a) > LF \quad **$		f ist monoton steigend.
$\frac{A(a)}{TD} = \frac{LF}{KL}$		Strahlensatz
$f(a) = \frac{LF}{KL}$		siehe $*$
$f(a) < \frac{PD \cdot f(a)}{KL}$		mit $**$
$KL < PD = IL$		

Die Gerade verläuft auch im Bereich $x > a$ unterhalb (des Graphen) der Funktion $A(x)$. Denn für eine Funktion, die ab der Stelle a konstant $f(a)$ ist, ist die Integralfunktion eine Gerade mit der Steigung $f(a)$. Da f monoton wachsend ist, verläuft $A(x)$ oberhalb dieser Geraden (inhaltsgleich zu Barrow's Beweisführung, Darstellung abweichend).



↑ Barrow 2. Version des Hauptsatzes

In *Geometrical Lectures* gab Barrow einen 2. Beweis für den Hauptsatz an.
Sei f eine monoton steigende Funktion.
Ihr Graph wurde der besseren Übersicht halber an der x-Achse gespiegelt.
Die Voraussetzung lautet nun $F'(x) = f(x)$.
Das Diagramm von Leibniz in den Acta Eruditorum 1693 war ganz ähnlich.
Es ermöglicht in minimalistischer Weise Einsicht in die Zusammenhänge.



Leibniz-Notation, Integrationsgrenzen entfallen:

$$f = \frac{dF}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$dA = f\,dx = \frac{dy}{dx} \cdot dy = dy$$

$$\int f(x)\,dx = \int dA = \int dy = F(\text{rechte Grenze}) \qquad \text{Summation, } F(0) = 0$$

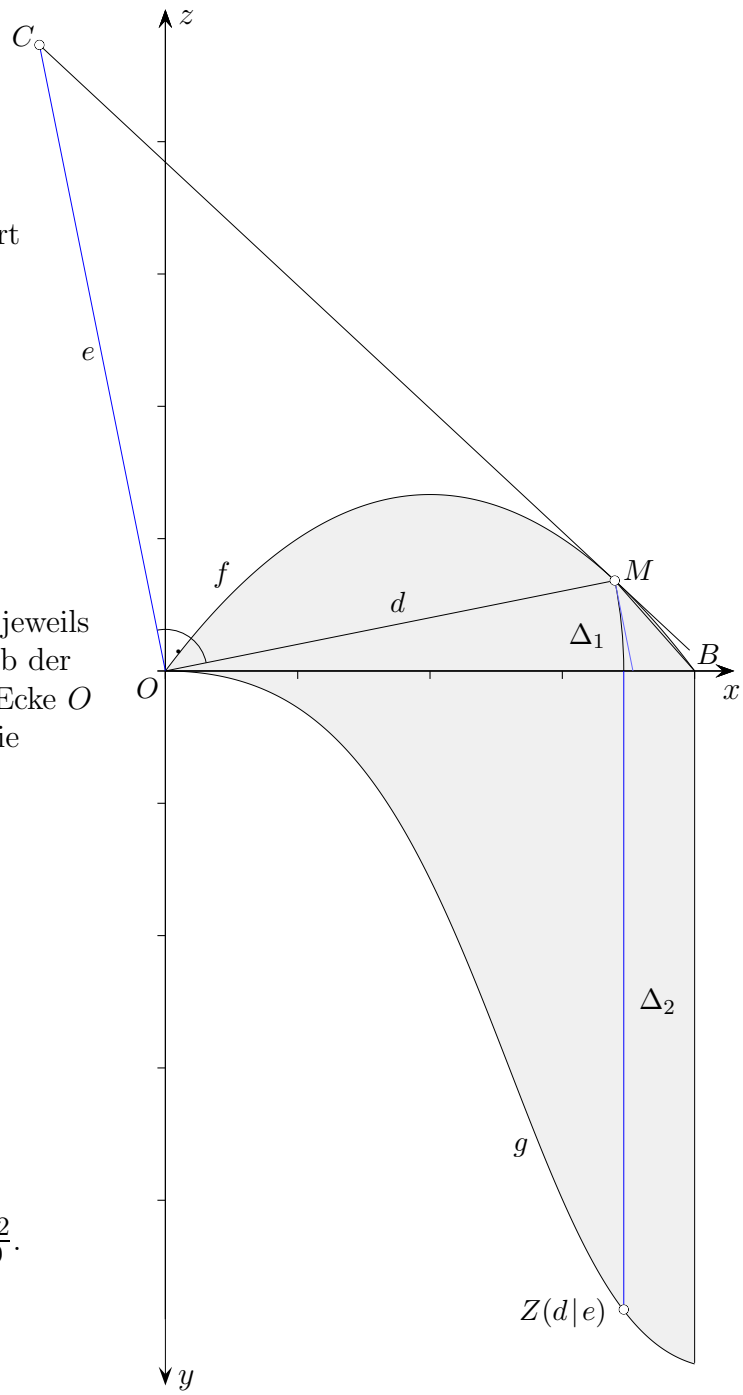
Barrow:
„Hence, since the sum of such rectangles as … [gemeint $f\,dx$] differs only in the least degree from the space … [gemeint Fläche unter dem Graphen von f] …, the theorem is quite obvious.“

Im Anhang skizzierte Barrow das Vorgehen mit Ober- und Untersummen.
Newton vervollständigte dies später (*Principia* Section 1, Lemma 2).

↑ Barrow Transmutation

Barrow's bevorzugte Methode für Quadraturen nannte Leibniz, er mag davon inspiriert worden sein, *Transmutation* (lat. Transformation). Ein typisches Beispiel ist das Problem 24 in Lektion XI. Ich formuliere es mit eigenen Worten.
Zu einer Kurve f wird eine Kurve g konstruiert. Die Fläche in der Grafik unterhalb der x-Achse ist dann doppelt so groß wie die Fläche oberhalb der x-Achse.

Zu M (Abstand d zum Ursprung) auf f ergibt sich C als Schnittpunkt der Tangente an f in M und der Orthogonalen zu OM durch O. Der Abstand von C zum Ursprung sei e. Damit erhalten wird den Punkt $Z(d\,|\,e)$ auf g.



Begründung

$$\text{Bogen } \widehat{MP} \parallel OC \quad \text{genähert}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} \approx \frac{\overline{PB}}{\overline{MP}}$$

$$\overline{OB} \cdot \overline{MP} \approx \overline{PB} \cdot \overline{OC}$$

$$\overline{OB} \cdot \overline{MP} \approx \overline{PB} \cdot \overline{PZ}$$

$$2 \cdot \Delta_1 \approx \Delta_2$$

Dieses Argument wird wiederholt, M wird jeweils das neue K. Dabei wird die Fläche oberhalb der x-Achse in Dreiecke mit der gemeinsamen Ecke O unterteilt. Jedes Dreieck ist halb so groß wie der zugehörige trapezförmige Streifen.

Sei $f(x) = -\frac{1}{3}x(x-4)$.
Mit einem CAS kann zu $M(t\,|\,f(t))$ der Schnittpunkt C und mit den Abständen $Z(e(t)\,|\,d(t))$ berechnet werden. Die Fläche unter der Parameterkurve g beträgt $\int_0^4 d(t) \cdot e'(t)\,dt = \frac{64}{9}$, die Fläche unter f $\frac{32}{9}$.

Lagrange und Laplace sahen in Pierre de Fermat 1607-1665 „le premier inventeur du calcul infinitésimal“, der starb als Newton seine Karriere begann. Poisson teilte diese Ansicht nicht.

J. M. Child übersetzte und kommentierte 1916 die *Geometrical Lectures* von Isaac Barrow. Im Vorwort steht:

„Isaac Barrow was the first inventor of the Infinitesimal Calculus, Newton got the main idea of it from Barrow by personal communication; and Leibniz also was in some measure indebted to Barrow's work, obtaining confirmation of his own original ideas, and suggestions for their further development, from the copy of Barrow's book that he purchased in 1673.“

Leibniz verfasste 1714 zur Geschichte und zum Ursprung der Differentialrechnung die Schrift Historia et Origo Calculi Differentialis.

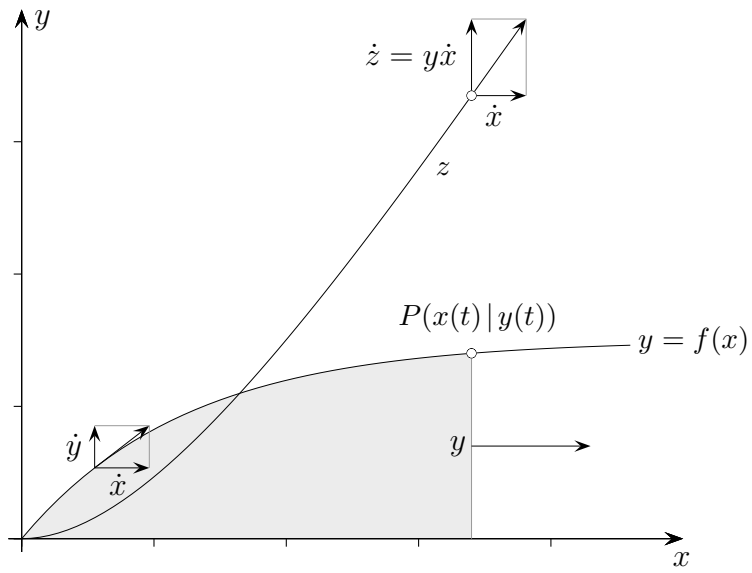
Newton und Leibniz lösten das Tangenten- und Quadraturproblem aus dem von Vorgängern verwendeten, häufig komplizierten geom. Kontext und fanden verständlich erscheinende Regeln, die sich für Anwendungen in hervorragendem Maße geeignet erwiesen. Newton dachte bei der Formulierung an seine unmittelbare Umgebung, Leibniz an die Menschheit. Dieser progressive *Infinitesimalkalkül* erweckte großes Interesse. Das Werk von Barrow verlor an Bedeutung. Er wird das wahrgenommen haben. Barrow erhielt einen Ruf nach London als Kaplan Karls II., überließ mit 39 Jahren Newton seine Professur und verfasste beachtete religiöse Schriften. Barrow starb mit 47 Jahren.
Es sei angemerkt, dass sich die Tangentenmethoden von Barrow und Sluze 1622-1685 ähneln und dass Gregory zeitgleich zu Barrow Äquivalentes zum Hauptsatz in seinem in Padua erschienenden Buch *Geometriae pars universalis* 1668 in geom. Form herleitete. Gregory: „Let the reader who has compared this work with others judge what is mine and what belongs to another.“
Im Zusammenhang mit einer Fragestellung hinsichtlich Bogenlängen bestimmte Gregory die Tangentensteigung einer Integralfunktion. Zuvor hatte van Heuraet die Berechnung einer Bogenlänge in seiner Schrift *De transmutatione curvarum linearum in rectas* (Über die Transformation von Kurven in gerade Linien) auf eine Flächenbestimmung zurückgeführt. Inhaltlich bedeutet das:

$$\textit{Bogenlänge} = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \approx \sum \sqrt{dx^2+dy^2} = \sum \sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}}\,dx = \sum \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

1670 teilte Gregory Collins eine Interpolationsformel und die daraus folgende Binomialreihe mit, die er unabhängig von Newton gefunden hatte. 1671 waren es mehrere Potenzreihen für z. B. $\tan x$, $\arctan x$, usw. mit der Anmerkung, er habe einige Kenntnisse von Newtons „universal method“. Mit den Reihen ist der Name Maclaurin verknüpft, der sie siebzig Jahre später auf ähnliche Weise wie Gregory herleitete. Der verstarb mit 37 Jahren.

↑

↑ Newton und der Hauptsatz



Eine Kurve wird dynamisch durch den Punkt P mit der Horizontalgeschwindigkeit $\dot{x}$ und der Vertikalgeschwindigkeit $\dot{y}$ erzeugt. Elimination des Parameters t ergibt $y = f(x)$. Die Tangentensteigung beträgt $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Die sich mit der Geschwindigkeit $\dot{x}$ bewegende Ordinate y begrenzt die Fläche z unter der Kurve f. Es gilt $\dot{z} = y\dot{x}$, oder $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = y$. Das ist der Hauptsatz $A'(x) = f(x)$.

Newtons unveröffentlichte Schrift *The Method of Fluxions and Infinite Series, with its* Application to the Geometry of Curve Lines von 1671, die unter engl. Mathematikern herumgereicht wurde, enthält eine umfangreiche Tabelle zur Bestimmung der Flächenfunktion, kurzer Auszug:

$$y = ax^{n-1} \qquad z = \frac{a}{n}x^n$$

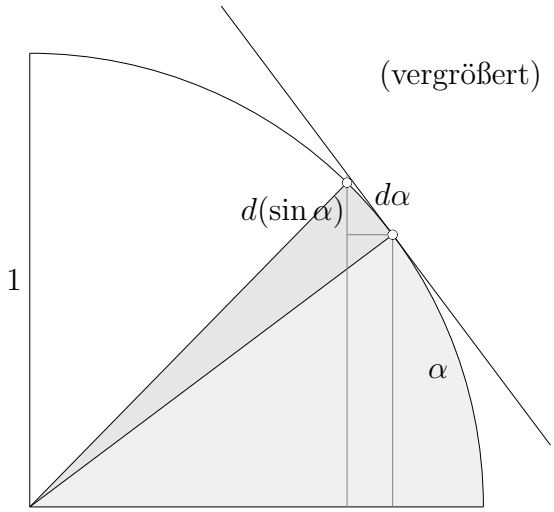
$$y = ax^{n-1}\sqrt{b + cx^n} \qquad z = \frac{2a}{3nc}(b + cx^n)^{3/2}$$

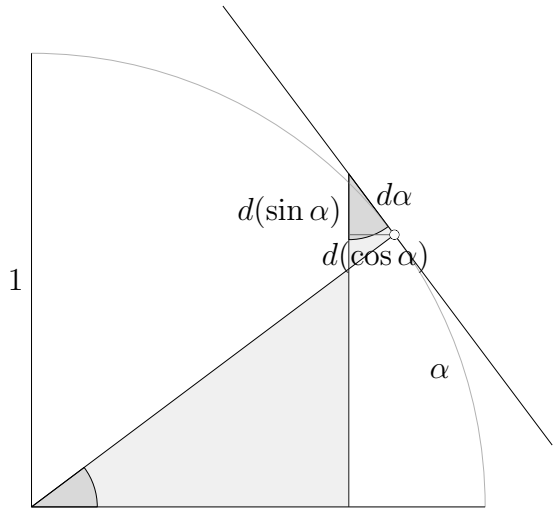
$$y = \frac{ax^{2n-1}}{\sqrt{b + cx^n}} \qquad z = \frac{2a}{nc}\Big(-\frac{2}{3}\frac{b}{c} + \frac{1}{3}x^n\Big)\sqrt{b + cx^n}$$

Die Schrift enthält Äquivalentes zur partiellen Integration, zur Substitution und vieles mehr.

Newtons Grenzwertbegriff
„Those ultimate ratios with which quantities vanish are not actually ratios of ultimate quantities, but limits which the ratios of quantities decreasing without limit are continually approaching, and which they can approach so closely that their difference is less than any given quantity, but which they can never exceed and can never reach before the quantities are decreased indefinitely.“
Lediglich die letzte Aussage weicht von der modernen Sichtweise ab.

↑ Ableitung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$



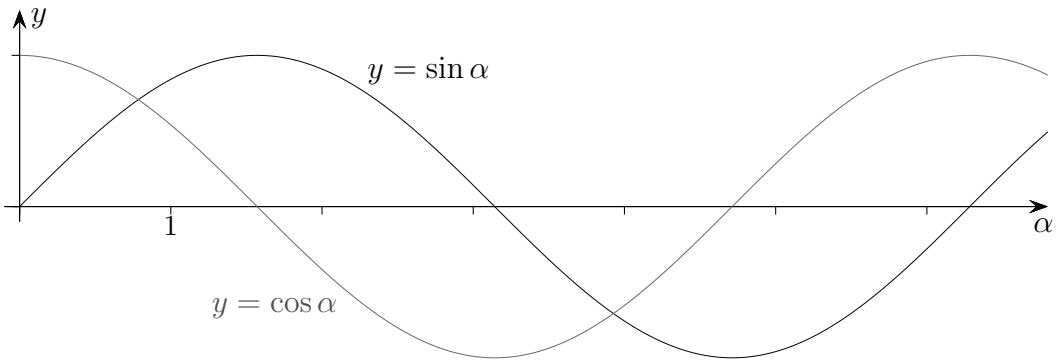


$d(\sin\alpha) = \sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha$

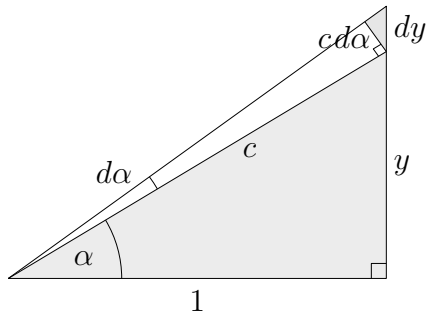
Die Schenkel stehen senkrecht aufeinander (gleiche Winkel, ähnliche Dreiecke).

$$\frac{d(\sin\alpha)}{d\alpha} = \cos\alpha \qquad \text{sowie} \quad d(\cos\alpha) = -\underbrace{(\cos\alpha - \cos(\alpha + d\alpha))}_{\text{pos.}}, \qquad \frac{d(\cos\alpha)}{d\alpha} = -\sin\alpha$$

Summation von $d(\sin\alpha) = \cos\alpha\, d\alpha$ führt zur Flächenberechnung $\int_a^b \cos\alpha\, d\alpha = \sin b - \sin a$.
Pascal hatte dies bereits 1659 ganz ähnlich hergeleitet.



↑ Ableitung von $\tan\alpha$



$$\frac{dy}{c\,d\alpha} = \frac{c}{1}$$

Im Grenzfall $d\alpha$ gegen Null sind die grau gefärbten Dreiecke ähnlich.

$$\frac{dy}{d\alpha} = c^2 = 1 + y^2$$

$$(\tan\alpha)' = 1 + \tan^2\alpha$$

$$x = \tan\alpha$$

$$\alpha = \arctan x$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\alpha}} = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

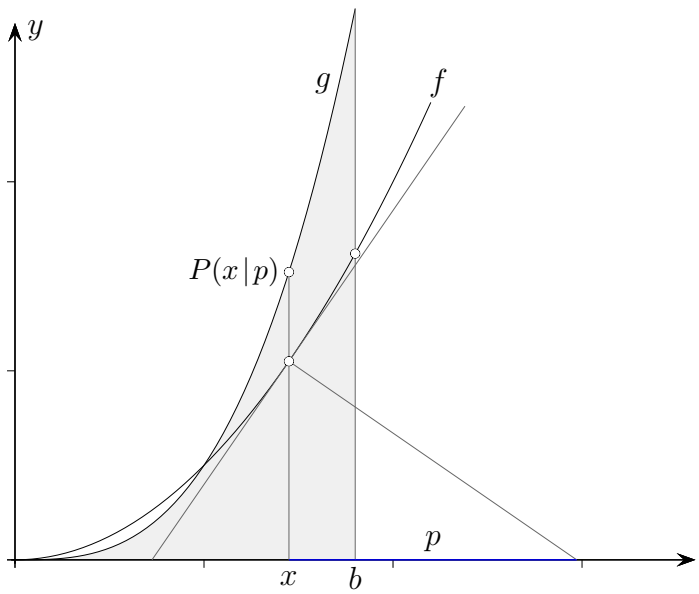
Der Kalkül *(Calculus)* besteht aus einem System von allgemein anwendbaren Regeln zur Lösung vielfältiger Infinitesimalprobleme. Aus verstreuten Einzelergebnissen haben Newton und Leibniz allgemeine, außerordentlich leistungsfähige, richtungsweisende Methoden entwickelt. Mit Leibniz' Bezeichnungen werden Zusammenhänge intuitiv widergespiegelt. Er meinte denn auch, sein Kalkül führe *presque sans meditation* zu Resultaten und enthebe einen der Notwendigkeit, *de travailler avec l'imagination.*

↑ Beweis eines Satzes von Barrow

In England erschien 1685 ein Buch von John Craig, der unter anderem auf Barrows und Leibniz' Bestimmung von Tangenten Bezug nahm. Anlässlich einer Stellungnahme verfasste Leibniz 1686 die Schrift De geometria recondita et analysi indivisibilium ...
(Die hintergründige Geometrie und Analysis des Indivisiblen ...). Diese enthält den folgenden zweizeiligen Beweis eines Satzes von Barrow, *Geometrical Lectures* Problem 1 in Lektion XI, der ihn kompliziert geom. begründete.

$$pdx = ydy$$

$$\int pdx = \int ydy = \frac{1}{2}y^2 \qquad\qquad d\frac{1}{2}y^2 = ydy$$



Zu einer Kurve f wird eine Kurve g konstruiert. Zu einer Subnormalen von f (blau) gehört der Punkt $P(x\,|\,p)$ auf g. Es gilt dann $\int_0^b g(x)\,dx = \frac{1}{2}\big(f(b)\big)^2$.

Mit $p = f(x)f'(x)$ heißt das $\int_0^b f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\big(f(b)\big)^2, \qquad \Big(\frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2\Big)' = f(x)f'(x).$

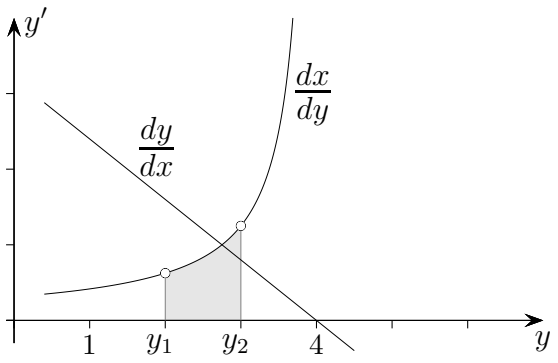
Leibniz verwendete keine Ableitungsfunktionen.

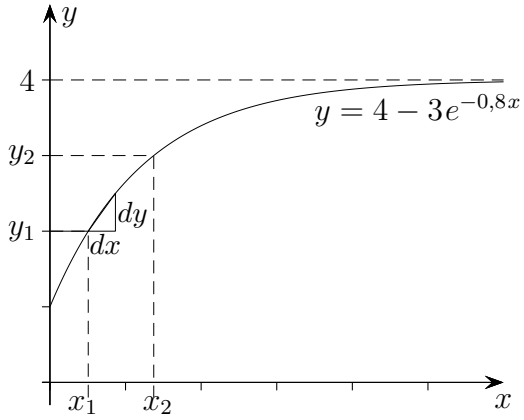
Der Zusammenhang sollte uns nun verständlich sein.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{f(x)} \qquad\qquad f'(x) = \frac{p}{f(x)}$$

$$pdx = f(x)dy$$

↑ Geschicktes Rechnen mit Differentialen





Es gilt: $\displaystyle\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{k \cdot (G-y)}\, dy = x_2 - x_1, \quad y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,\ y$ monoton steigend

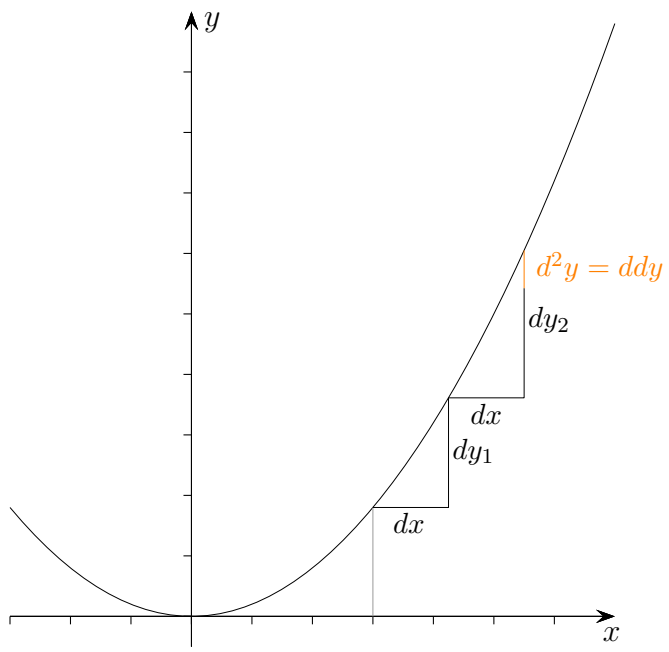
Der Sachverhalt kann verallgemeinert werden.

$$\begin{aligned}
y &= 4 - 3e^{-0{,}8x} \\
\frac{dy}{dx} &= 0{,}8(4-y) \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{0{,}8(4-y)} \\
\int_2^3 \frac{1}{0{,}8(4-y)}\, dy &= \int_2^3 \frac{dx}{dy}\, dy = \int_2^3 dx \\
&= x_2 - x_1 \\
&= 1{,}3732\ldots - 0{,}5068\ldots = 0{,}8664\ldots
\end{aligned}$$

logistisch

$$\begin{aligned}
y &= \frac{G}{1+e^{k(a-x)}} \qquad\qquad G = 4,\ k = 0{,}8,\ a = 3 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{k}{G}\, y(G-y) \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{G}{ky(G-y)} \\
\int_2^3 \frac{G}{ky(G-y)}\, dy &= \int_2^3 \frac{dx}{dy}\, dy = \int_2^3 dx \\
&= x_2 - x_1 \\
&= 4{,}3732\ldots - 3 = 1{,}3732\ldots
\end{aligned}$$

↑ Differential 2. Ordnung



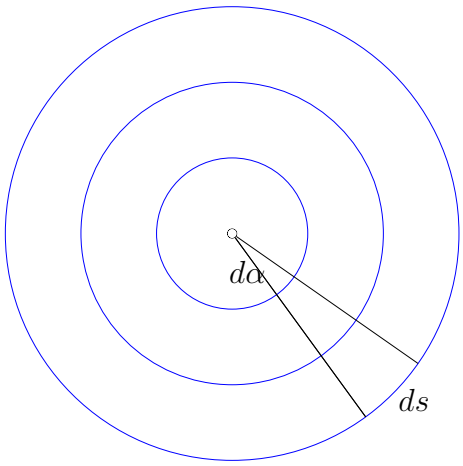
Zum Leibniz' Kalkül gehören auch höhere Differentiale.
Das ermöglichte z. B. die Berechnung des Krümmungskreises.
Die Graphik veranschaulicht ein Differential 2. Ordnung.
$d^2y = ddy$ ist die Differenz einer Differenz.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx}}{dx} \\
&= \frac{dy_2 - dy_1}{(dx)^2} \\
&= \frac{d^2y}{(dx)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dx^3 &= (x + dx)^3 - x^3 \\
ddx^3 &= \big((x + 2dx)^3 - (x + dx)^3\big) - \big((x + dx)^3 - x^3\big) \\
&= 6x(dx)^2 + 6(dx)^3 \\
\frac{ddx^3}{(dx)^2} &= 6x
\end{aligned}$$

Die Formulierungen $dy = f'(x)dx$ und $d^2y = f''(x)dx^2$ wurden erst möglich, als der Funktionsbegriff im 18. Jahrhundert durch Johann Bernoulli und Euler sich gegenüber dem geometrischen Kurvenbegriff durchsetzte und Lagrange die Bezeichnungen f' und f'' einführte.

↑ Krümmung



$$r = \frac{ds}{d\alpha}$$

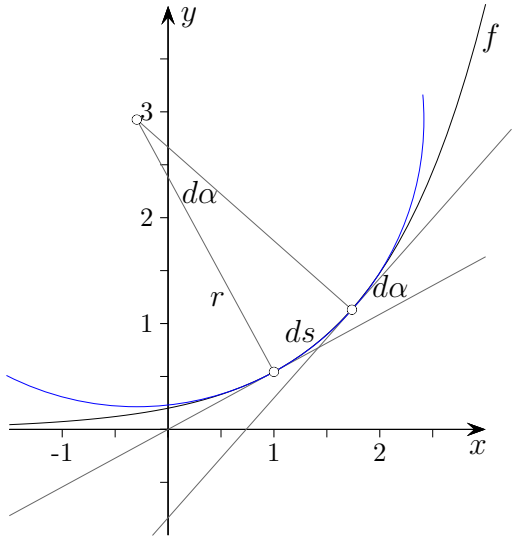
$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\alpha = \arctan f'(x)$$

$$d\alpha = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$ds = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

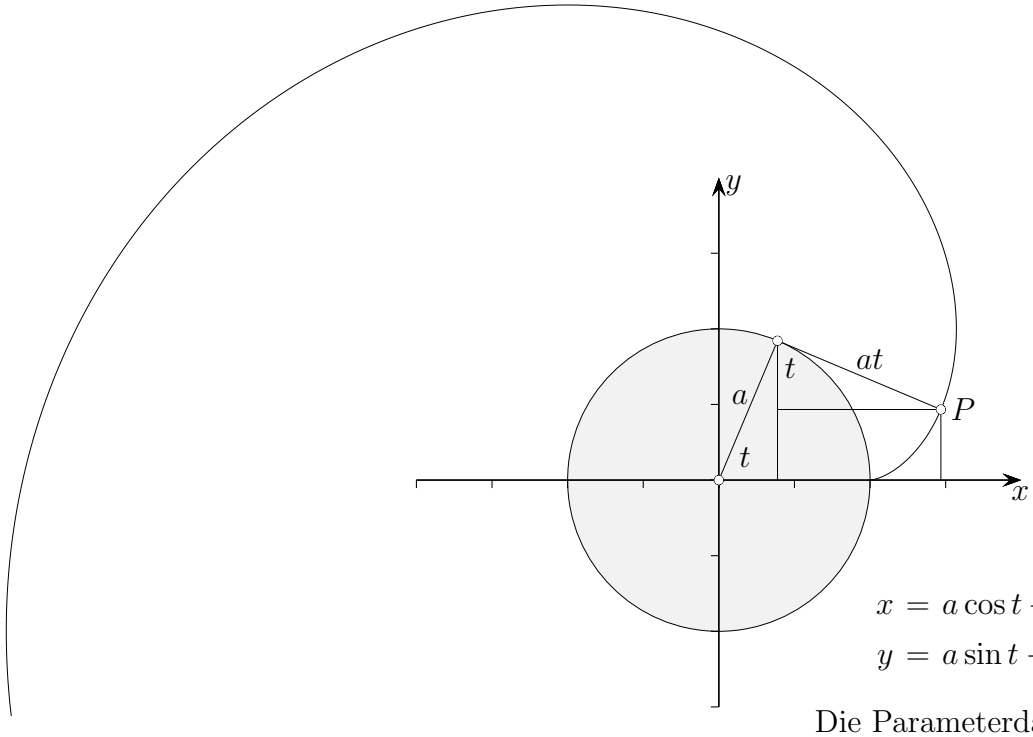
$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{1,5}}$$



Der Radius eines (Näherungs-)Kreises ist ein anschauliches Maß für die Krümmung, je größer der Radius, um so kleiner die Krümmung.
Das führt zur Definition $\kappa = \frac{1}{r}$, r ist der Radius des Krümmungskreises.
r wird mit $r = \frac{ds}{d\alpha}$, bzw. $\frac{1}{r}$ mit $\frac{d\alpha}{ds}$ berechnet, also der infinitesimalen Änderung des Tangentenwinkels bezogen auf die infinitesimale Bogenlänge.

Die Krümmung ist die Änderungsgeschwindigkeit der Tangentenrichtung, wenn die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird.

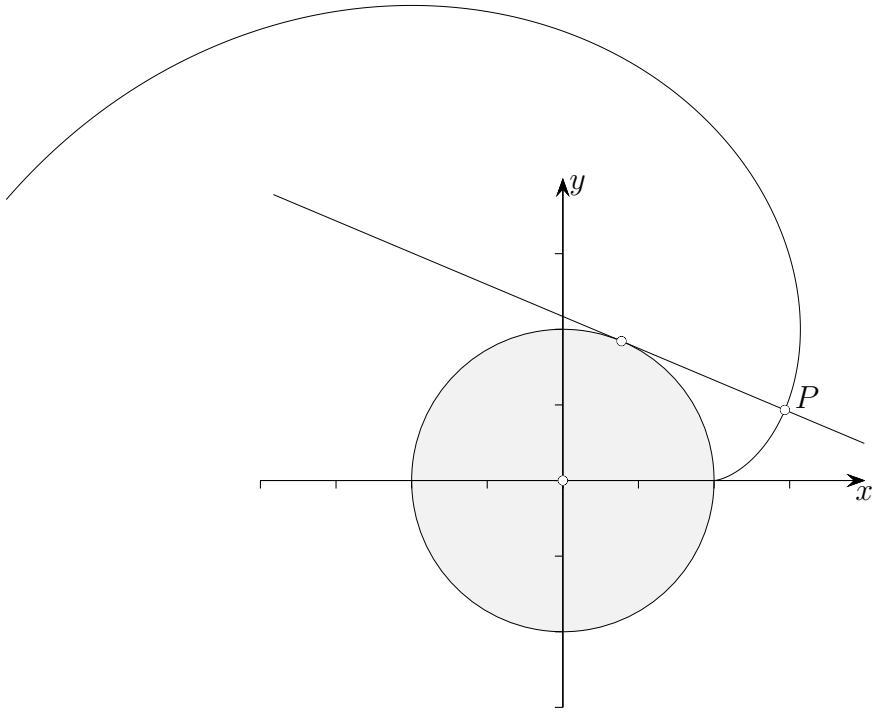
↑ Kreisevolvente



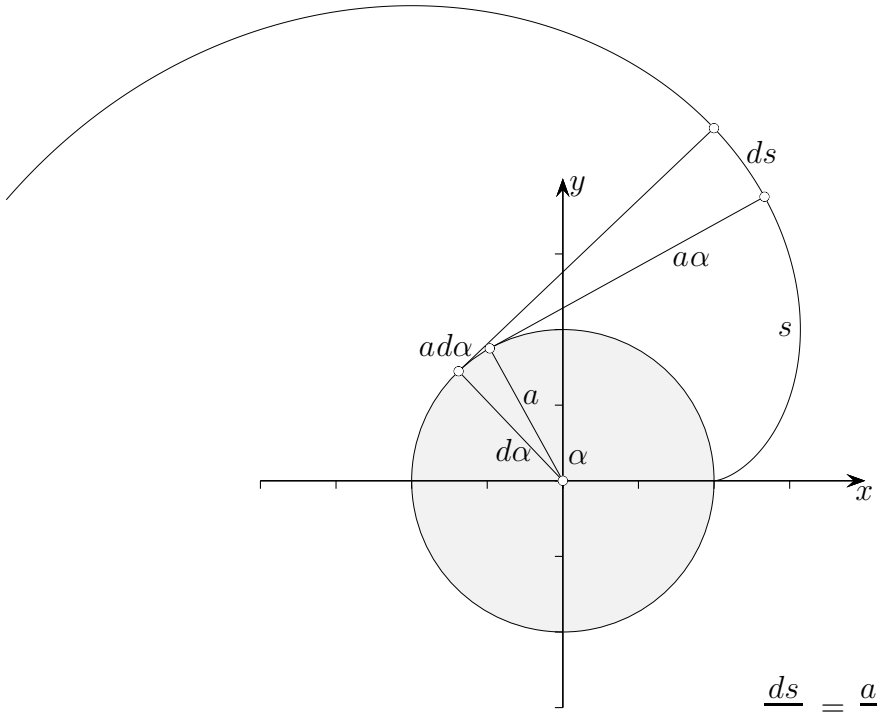
$$x = a\cos t + at\sin t$$
$$y = a\sin t - at\cos t$$

Die Parameterdarstellung
ist aus der Grafik ersichtlich.

Die Kreisevolvente ist die Kurve, die das Fadenende P beschreibt,
wenn man den Faden gestrafft vom Umfang eines Kreises abwickelt.
Anstatt einen Faden abzuwickeln, kann auch eine Gerade auf einem Kreis abgerollt werden.



↑ Kreisevolvente



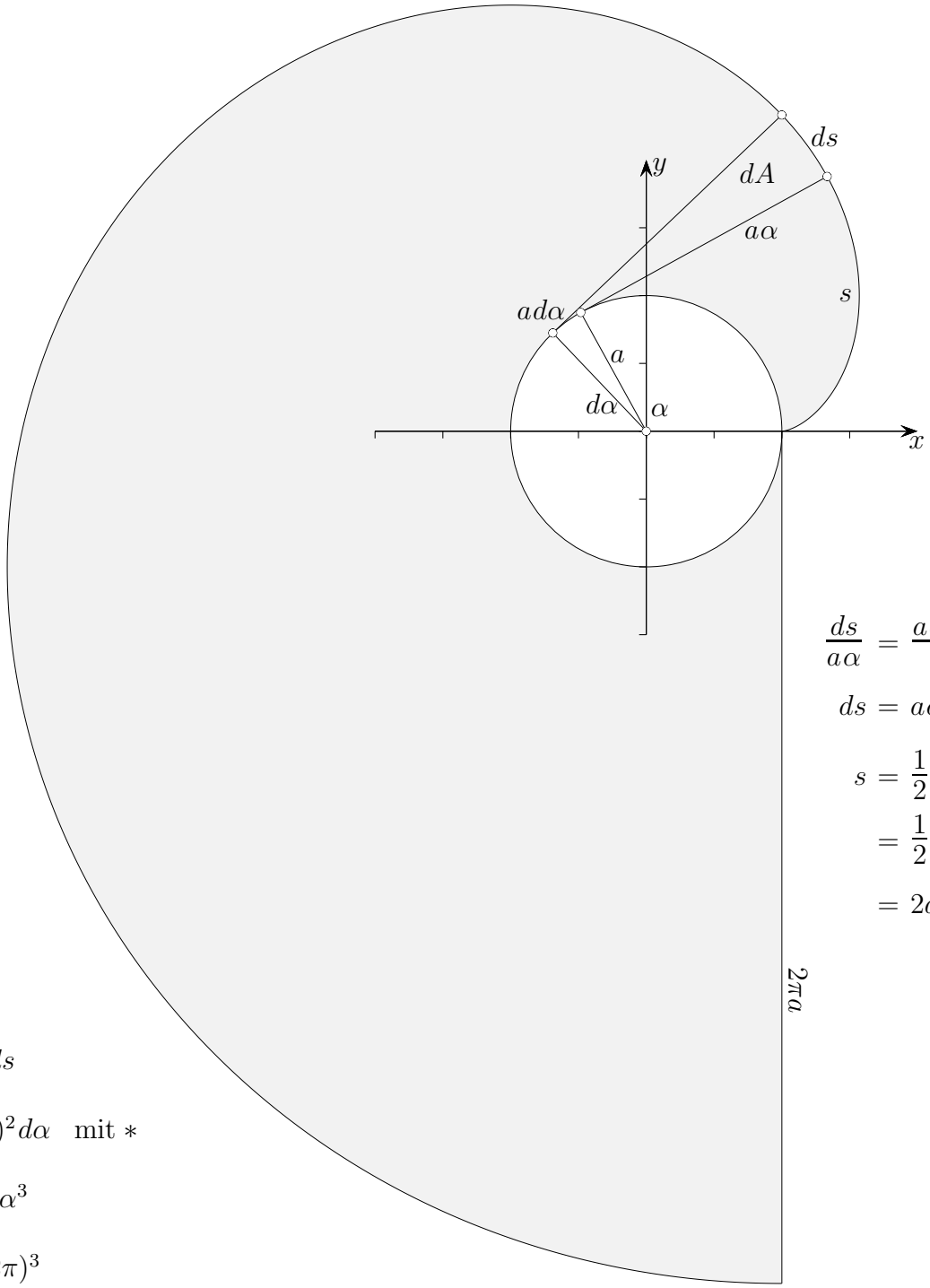
$$\begin{aligned}\frac{ds}{a\alpha} &= \frac{a\,d\alpha}{a}\\ ds &= a\alpha\,d\alpha\\ s &= \frac{1}{2}a\alpha^2 \quad *\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\alpha} &= a\alpha\\ &= R \quad \text{Krümmungskreisradius}\end{aligned}$$

Die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte heißt Evolute.
Die Evolute der Kreisevolvente ist der Ausgangskreis.

Mit $*$ und $R = a\alpha$ kann der Krümmungskreisradius in Abhängigkeit von der Bogenlänge dargestellt werden $R = \sqrt{2as}$.
Diese *natürliche Gleichung* erfasst die Form der Kreisevolvente, unabhängig vom Koordinatensystem.

↑ Kreisevolvente



$$\frac{ds}{a\alpha} = \frac{ad\alpha}{a}$$

$$ds = a\alpha\, d\alpha \quad *$$

$$s = \frac{1}{2}a\alpha^2$$

$$= \frac{1}{2}a(2\pi)^2$$

$$= 2a\pi^2$$

$$dA = \frac{1}{2}a\alpha\, ds$$

$$= \frac{1}{2}(a\alpha)^2 d\alpha \quad \text{mit } *$$

$$A = \frac{1}{2}a^2\frac{1}{3}\alpha^3$$

$$= \frac{1}{6}a^2(2\pi)^3$$

$$= \frac{4}{3}a^2\pi^3$$

Bezug zum Kreis K mit $r = 2\pi a$: $s = \frac{1}{2}K_{\text{Umfang}}$, $A = \frac{1}{3}K_{\text{Inhalt}}$
Diese Berechnungen sind in den Vorlesungsaufzeichnungen
von Johann Bernoulli 1691/92 enthalten.

$\uparrow$ Substitution

$$\int \sqrt{2x+1}\ dx =$$

$$\begin{aligned} u &= 2x+1 \\ du &= 2\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \sqrt{u} \cdot \tfrac{1}{2}\ du \\ &= \ldots = \tfrac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\ dx =$$

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x} \\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\ dx &= 2u\,du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{2u}{u+1}\,du \qquad \Big| \quad \frac{u}{u+1} = \frac{u+1-1}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1} \\ &= 2 \cdot (u - \ln(u+1)) \\ &= 2 \cdot (\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)) \end{aligned}$$

↑ Bemerkungen zur Didaktik

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 \\
y + dy &= (x + dx)^2 && \text{Wir vergößern } x \text{ und } y \text{ ein wenig.} \\
&= x^2 + 2x\,dx + (dx)^2 \\
dy &= 2x\,dx && y = x^2 \text{ wird subtrahiert, Differentiale höherer Ordnung entfallen.} \\
\frac{dy}{dx} &= 2x
\end{aligned}
$$

Bis zum Ende des 17. Jahrhunderts waren x und y noch gleichberechtigt. Diese Sichtweise ist für den Kalkül sehr vorteilhaft. Der funktionale Zusammenhang wurde erstmalig 1698 von Johann Bernoulli erwähnt.
In der 4. Zeile wird statt $\approx$ das Gleichheitszeichen beibehalten, da der Fehler ϵ für kleine dx vernachlässigbar ist. Hier geht die offensichtliche lineare Approximierbarkeit von $y = x^2$ ein (Proportionalitätsfaktor $2x$). Nur die letzte Zeile ist problematisch.
$\frac{dy}{dx}$ kann als Quotient verschwindend kleiner Näherungs-Größen dx und dy ($dx \neq 0$) gelesen werden (z. B. zweckmäßig beim Aufstellen einer Differenzialgleichung); $\frac{dy}{dx}$ ist zugleich ein neues Symbol für die Tangentensteigung $f'(x)$ als Grenzwert für $dx \to 0$ mit $dx \neq 0$.
Die zu Fehlinterpretationen verleitende, jedoch sehr suggestive Schreibweise wurde beibehalten. Als 4. Zeile wäre $dy = 2x\,dx + (dx)^2$ möglich und weiter $\frac{dy}{dx} = 2x + dx$. Vermeintlich führt $dx = 0$ zur Tangentensteigung. Wegen dieses scheinbaren Widerspruchs wurde die Methode anfänglich heftig kritisiert.

Marquis de l'Hospital verfasste 1696 das erste Buch zur Differentialrechnung mit dem bezeichnenden Titel *Analyse des infiniment petits*. Es basiert auf einem Skript von Johann Bernoulli. Die Brüder Bernoulli hatten Probleme, Leibniz' erste Abhandlung zur Differentialrechnung zu verstehen, „une énigme plutôt qu'une explication". Jakob Bernoulli wandte sich 1687 an Leibniz und bat ihn um Erläuterungen. Leibniz befand sich jedoch in Italien und konnte erst drei Jahre später antworten. In der Zwischenzeit hatten sich die Brüder den Kalkül selbstständig angeeignet.

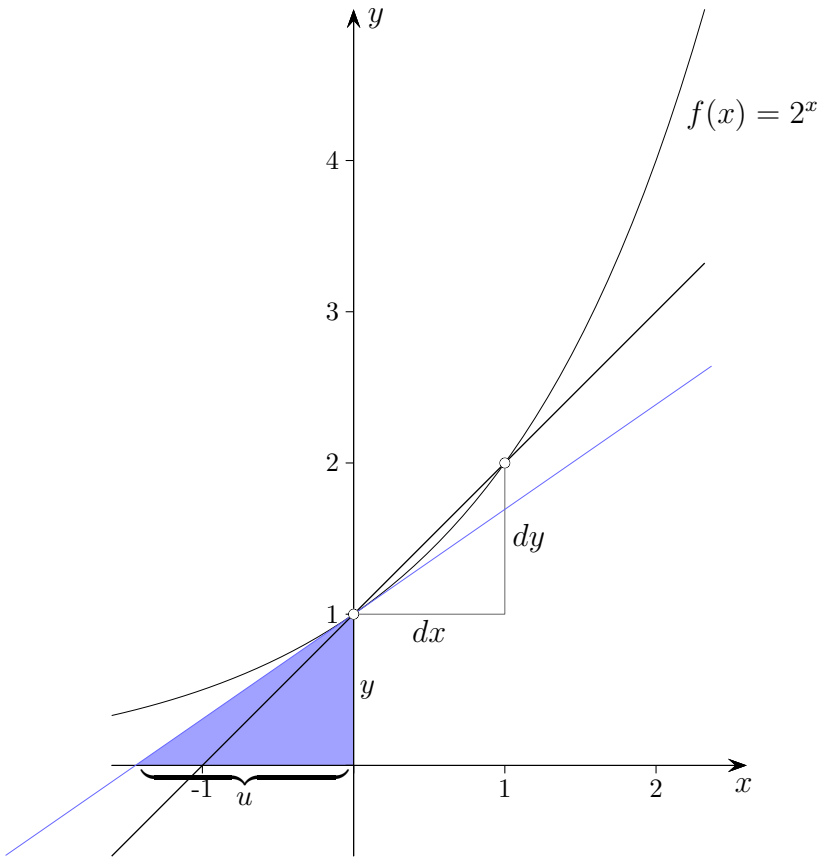
Für Leibniz war das Rechnen mit Differentialen eine Kurzfassung eines Kalküls endlicher Größen und Grenzwerte. Um dies zu veranschaulichen, verwendete er verschiedene Interpretationen von Infinitesimalen (unendlich kleine, vernachlässigbare, unvergleichbar kleine Größen, kleiner als irgendeine angebbare Größe). Unendlich klein heißt in Relation zu den übrigen Größen so klein, dass der Näherungfehler vernachlässigbar ist. Seine Bemühungen waren wenig erfolgreich. Widersprüchliche Vorstellungen konnten nicht verhindert werden, taten aber der rasanten Ausbreitung des *calculus* keinen Abbruch.

Für den Unterricht kann es bereichernd sein, die Anfänge der Analysis zu thematisieren und den Leibniz-Kalkül der h-Methode gegenüber zu stellen. Die grundlegende Eigenschaft der linearen Approximierbarkeit sollte hervorgehoben werden (Funktionszoom).
Den Hauptsatz wird man zunächst mit Hilfe linearer Funktionen vermuten und überprüfen (Integralfunktionen können elementargeometrisch gefunden werden) und in das Thema Änderungsrate und Bestand einbetten. Die dahinter stehende Gesetzmäßigkeit ist der Grafik auf Seite 2 zu entnehmen. Eine Fehlerabschätzung z. B. für eine auf dem Intervall $[a, b]$ monoton steigende Funktion ist mit $\epsilon \leq f(b) \cdot dx$ leicht möglich. Quadraturen nach Fermat mit expliziter Ermittlung von Unter- bzw. Obersumme sind für den Aufbau nicht erforderlich.

↑ Tangentensteigung als Grenzwert

Tangentensteigung für $f(x) = 2^x$ an der Stelle $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
m_1 &= 1 \\
m_2 &= 0{,}82842\ldots \\
m_4 &= 0{,}75682\ldots \\
m_8 &= 0{,}72406\ldots \\
m_{16} &= 0{,}70838\ldots \\
m_{32} &= 0{,}70070\ldots \\
m_{64} &= 0{,}69691\ldots \\
m_{128} &= 0{,}69502\ldots \\
m_{256} &= 0{,}69408\ldots \\
m_{512} &= 0{,}69361\ldots \\
m_{1024} &= 0{,}69338\ldots \\
m_{2048} &= 0{,}69326\ldots \\
m_{4096} &= 0{,}69320\ldots \\
m_{8192} &= 0{,}69317\ldots \\
m_{16384} &= 0{,}69316\ldots \\
m_{32768} &= 0{,}69315\ldots \\
\longrightarrow \quad & \quad 0{,}693147\ldots
\end{aligned}
$$



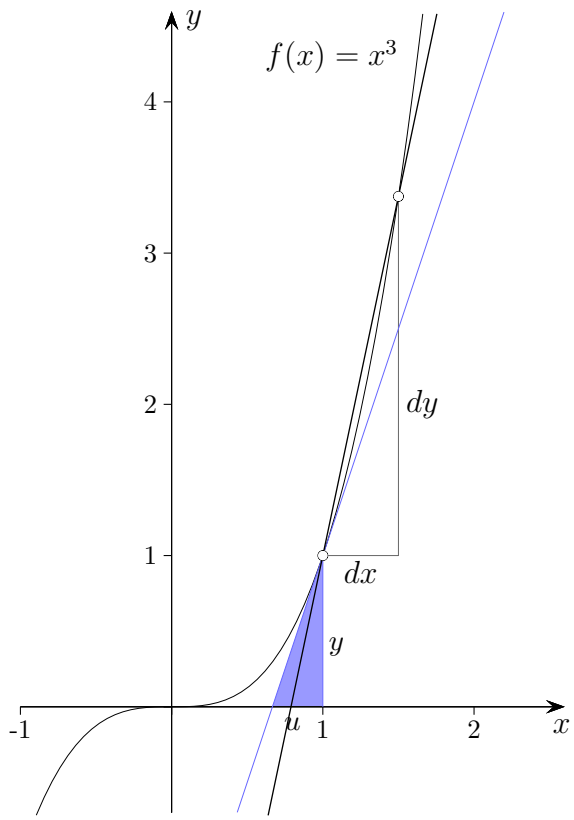
Die Folge der Differenzenquotienten $m_n = \dfrac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$ strebt für $dx = \dfrac{1}{n} \to 0$ gegen $\dfrac{dy}{dx}$.
Die Folge erzeugt hier den Grenzwert $\ln(2)$. Es gilt $e^{\ln(2)} = 2$.
Mit größer werdendem n werden immer weitere gültige Nachkommastellen enthüllt.
Gleichwohl ist von einer irrationalen Zahl stets nur ein endliches Anfangsstück sichtbar.
Die Tangentensteigung wird als Bruch y/u veranschaulicht (y-Wert/Subtangente, siehe blau gefärbtes Steigungsdreieck der Tangente).

$$\ln(2) = 0{,}693147180559945309417^{2^{x}}$$

↑ Grenzwert

Tangentensteigung für $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
m_2 &= 4{,}75 \\
m_4 &= 3{,}8125 \\
m_8 &= 3{,}390625 \\
m_{16} &= 3{,}191406\ldots \\
m_{32} &= 3{,}094726\ldots \\
m_{64} &= 3{,}047119\ldots \\
m_{128} &= 3{,}023498\ldots \\
m_{256} &= 3{,}011734\ldots \\
m_{512} &= 3{,}005863\ldots \\
m_{1024} &= 3{,}002930\ldots \\
m_{2048} &= 3{,}001465\ldots \\
m_{4096} &= 3{,}000732\ldots \\
m_{8192} &= 3{,}000366\ldots \\
m_{16384} &= 3{,}000183\ldots \\
m_{32768} &= 3{,}000091\ldots \\
\longrightarrow \quad & \quad 3{,}000000\ldots
\end{aligned}
$$



Die Folge der Differenzenquotienten $m_n = \dfrac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$ strebt für $dx = \dfrac{1}{n} \to 0$ gegen $\dfrac{dy}{dx}$.
Die Folge erzeugt (konvergiert gegen) hier den Grenzwert 3.
Die Tangentensteigung $\dfrac{dy}{dx}$ wird durch den Bruch y/u (y-Wert/Subtangente, siehe blau gefärbtes Steigungsdreieck der Tangente) veranschaulicht.
Die Beschäftigung mit reellen Zahlen und Grenzwerten ermöglicht ein intuitives Verständnis für Grenzprozesse, siehe hier.

$$3 = 3{,}000000000000000000000000\ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} = \frac{(x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3) - x^3}{dx} = 3x^2 + 3x\,dx + (dx)^2 = 3x^2$$

Diese Rechnung ermittelt die stetige Ergänzung für $dx \to 0$ $(dx \neq 0)$.
Für Leibniz war es das Kontinuitätsprinzip:
„Wenn die Fälle sich kontinuierlich nähern, so dass letzten Endes der eine in den anderen übergeht, so muss das auch für die entsprechenden abhängigen Größen der Fall sein.“

↑ Zur Begründung des Infinitesimalkalküls durch Leibniz

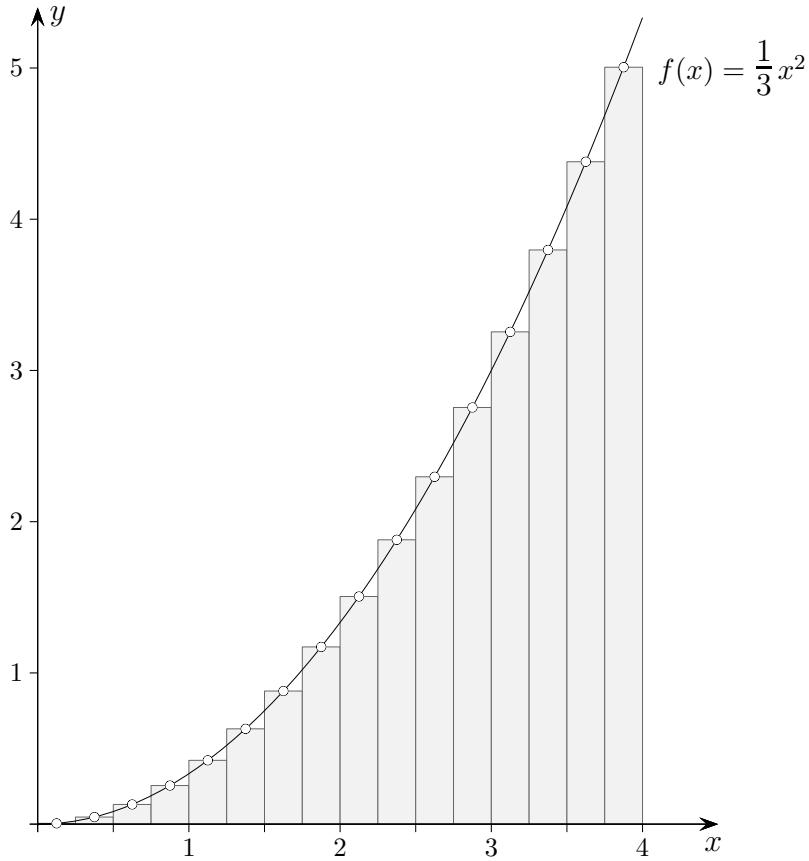
Leibniz publizierte die Regeln seines Differentialkalküls ohne Begründung. Jakob und Johann Bernoulli und Marquis de l'Hospital betrachteten die Größen dx und dy als unendlich klein und real existierend. Diese simplifizierende Sichtweise trug zur raschen Verbreitung des Kalküls bei und ist auch heute noch anzutreffen. Sie wurde bereits von Leibniz zurückgewiesen. Vertreter der Non-Standard-Analysis, in der infinitesimale Rechnungen fundiert sind, versuchen gleichwohl eine Vereinnahmung von Leibniz. Newton versuchte, infinitesimale Größen zu verbannen.
Leibniz war von der Zuverlässigkeit seines Kalküls überzeugt, eine schräge Interpretation wäre für die Anwendung ohne Belang. Er rechtfertigte seinen *Calculus* in einzelnen Schriften und Briefen. Zusammengefasst:
Eine Tangente wird als Grenzfall einer Sekante gesehen. Der Übergang erfolgt stetig.
dx ist im Vergleich zu x *unendlich klein* im Sinne von *unvergleichbar klein*, bzw. *undefinierbar klein*, d. h. dx ist unbegrenzter Verminderung fähig. dx kann so klein gewählt werden, dass der Näherungsfehler kleiner ist als jede vorgegebene Zahl.
Der Bezug zu den reellen Zahlen und insbesondere zum Problem, eine ↑Gleichheit nachzuweisen, ist offensichtlich. Unendliche, konvergente Reihen sind Erzeugungsvorschriften für reelle Zahlen, z. B. die Leibniz-Reihe für $\frac{\pi}{4}$. Der Bestimmung der Tangentensteigung liegt auch ein Grenzprozess zugrunde, d. h. zu einer approximierenden Folge von Sekantensteigungen ($dx \to 0$) wird die hierdurch definierte reelle Zahl ermittelt. In einfachen Fällen erfolgt die Grenzwertbildung durch das Setzen von $dx = 0$. Auch wenn erst 150 Jahre später das Kriterium formuliert wurde, welche Folgen eine Zahl definieren (einen Grenzwert besitzen), musste für Leibniz seine Grundlegung des Kalküls für glatte Kurven hinreichend erscheinen. Für diese Kurven existieren ersichtlich Tangenten, wie beim Kreis und der Ellipse (seit Cauchy wird die Steigung definiert).

In einem Brief an Varignon 1702 schreibt Leibniz, dass die *unendlich kleinen Linien* als ideale Begriffe gebraucht werden können. Mit infinitesimalen Zahlen (Differentialen) kann analog wie mit imaginären Zahlen, von denen er sagt, dass sie „in der Natur“ bzw. als „reale Dinge“ nicht gibt, nach festen Regeln in abkürzender und symbolischer Weise gerechnet werden. „Nos infiniment petits“ sind als ideale Gegenstände oder wohlfundierte Fiktionen zu betrachten „comme des choses ideales ou comme des fictions bien fondée“. Um auf die der Infinitesimalrechnung zugrunde liegenden Grenzprozesse hinzuweisen, führt Leibniz an, dass z. B. 2 gleich $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 \ldots$ ist. Die Teilsummen unterscheiden sich beliebig wenig von 2 und somit besteht Gleichheit. Einen infinitesimalen Bruch oder unendl. großen Nenner gibt es hier nicht.
Bei Veröffentlichungen war das Weglassen von Lösungswegen im 17. Jh. häufig geübte Praxis. Johann Bernoulli kritisierte deswegen Fatio de Duillier.
„Es wäre wünschenswert, dass er die Methode, die er verfolgt hat [bei der Konstruktion von Körpern geringsten Strömungswiderstands], hinzugefügt hätte, zum einen, damit klar geworden wäre, dass sie korrekt ist, zum anderen, damit wir hätten sehen können, ob er nicht mit derselben Verworrenheit laboriert [wie zuvor].“

Leibniz veröffentlichte 1691 einen Text zur Kettenlinie in den Acta, verschwieg aber die Methode, mit der er sie entdeckte. Diese teilte er seinem Florentiner Briefpartner v. Bodenhausen mit und ergänzte: „Es ist aber guth, dass wann man etwas würcklich exhibiret, man entweder keine demonstration gebe, oder eine solche, dadurch sie uns nicht hinter die schliche kommen.“

Leibniz' sporadische Versuche, anderen den *Calculus* verständlich zu erkären, waren kaum erfolgreich. Die Hinweise, z. B. auf die Archimedische Exhaustions-Methode, waren nicht ausreichend. Selbst für Euler 1707-1783, der so viele Beiträge zu Differentialgleichungen verfasst hat, waren infinitesimale Größen „absolute Nullen“, da sie kleiner seien als jede endliche Größe. Aber auch: Zur Berechnung einer Dezimalzahl kann eine infinitesimale Größe aus einer Folge kleiner werdender Zahlen bestehen.

$$
\begin{aligned}
s_8 &= 7{,}0833333\ldots \\
s_{16} &= 7{,}1041666\ldots \\
s_{32} &= 7{,}1093750\ldots \\
s_{64} &= 7{,}1106770\ldots \\
s_{128} &= 7{,}1110026\ldots \\
s_{256} &= 7{,}1110839\ldots \\
s_{512} &= 7{,}1111043\ldots \\
s_{1024} &= 7{,}1111094\ldots \\
s_{2048} &= 7{,}1111106\ldots \\
s_{4096} &= 7{,}1111110\ldots \\
\longrightarrow \quad & \quad 7{,}1111111\ldots = 7\tfrac{1}{9}
\end{aligned}
$$



s_n ist Inhaltssumme der Rechtecksflächen für n Unterteilungen des Intervalls $[0;4]$. Die Folge erzeugt in eindeutiger Weise den Grenzwert (Inhalt der Fläche unter dem Graphen im Bereich $[0;4]$).

Leibniz hoffte, mit seiner umfangreichen Schrift *De Quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* [Arithmetische Quadratur des Kreises, der Ellipse und der Hyperbel, aus der eine Trigonometrie ohne Tafeln folgt] Mitglied der Académie Royale des Sciences zu werden. Dazu kam es nicht, Leibniz musste Paris 1676 verlassen.
Die Schrift erschien erst 1993 zum ersten Mal vollständig im Druck.
In ihr reflektiert Leibniz Cavalieris Indivisiblenmethode (lat. indivisibilis unteilbar, ein Körper ist aus unendlich vielen unendlich dünnen Scheiben, den Indivisiblen, zusammengesetzt, eine Fläche aus unendlich vielen Linien). Er zeigt, dass eine krummlinig begrenzte Fläche durch eine Summe von Rechtecken beliebig genau angenähert werden kann. Beliebig genau heißt:
Der Fehler kann kleiner als jede vorgegebene positive Zahl gemacht werden (statt ε verwendet Leibniz Z). Infinitesimale Rechteckbreite bedeutet: ins unendlich Kleine gehende Breite. Leibniz Darstellungsweise, auch wenn es sich z. B. um partielle Integration handelt, ist geometrisch. Diese erinnert an Barrow[1]. Auf *De Quadratura* wird Leibniz nie wieder Bezug nehmen. Die Fehlerabschätzungen gehen über Bekanntes hinaus. Leibniz' Begriff der Kontinuität wird durch die Folge s_n veranschaulicht. „Error minor quovis errore assignabili“, der Fehler ist kleiner als jeder zuweisbare Fehler. „Ostendendo errorem quovis assignabili esse minorem, adeoque nullum“, das zeigt, dass der Fehler kleiner als jeder zuweisbare Fehler ist und daher null ist. Zum *calculus differentialis* verfasste Leibniz >1702 die unveröffentlichten Skripte *Defense du calcul des Differences*, *Justification du Calcul des infinitésimales par celuy de l'Algèbre ordinaire* und *Cum prodiisset*.
Erst die Cauchy/Weierstraß-Definition der Ableitung schränkte den vermeintlichen Interpretationsspielraum des Infinitesimalkalküls auf das math. Gebotene ein und machte in diesem Kalkül die *unendlich kleinen Größen* zu einer façon de parler, siehe Differentiale.

[1] Barrow *Geometrical Lectures*: „All the lines“ could be replaced by a sum of parallelograms „of a rather smalI ... and inconsiderable height.“

↑ Leibniz *De quadratura arithmetica* Textstellen[1]

„Die Lektüre dieses Satzes [Satz 6] kann ausgelassen werden, wenn man bei dem zu beweisenden Satz 7 keine größte Strenge verlangt. Und es wird besser sein, dass er zunächst übergangen und dann erst gelesen wird, wenn die ganze Sache verstanden worden ist, damit seine Übergenauigkeit den vorzeitig ermüdeten Geist nicht von den übrigen, bei weitem reizvolleren Dingen abschreckt. Dieses eine nämlich nur bewirkt er, dass zwei Flächen, von denen eine in die andere übergeht, wenn man bis ins Unendliche mit dem Einbeschreiben fortschreitet, sich einander nähern bis auf eine Differenz, die kleiner ist als eine beliebige zugewiesene, selbst wenn die Anzahl der Einschreibungen nur endlich bleibt.“

„Über diesen Satz hätte ich mich gern hinweggesetzt, weil meinem Geist nichts ferner liegt als die übergenauen Kleinlichkeiten einiger Autoren, bei denen mehr Zurschaustellung als Ertrag vorhanden ist, denn sie verbrauchen auch Zeit gleichsam für einige Zeremonien und haben mehr Arbeit als Verstand und hüllen den Ursprung der Entdeckungen, der mir meistens bedeutender erscheint als die Entdeckungen selbst, in dunkle Nacht. Da ich nun jedoch nicht leugne, dass man im Interesse der Geometrie über streng bewiesene Methoden selbst und Prinzipien der Entdeckungen sowie gewisse besonders wichtige Sätze verfügt, bin ich der Meinung gewesen, dass den althergebrachten Ansichten in irgendeiner Form Rechnung getragen werden muss.“

„Ich habe dies deshalb bis ins einzelne auseinander gesetzt, damit die gelehrten Männer erkennen, wie ohne jede Mühe das, was ihnen verdächtig erscheint, streng bewiesen werden kann, und damit die Geometer sich in Zukunft gefahrlos über diese Kleinlichkeiten hinwegsetzen können, wenn eine ähnliche Überlegung anfallen sollte.“

„Was wir über Unendliches und unendlich Kleines bisher sagten, wird einigen erscheinen, wie alles Neue; aber es wird von einem jeden durch mittelmäßiges Nachdenken leicht begriffen werden; wer es aber begriffen hat, wird den Ertrag erkennen. Und es kommt nicht darauf an, ob es derartige Quantitäten in der Natur der Dinge gibt, denn es reicht aus, sie durch eine Fiktion einzuführen, da sie Abkürzungen des Redens und Denkens und daher des Entdeckens ebenso wie des Beweisens liefern, so dass es nicht immer notwendig ist, Einbeschriebenes oder Umbeschriebenes zu benutzen und ad absurdum zu führen [Widerspruchsbeweis, reductio ad absurdum, lat. Zurückführung auf das Ungereimte, Sinnlose], und zu zeigen, dass der Fehler kleiner als ein beliebiger zuweisbarer ist.“

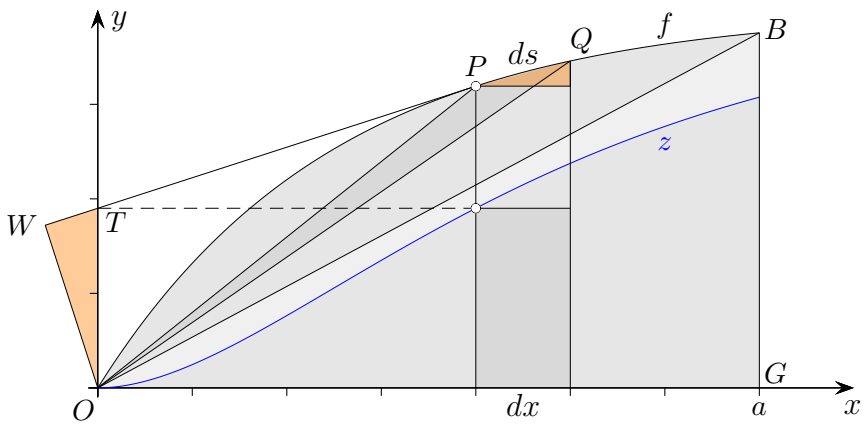
Satz 49 „Wenn eine Quantität A gleich einer Reihe $b - c + d - e + f - g$ etc. ist, die in der Weise bis ins Unendliche abnimmt, dass die Terme schließlich kleiner werden als eine beliebige gegebene Quantität, wird ... [200 Jahre später: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \big(n \geq n_0 \;\; \ldots \big)$] Und allgemein wird der Teil der durch abwechselnde Additionen und Subtraktionen gebildeten abnehmenden Reihe, der mit einer Addition endet, größer als die Summe der Reihe sein, der mit einer Subtraktion endet, wird kleiner sein; der Fehler aber oder die Differenz wird immer kleiner als der Term der Reihe sein, der dem Teil unmittelbar folgt. Beweis ...“

In Satz 49 beweist Leibniz das nach ihm benannte Konvergenzkriterium für alternierende Reihen, deren Glieder eine monotone Nullfolge bilden. Die Leistungen der Vorgänger (Cavalieri, Descartes, Fermat und Wallis unter anderen) werden gewürdigt, auch im Hinblick darauf, wie weit er über das bis dahin Erreichte hinausgekommen ist.

[1] Springer Spektrum Eberhard Knobloch Hrsg.

↑ Transmutation

1673/74 entdeckte Leibniz eine Art partieller Integration in Form der Transmutationsregel, mit der er unter anderem die π-Reihe aufstellen konnte. Dies fand Newtons Anerkennung.



$$\begin{aligned}
\int_0^a f(x)\,dx &= \text{Flächensegment} + \text{Dreieck}\,\Delta OGB \\
&= \sum_{dx} \Delta OPQ + \tfrac{1}{2} a f(a) \qquad \text{Die Grafik enthält nur ein } \Delta. \\
\Delta OPQ &= \tfrac{1}{2} ds \cdot OW
\end{aligned}$$

Die orange gefärbten, rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich (Schenkel stehen senkrecht aufeinander).

$$\frac{OW}{OT} = \frac{dx}{ds} \qquad \text{nach } OW \text{ aufgelösen und in } \Delta OPQ \text{ eingesetzen}$$

$$\Delta OPQ = \tfrac{1}{2} OT \cdot dx$$

$$OT = f(x) - \frac{df}{dx} \cdot x \qquad y\text{-Achsenabschnitt der Tangente in } P\big(x \mid y\big)$$

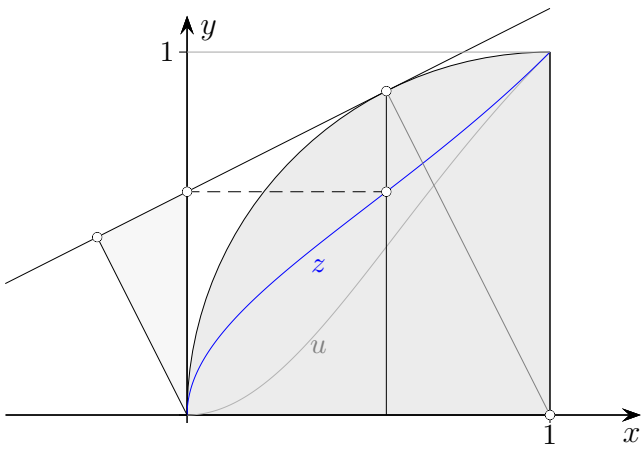
Die Transformation mit der Hilfskurve $z(x) = f(x) - \dfrac{df}{dx} \cdot x$ heißt Transmutation.

$$\int_0^a f(x)\,dx = \tfrac{1}{2} \int_0^a \left(f(x) - \frac{df}{dx} \cdot x\right) dx + \tfrac{1}{2} a f(a) \qquad \Big| \cdot 2$$

$$2\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a \frac{df}{dx} \cdot x\,dx + a f(a) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^a f(x)\,dx = a f(a) - \int_0^a \frac{df}{dx} \cdot x\,dx$$

↑ Leibniz-Reihe $\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$

Diese Reihe war dem indischen Mathematiker Madhava bereits im 14. Jahrhundert und dem schottischen Mathematiker Gregory vor 1671 bekannt.
Leibniz erhielt die Reihe, indem er die Transmutationsformel auf den Kreis anwandte.
Die Grafik enthält noch einmal die geometrische Konstruktion der Transmutationskurve z.



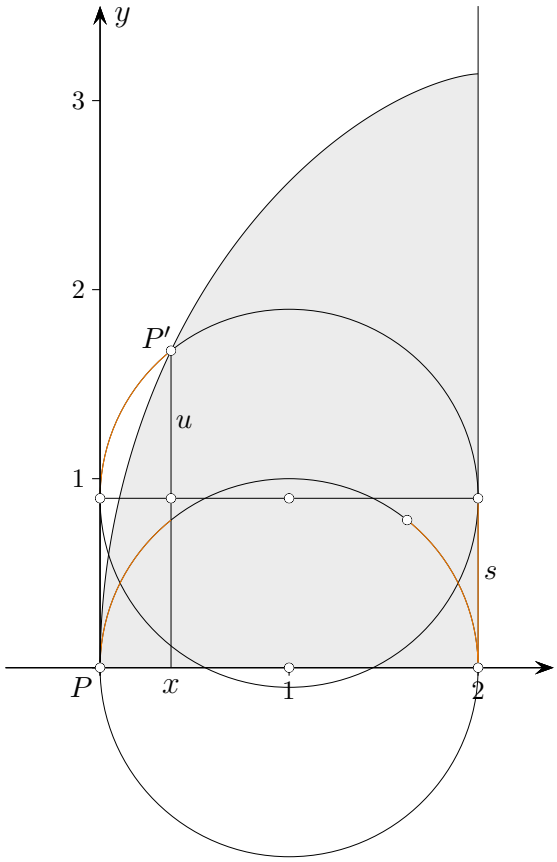
$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 + y^2 &= 1 \\
&\ldots \\
y &= \sqrt{2x - x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 y\,dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(y - \frac{dy}{dx}\cdot x\right) dx + \tfrac{1}{2} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1-x}{y} && \text{elementar, Tangente senkrecht zum Radius} \\
y - \frac{dy}{dx}\cdot x &= y - \frac{x(1-x)}{y} = \ldots = \sqrt{\frac{x}{2-x}} = z && z \text{ wird mit Hilfe der Umkehrfunktion } u \text{ integriert.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 z\,dx &= 1 - \int_0^1 u\,dz = 1 - \int_0^1 \frac{2z^2}{1+z^2}\,dz && \text{Quadrat 1 wegen der Verwendung von } u \\
&= 1 - \int_0^1 2(z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \ldots)\,dz && \text{Polynomdivision} \\
&= 1 - 2\left[\tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{5}z^5 + \tfrac{1}{7}z^7 - \tfrac{1}{9}z^9 + \ldots\right]_0^1 && \text{Quadraturen von Fermat 1638} \\
&= 1 - 2\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{9} + \ldots\right]
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 z\,dx + \tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots
$$

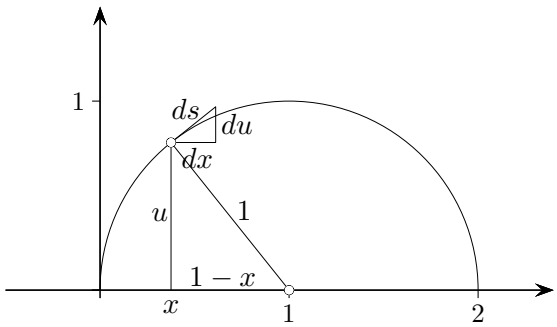
↑ Quadratur der Zykloide



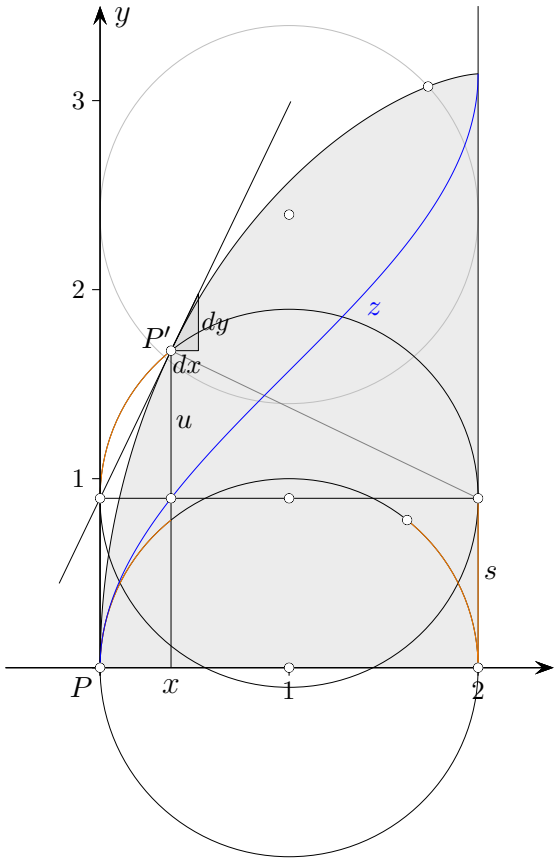
Der Kreis $u^2 = 2x - x^2$ mit dem Radius $r = 1$ rollt auf der Geraden $x = 2$ ab.
Der laufende Kreispunkt P beschreibt dabei eine Zykloide y mit $y = s + u$.
s ist die Länge des geradegestreckten Abrollbogens.
Man denke sich den Rollvorgang zerlegt in eine Verschiebung parallel zur y-Achse um s und eine Drehung um s (nun als Winkel, Radius 1). P geht über in P'.

Leibniz ermittelte mit seiner Transmutation den Inhalt der Fläche unterhalb der Rollkurve.
Zunächst ist die Ableitung von y zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
y &= s + u \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{ds}{dx} + \frac{du}{dx} \\
\frac{ds}{dx} &= \frac{1}{u} \\
\frac{du}{dx} &= \frac{1-x}{u} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2-x}{u}
\end{aligned}
$$



↑ Quadratur der Zykloide



$$y = s + u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{u}$$ Man beachte die besondere Lage der Tangente.

$$\int_0^2 y\,dx = 2\pi - \int_0^2 \frac{dy}{dx}\cdot x\,dx$$ siehe Transmutation, unten auf der Seite

$$= 2\pi - \int_0^2 \frac{2x-x^2}{u}\,dx$$

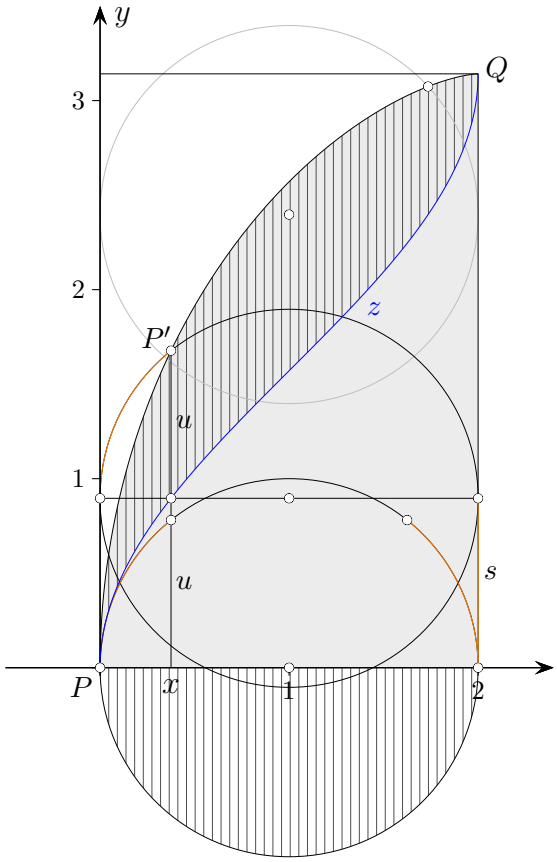
$$= 2\pi - \underbrace{\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx}_{\text{halbe Kreisfläche}}$$

$$= 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$ Für den Radius a ergibt das (zentrische Streckung) $A = \frac{3}{2}\pi a^2$.

Zu diesem Ergebnis gelangten bereits Roberval 1634, Descartes und Fermat 1635.

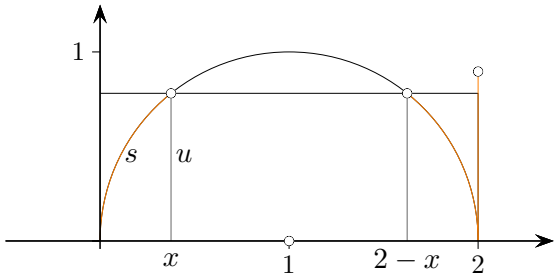
allgemein $$\frac{dy}{dx} = \frac{2a-x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \ldots = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

↑ Roberval Quadratur der Zykloide



Roberval verwendete neben der Zykloide $y = s + u$ die Kurve $z = y - u$, die mit y die halbe Kreisfläche einschließt. Aufgrund der leicht einzusehenden Symmetrie von z zum Wendepunkt an der Stelle $x = 1$ (beachte $z(x) = \pi - z(2 - x)$, $z = s$) halbiert z das Rechteck mit der Diagonalen PQ. Damit ergibt sich:

$$A = \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$$



z stimmt mit Leibniz' Transmutationskurve überein.

↑ DGL der Zykloide

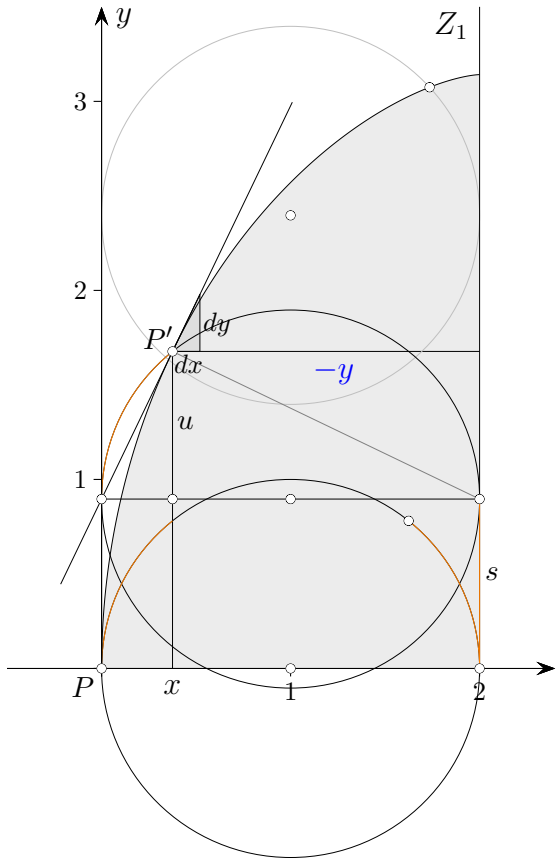
Für Z_1 wurde gezeigt:

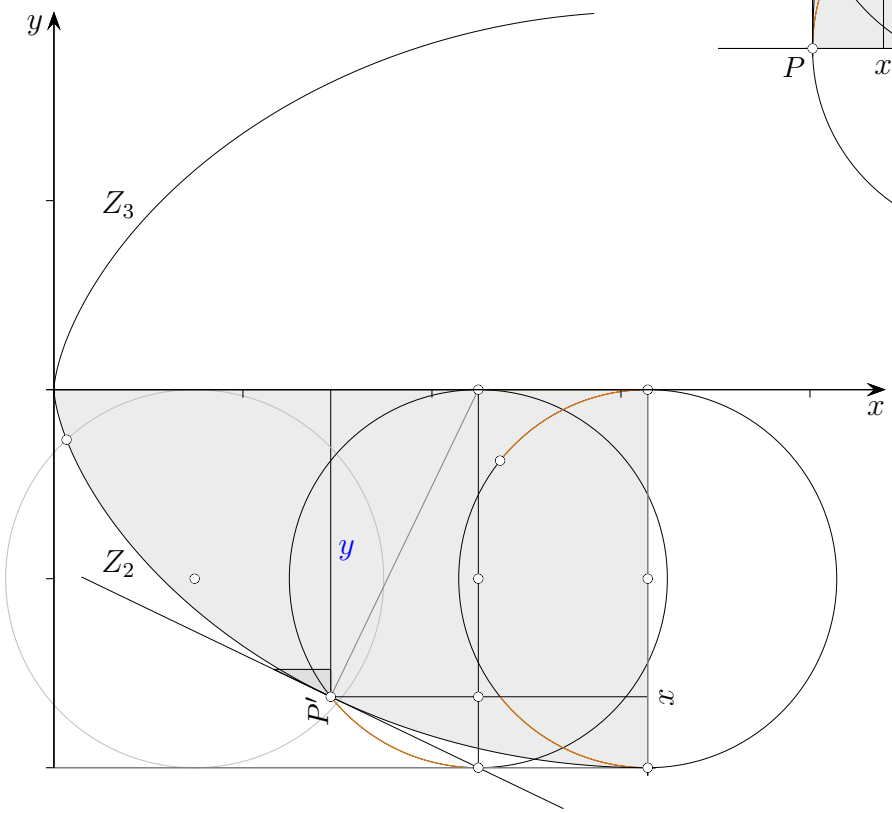
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a-x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \ldots = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

Z_1 wird um $Q(2\,|\,0)$ um 90° im Gegenuhrzeigersinn gedreht, das Koordinatensystem verschoben. Für den Punkt $P'(\quad|\,y)$ von Z_2 folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{x}{2a-x}} = -\sqrt{\frac{2a+y}{-y}}$$

($x = 2a + y$ eingesetzt, y neg.)

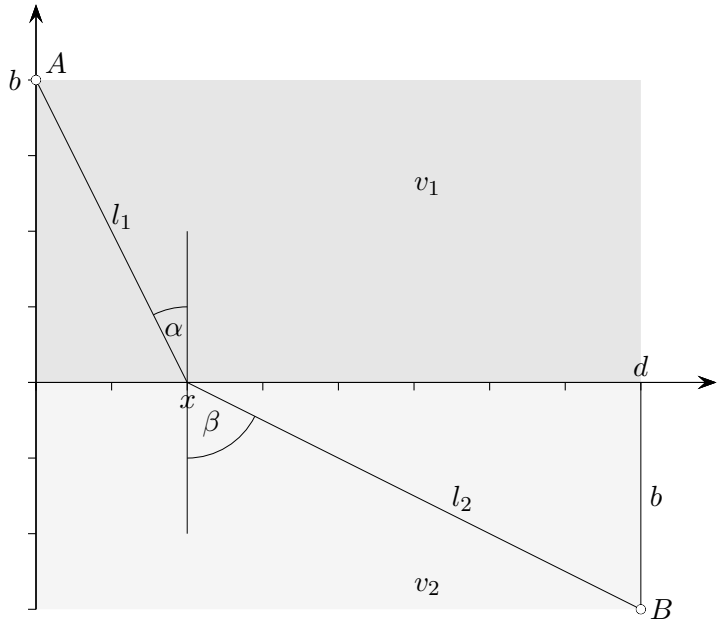




Für Z_3 ergibt sich schließlich (y pos.): $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$

Diese DGL kann beim Brachistochronen-Problem (brachistos kürzeste, chronos Zeit, Johann Bernoulli 1696) hergeleitet werden, um zu erkennen, dass die Lösungsfunktion eine Zykloide ist.

↑ Extremwertproblem Brechungsgesetz



Im oberen Gebiet ist eine Fortbewegung mit der Geschwindigkeit v_1 möglich, im unteren mit v_2. Gesucht ist der Weg von A nach B mit geringster Laufzeit t.

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \sqrt{x^2+a^2} \\
l_2 &= \sqrt{(d-x)^2+b^2} \\
t(x) &= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v_2} \\
\frac{dt}{dx} &= \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}}
\end{aligned}
$$

Ableitung ohne schriftliche Rechnung mit $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und der Kettenregel

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= 0 \\
0 &= \frac{x}{v_1 l_1} - \frac{d-x}{v_2 l_2} \\
0 &= \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2} \\
\frac{\sin\alpha}{v_1} &= \frac{\sin\beta}{v_2}
\end{aligned}
$$

Leibniz untersuchte diese Fragestellung in seiner Veröffentlichung *Nova methodus pro maximis et minimis* ... von 1684.

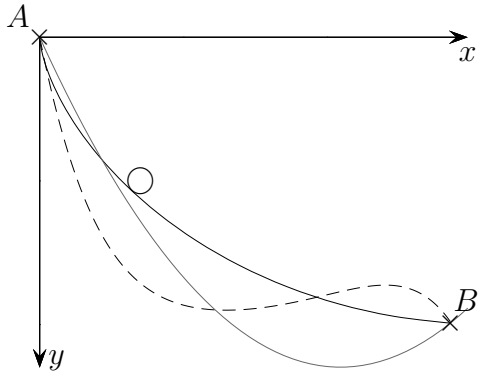
↑ Brachistochrone

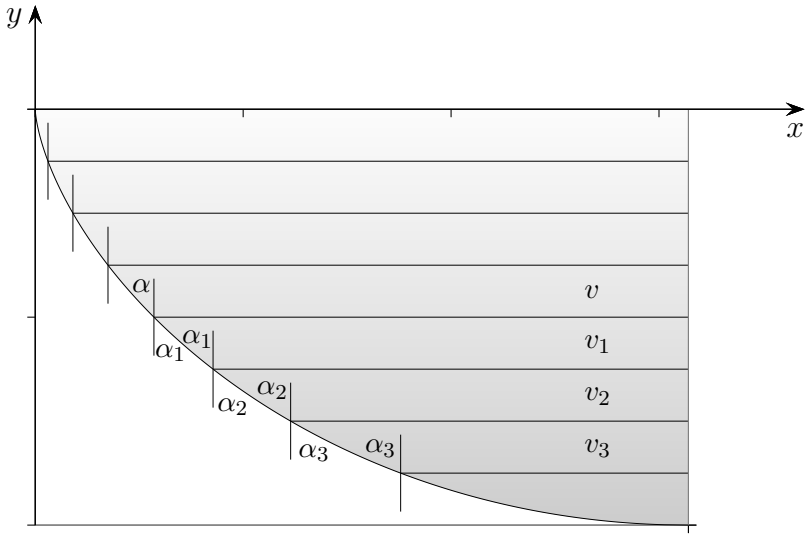
Man finde die Kurve kürzester Fallzeit, welche zwei gegebene Punkte verbindet.

Johann Bernoulli verwendet infinitesimale horizontale Streifen,
$v = \sqrt{2gy}$ (Galilei'sche Fallgeschwindigkeit) und
das Fermat'sche Prinzip

$$\frac{v}{\sin\alpha} = C \quad \textit{(const)}.$$

$$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{v_1}{\sin\alpha_1} = \frac{v_2}{\sin\alpha_2} = \frac{v_3}{\sin\alpha_3} = \dots$$





$$\sin\alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad \text{hier} \quad dx^2 = (dx)^2$$

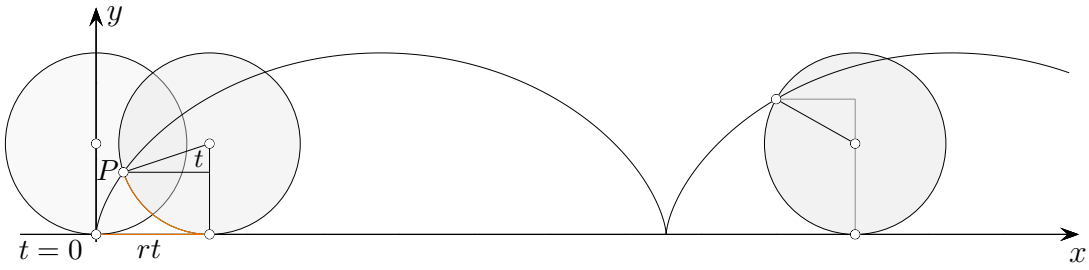
$$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{v\,ds}{dx} = \frac{v\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx} = v\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = C$$

$$\sqrt{2gy}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = C \qquad \text{quadrieren, } y \text{ ist hier positiv, Kurve an der } x\text{-Achse gespiegelt}$$

$$y + y\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{C^2}{2g} = c$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c-y}{y}} \qquad \text{voilà}$$

↑ Parameterdarstellung der Zykloide



Für einen Punkt $P\big(x \mid y\big)$ der Zykloide sind $x = rt - r\sin t$ und $y = r - r\cos t$.
Daher gilt:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t - \sin t) \\ y(t) &= r(1 - \cos t) \end{aligned}$$

Es soll verifiziert werden, dass diese Darstellung die DGL $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{2r-y}{y}}$ löst.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{r\sin t}{r - r\cos t} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2} = \frac{2r - r(1-\cos t)}{r(1-\cos t)} = \frac{1+\cos t}{1-\cos t}$$ DGL wurde quadriert.

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$$ Hiermit und mit der Abkürzung $a = \cos^2 t$ ist die Gleichheit ohne Rechnung zu erkennen,

$$\frac{1-a^2}{(1-a)^2} = \frac{1+a}{1-a}$$ beachte lediglich $1 - a^2 = (1-a)(1+a)$.

1696 fand Leibniz zur Lösung des Brachistochronen-Problems die DGL $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{\dfrac{2r}{y}}$.
Sie kann wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ in die obige DGL umgeformt werden.

↑ Einige Aspekte des Streits

Im Jahr 1695 schreckte Newton auf, als er von Wallis erfuhr, dass holländische Mathematiker die Fluxionenrechnung für eine Entdeckung von Leibniz hielten. „You are not so kind to your reputation (& that of the nation) as you might be when you let things of worth ly by you so long, till others carry away the reputation that is due to you.“
Ein Jahr darauf fügte Leibniz seiner veröffentlichten, auf einer Kutschfahrt gefundenen Lösung der Bernoullischen Aufgabe hinzu, das Problem der Kurve kürzester Fallzeit sei so recht geeignet, die Vorzüge seiner Differentialrechnung ins rechte Licht zu setzen. Denn nur in dieser Bewanderte können diese Aufgabe glatt lösen. Außer denen traue er nur Newton, Huygens und Hudde eine Lösung zu.
Die andere Seite des Ärmelkanals war *not amused*. Newton hatte das Problem auch in wenigen Stunden gelöst. Nicolas Fatio, ein in England lebender Schweizer und enger Freund Newtons, fühlte sich übergangen. Bereits 1691 schrieb er an Huygens: „Von allem, was mir bisher zu sehen möglich war, darunter ich Papiere rechne, die vor vielen Jahren geschrieben wurden, scheint mir, dass Herr Newton ohne Frage der erste Autor des Differentialkalküls war und dass er es genau so gut oder besser wusste als Herr Leibniz es nun weiß, bevor der letztere auch nur eine Idee davon hatte. Diese Idee kam zu ihm, so scheint es, nur auf Grund der Tatsache, dass Herr Newton ihm davon schrieb ... Weiterhin kann ich nicht genug überrascht sein, dass Herr Leibniz darüber nichts in den Leipziger Acta andeutet.“ In seiner Abhandlung über die Brachistochrone von 1699 wiederholte er den Vorwurf.
Der Prioritäts- und Plagiatsstreit war entbrannt. Er sollte über 20 Jahre andauern - der streitbare Johann Bernoulli trug maßgeblich dazu bei - und erst abflauen, nachdem Newton kurz vor seinem Tod kein Interesse mehr an der Kontroverse hatte. Ein Brief von Johann Bernoulli blieb unbeantwortet.

Johann Bernoulli
Aus der Kooperation mit dem besonnenen Jakob wurde brüderlicher Wettstreit und schließlich erbitterte Rivalität. Brief an l'Hôpital 1695:
„Jakob ist voller Wut, Hass, Neid und Eifersucht gegen mich. Er findet es unerträglich, dass ich, der jüngere Bruder, so viel Wertschätzung erhalte wie er, und er würde große Freude daran haben, mich elend und demütig zu sehen.“
1734 gewinnt Johann den ersten Preis bei einer Ausschreibung der Pariser Académie des sciences, den er sich jedoch mit seinem begabten Sohn Daniel teilen muss. Johann ist empört darüber, dass Daniels Arbeit als gleichrangig zu seiner angesehen wird. Zudem würdigt Daniel die Arbeit Newtons, für Johann ist das Häresie. Er verweigert seinem Sohn von da an den Zutritt zum Elternhaus.
Auf der engl. Seite konnte John Keill Newton davon überzeugen, dass Leibniz ein Plagiator ist. Um die Überlegenheit des Leibniz-Kalküls zu demonstrieren, ersann Johann Bernoulli math. Aufgaben. Bereits die zweite Aufgabe konnten die Engländer zum Spott Johanns mit dem Newton-Kalkül nicht mehr lösen.

Isaac Newton bemerkte bescheiden: „If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.“ Einer dieser Riesen war zweifelsohne John Wallis 1616-1703. Er verteidigte das aktual Unendliche in der Mathematik (und versessen die vermeintliche Ehre Englands):
„The same AB may be bisected in M and each of the halves in m and so onwards, infinitely, it is not his [d. h. Euklids] meaning ... that it should be actually done (for who can do it?), but that it be supposed.“

Wallis verwendete als Erster das Symbol ∞, möglicherweise von ihm ausgewählt, weil man die geschlossene Kurve unendlich oft durchlaufen kann. Um den Unendlichkeitsbegriff führte er mit Hobbes eine wissenschaftliche Kontroverse. Der Ton war häufig beleidigend. Das traf auch für die zahlreichen Auseinandersetzungen über Prioritätsansprüche mit französischen Mathematikern wie Fermat und Pascal zu.

In der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts entwickelte de Moivre in England Wesentliches zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zu komplexen Zahlen. Cotes, Stirling und Taylor lieferten Beiträge zu unendlichen Summen. Maclaurin verfasste *Treatise of Fluxions*, eine geometrisch orientierte, um Präzision bemühte Antwort auf Berkeley, der die Möglichkeit einer Momentangeschwindigkeit verneinte, bei der die Abstands- und Zeit-Inkremente verschwinden und dem Anschein nach den sinnlosen Quotienten 0/0 zurücklassen.
In der Zeit danach konnten die engl. Mathematiker mit der rasanten Entwicklung auf dem Kontinent nicht mehr Schritt halten. Der Leibniz Kalkül war, auch wenn man ihn fehlinterpretierte, für die anstehenden Probleme bestens geeignet, insbesondere die Bernoullische Weiterentwicklung durch Differentialgleichungen. Die engl. Seite betrachtete diesen Kalkül mit Skepsis. Die Bedeutung von Differentialen war für sie ungeklärt. Das galt auch für den Kontinent. Hier verfuhr man jedoch gemäß d'Alembert, der zweifelnden Studenten empfahl: „Allez en avant, et la foi vous viendra.“[1]
Die Gewissheit stellte sich 100 Jahre später ein.

John Keill schrieb 1708 in einem Artikel für die Royal Society: „All of these laws follow from the now highly celebrated arithmetic of fluxions which Mr. Newton, without any doubt, first invented. ... yet the same arithmetic, under a different name and method of notation, was afterwards published by Mr. Leibniz in the Acta Eruditorum.“
Leibniz verfasste 1712 einen Beschwerdebrief, woraufhin Newton, Präsident der Royal Society, ein Komitee zur Klärung zusammenstellte. Wie sich später erwies, bestand es nur aus seinen Anhängern. Der Bericht, sein Entwurf war in Newtons Handschrift verfasst, basiert auf historisch widerlegten Sachverhalten und endet: „. . . For which reasons we reckon Mr. Newton the first inventor and are of the opinion that Mr. Keill in asserting the same has been in no way injurious to Mr. Leibniz . . .“
Im Bericht, der nur eine Schlussfolgerung zulässt, ist zu lesen, dass Collins in seiner Korrespondenz mit Leibniz bis 1676 sehr freizügig die math. Ergebnisse von Newton und Gregory mitteilte, insbesondere auch die Methode der Fluxionen, die mit der Leibnizsche Differential-Methode identisch ist, von den Bezeichnungen abgesehen, ...
Dieses wurde an die akademischen Zentren von England und Europa verschickt. Leibniz reagierte mit einem Flugblatt, in dem er seine Sicht der Dinge darstellte und Newton des Plagiats bezichtigte[2], woraufhin die engl. Seite ihren Standpunkt bekräftigte.
Johann Bernoulli hatte die Idee, den Engländern mathematische Aufgaben zu stellen.
Den Ausgang habe ich schon erwähnt.

Nebenbei:
Descartes hatte mit Fermat über die Priorität der analytischen Geometrie gestritten und versuchte ihn mit Aufgaben herabzuwürdigen, an denen er scheitern sollte. Das misslang. Fermat konnte durch die gestellten Herausforderungen seine Methoden verbessern und so war diese Auseinandersetzung dem math. Fortschritt dienlich.

↑ [1]Macht einfach weiter und ihr werdet schon dran glauben.
D'Alembert hatte erkannt, dass der Grundbegriff der Infinitesimalrechnung nicht das Differential, sondern der Grenzwert des Differenzenquotienten ist.

[2]„Calculum Fluxionum ad imitationem Calculi Differentialis formatum fuisse.“
Die Fluxionsrechnung wurde in Anlehnung an die Differentialrechnung entwickelt.

↑ Ergänzungen zu Gottfried Wilhelm Leibniz

Leibniz:
„Man hätte Grund, das menschliche Geschlecht und die so universelle und so allgemeine Unwissenheit, in der es sich befindet, zu bedauern, wenn man nicht Grund zu der Hoffnung hätte, dass unser Geist in seiner Erkenntnis fortschreiten und es ihm immer besser und besser ergehen werde, trotz der anscheinenden Verfinsterungen, die seine Fortschritte unterbrechen.“

„Il me vient quelquefois tant de pensées dans une heure pendant que je suis encore au lit, que j'ai besoin d'employer toute la matinée et parfois toute la journée et au delà pour les mettre distinctement par écrit.“ [1]

Leibniz war Experte auf allen Wissensgebieten. Er war Philosoph, pflegte Kontakte zu ungezählten Gelehrten in aller Welt und dachte in einer Weise, die seiner Zeit weit voraus war.

Leibniz wird 1646 in Leipzig geboren. In Paris bewirbt er sich 1675 vergeblich um eine Lehrtätigkeit und um die Mitgliedschaft bei der Académie des Sciences. Er gerät an den Rand der Armut und muss 1676 widerstrebend bei Herzog Johann Friedrich die Stelle als Hofbibliothekar in Hannover (zur damaligen Zeit Provinz) annehmen, letztendlich eine 40-jährige Anstellung. Die ihm aufgetragene, mit Akribie betriebene Ahnenforschung für das welfische Fürstenhaus ermöglicht ihm ausgedehntes Reisen. 1680 übernimmt der jüngere Bruder Ernst August die Herrschaft in Hannover. Seine Frau Sophie, sowie ihre wissbegierige Tochter Sophie Charlotte 1668-1705, die spätere Königin in Preußen, haben ein inniges Verhältnis zu Leibniz. 1698 stirbt Ernst August und dessen Sohn Kurfürst Georg Ludwig hat wenig Verständnis für die weitreichenden Interessen von Leibniz. Der schleppende Fortgang - er währt schon 30 Jahre - an der Welfen-Geschichte führt zu Spannungen. „. . . weil er (Leibniz) von dem Genie wäre, dass er alles leisten wolle, aber entweder kein Talent oder keine Lust hätte, etwas zusammenzubringen und zu endigen.“ Das Material, das Leibniz geschrieben und gesammelt hatte, wurde schließlich im 19. Jh. veröffentlicht, es füllte drei Bände. 1700 gründet Leibniz die Akademie der Wissenschaften in Berlin. Frage: Warum hält sich Leibniz so gerne in Berlin auf, zumindest bis 1705? Seinem Kurfürst missfällt die häufige Abwesenheit. Schließlich ist das Verhältnis so zerrüttet, dass Leibniz' Bezüge für drei Jahre ausgesetzt werden.
Leibniz sucht nach neuen Wirkungsstätten als politischer Berater von Fürsten, dem Kaiser und dem russischen Zar. Seine auf universellem Wissen basierenden Ratschläge zum Justiz-, Finanz- und Gesundheitswesen und zur Durchsetzung von Gebietsansprüchen werden zwar wohlwollend anerkannt, jedoch nicht immer umgesetzt und auch nicht immer entlohnt.
Als Georg Ludwig 1714 den englischen Thron besteigt, hofft Leibniz vergebens, dass seine Dienste in London benötigt würden. Ein Zusammentreffen mit Newton wäre aufschlussreich gewesen, wenn auch für uns wenig vorstellbar. Gekränkt, vereinsamt und von einem Gicht- und Nierenleiden leidgeprüft, verstirbt der große Gelehrte 1716 in Hannover.

[1] „Mir kommen morgens manchmal so viele Gedanken während einer Stunde, die ich noch im Bett liege, dass ich den ganzen Vormittag und bisweilen den ganzen Tag und länger brauche, um sie deutlich zu Papier zu bringen.“

↑ Tautochrone

Die Tautochrone (tauto dasselbe, chronos Zeit) ist die Kurve, bei der ein sich auf ihr bewegender Körper, unabhängig vom Startpunkt, immer die gleiche Zeit T bis zum Endpunkt benötigt. Huygens fand 1659 heraus, dass es sich hierbei auch um eine Zykloide handelt.

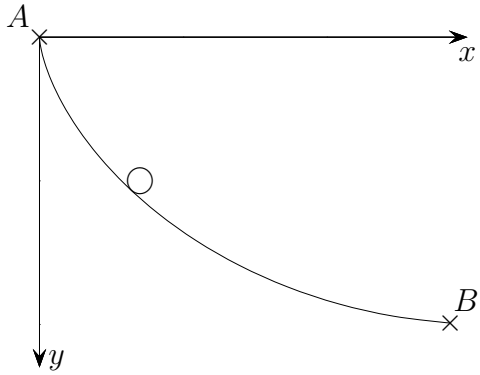
$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \textit{s Bogenlänge, t Zeit}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$v = \sqrt{2gy} \qquad \textit{g Erdbeschleunigung}$$

$$\Longrightarrow \quad dt = \frac{ds}{v}$$

$$\Longrightarrow \quad T = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}}$$



$$x = r(t - \sin t)$$

$$y = r(1 - \cos t) \qquad \text{Startpunkt sei } (t_0, y_0)$$

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

$$T = \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2r^2(1 - \cos t)}{2rg(\cos t_0 - \cos t)}}\, dt$$

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{\cos t_0 - \cos t}}\, dt$$

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t_0}{2} - \cos^2 \frac{t}{2}}}\, dt$$

$$u = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\cos \frac{t_0}{2}} \qquad \text{Substitution}$$

$$du = -\frac{\sin \frac{t}{2}}{2 \cos \frac{t_0}{2}}\, dt$$

$$T = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \Big[\arcsin u \Big]_0^1$$

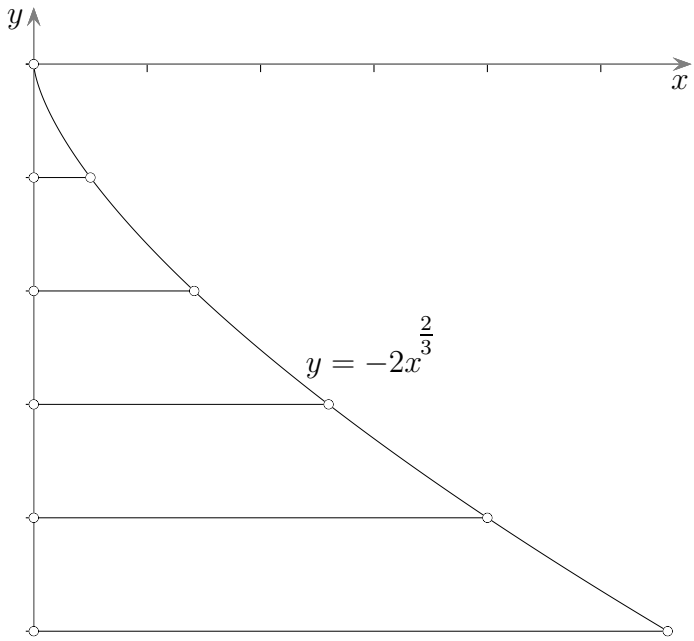
$$= \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \qquad T \text{ ist von } y_0 \text{ unabhängig.}$$

↑ Differentialgleichung, Trennung der Variablen

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + xy &= 0 \\
\frac{dy}{y} &= -x\,dx \\
\int \frac{dy}{y} &= \int -x\,dx \\
\ln y &= -\frac{x^2}{2} + C \\
y &= e^{-\frac{x^2}{2}+C} = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{C_0} \\
&= y_0 e^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\
y\,dy &= -x\,dx \\
\int y\,dy &= \int -x\,dx \\
\frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + C \\
x^2 + y^2 &= 2C \qquad \text{Kreisgleichung, Radius } r = \sqrt{2C}
\end{aligned}
$$

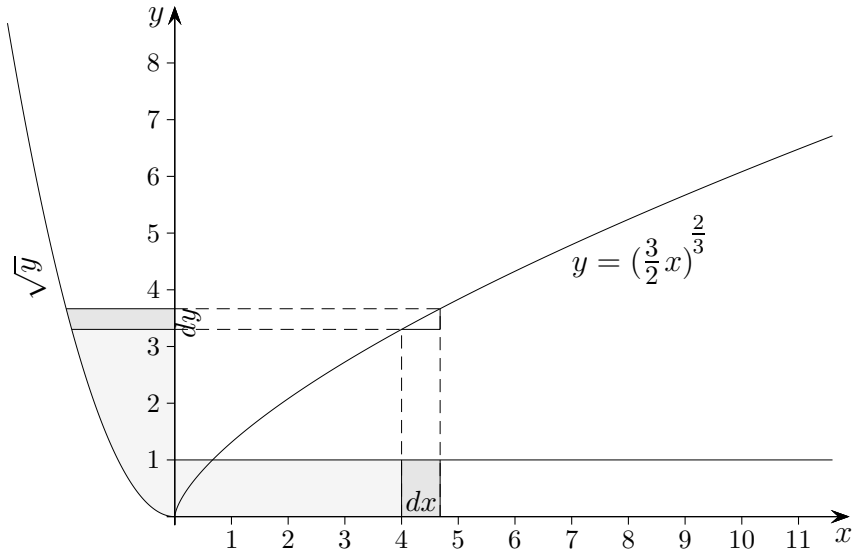
↑ Isochrone



Leibniz stellte 1687 das Problem: Finde eine Kurve, auf der eine Masse reibungsfrei mit konstanter Vertikalgeschwindigkeit $dy/dt = -b$ gleitet.
1690 leitete Jakob Bernoulli die DGL her und löste sie durch Trennung der Variablen.
Es liegen Kurven der Form $x^2 = -cy^3$ (Neilsche Parabeln) vor.

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{ds}{dt} && s \text{ Bogenlänge, } t \text{ Zeit} \\
ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\
v &= \sqrt{-2gy} && g \text{ Erdbeschleunigung} \\
\Longrightarrow \quad \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} &= -2gy \\
&\dots \\
dx &= -\sqrt{-1 - \frac{2gy}{b^2}}\, dy \\
&\dots \\
x &= \frac{b^2}{3g}\Big(-1 - \frac{2gy}{b^2}\Big)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

↑ Trennung der Variablen



$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{y}} \\
\sqrt{y}\,dy &= dx \\
\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} &= x \qquad \text{Integration (Summation)} \\
y &= \left(\frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Dieses Verfahren ist anschaulich leicht zu begründen:
Die 2. Zeile $\sqrt{y}\,dy = 1 \cdot dx$ wird als Gleichheit zweier Flächeninhalte gesehen.
Für z. B. $x_1 = 4$ ist der Funktionswert y_1 durch $\int_0^{y_1} \sqrt{y}\,dy = 4$ festgelegt, $y_1 = 3{,}301927$.

Offensichtlich lassen sich allgemeiner die Variablen in $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ trennen.

Johann und Jakob Bernoulli entwickelten um 1700 dieses und viele weitere Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen. Physikalische Probleme konnten damit elegant gelöst werden. Dies trug wesentlich zur raschen Verbreitung des Differential-Kalküls bei.

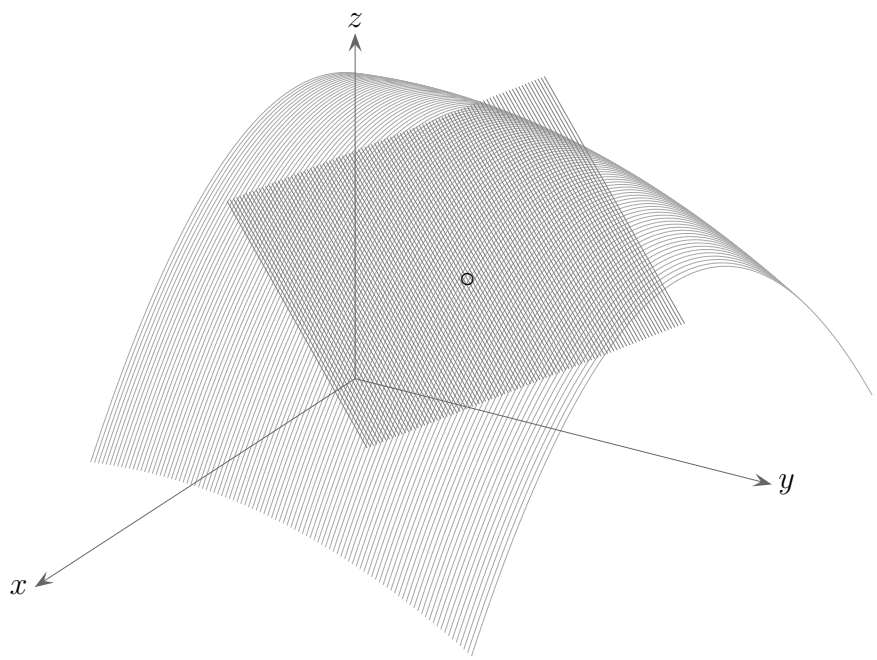
↑ Totales Differential

$$
\begin{aligned}
y &= f(u,v) \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv
\end{aligned}
$$

Habe die Koordinatenform der in den Ursprung verschobenen Tangentialebene vor Augen.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\
\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{2\pi}{3} r h \\
\frac{\partial V}{\partial h} &= \frac{\pi}{3} r^2 \\
dV &= \frac{2\pi}{3} r h\,dr + \frac{\pi}{3} r^2\,dh
\end{aligned}
$$



Die Themen Tangentialebenen, Krümmung von Flächen, partielle Differentialgleichungen, usw. konnten mit Differentialen bearbeitet werden. Mit der Methode der Fluxionen war das nicht möglich.

Methode der Fluxionen Newton

Newton

Newton INTRODUCTION TO THE QUADRATURE OF CURVES

Newton THE MATHEMATICAL PRINCIPLES OF NATURAL PHILOSOPHY

Newton COMMERCIUM EPISTOLICUM

Tangentenmethoden von Fermat, Descartes, Archimedes/Roberval

Differentiale

The Analyst

Robins A DISCOURSE CONCERNING THE NATURE AND CERTAINTY OF SIR ISAAC NEWTON'S METHODS OF FLUXIONS

Walton A VINDICATION OF SIR ISAAC NEWTON'S PRINCIPLES

Jurin DEFENCE OF Sir ISAAC NEWTON

Historia et Origo Calculi Differentialis

Startseite