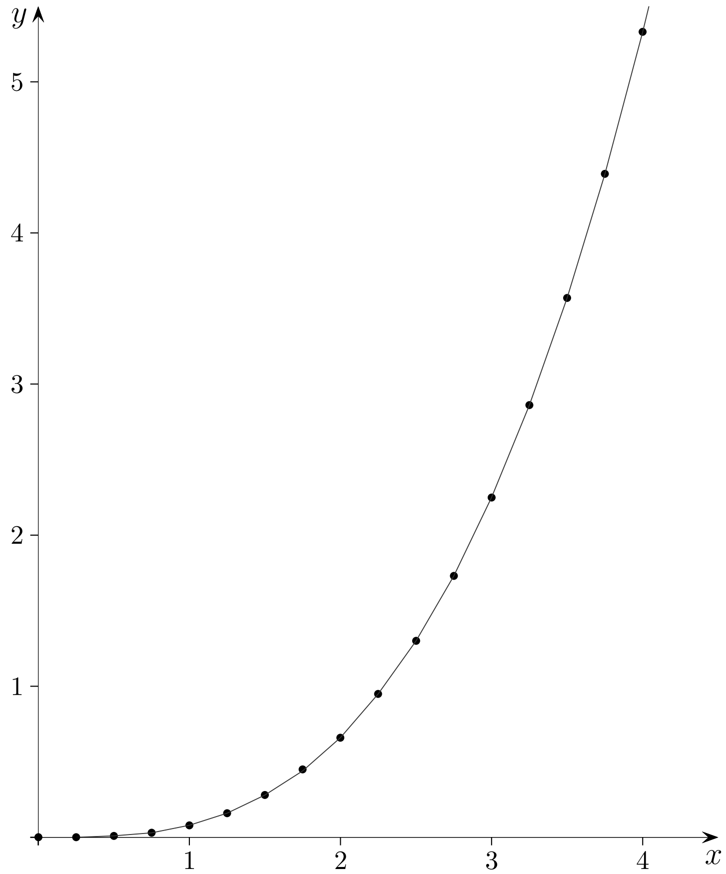
Leibniz' Idee



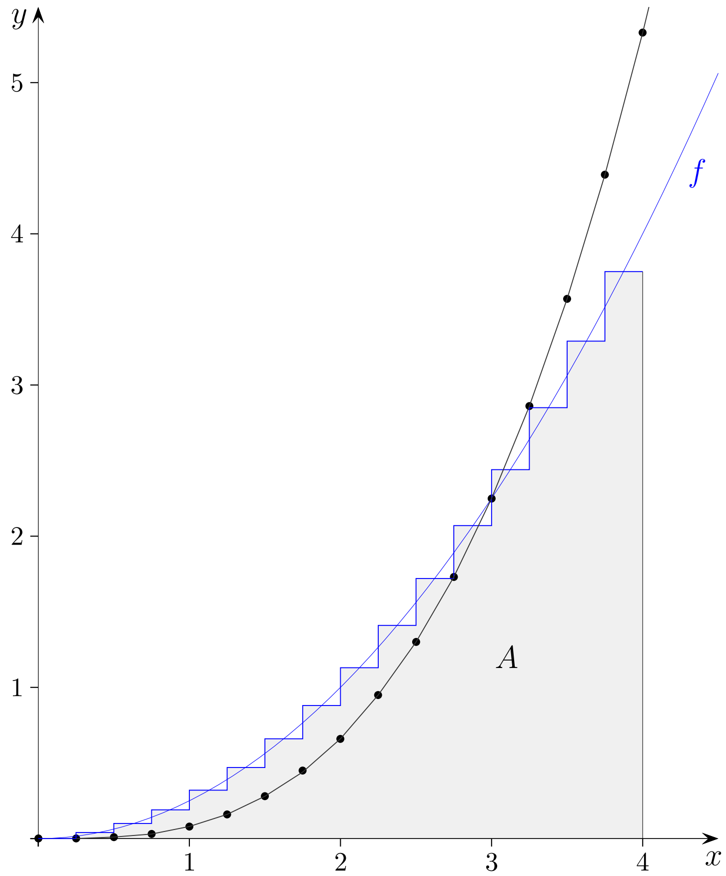
$(0; 0)$
$(0{,}25; 0{,}001)$
$(0{,}5; 0{,}010)$
$(0{,}75; 0{,}035)$
$(1; 0{,}083)$
$(1{,}25; 0{,}163)$
$(1{,}5; 0{,}281)$
$(1{,}75; 0{,}447)$
$(2; 0{,}667)$
$(2{,}25; 0{,}949)$
$(2{,}5; 1{,}302)$
$(2{,}75; 1{,}733)$
$(3; 2{,}250)$
$(3{,}25; 2{,}861)$
$(3{,}5; 3{,}573)$
$(3{,}75; 4{,}395)$
$(4; 5{,}333)$

Gegeben ist ein Streckenzug als Approximation des Graphen einer ganzrationalen Funktion F. Skizziere den Verlauf der Steigungen. Dass an den Nahtstellen der Strecken die rechtsseitige Steigung nicht genau mit der linksseitigen übereinstimmt, lassen wir außer Acht.

	Steigung m auf dem Intervall
$[0; 0{,}25]$	
$[0{,}25; 0{,}5]$	
$[0{,}5; 0{,}75]$	
$[0{,}75; 1]$	
...	
$[3{,}5; 3{,}75]$	
$[3{,}75; 4]$	

Nebenbei: $F(x) = \frac{1}{12}x^3$

Leibniz' Idee



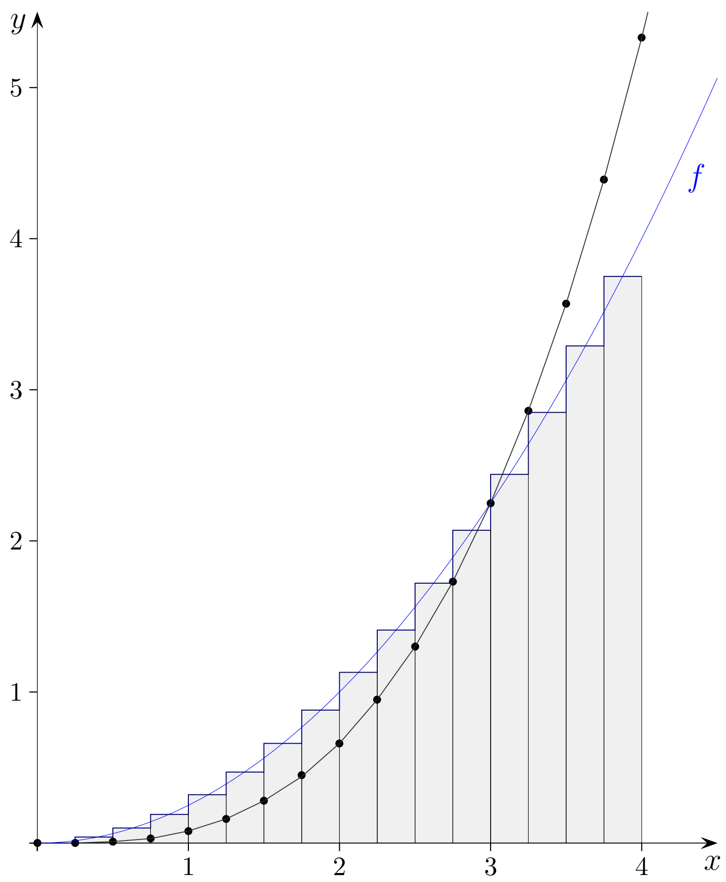
	m
[0; 0,25]	0, 01
[0,25; 0,5]	0,04
[0,5; 0,75]	0,10
[0,75; 1]	0,19
[1; 1,25]	0,32
[1,25; 1,5]	0,47
[1,5; 1,75]	0,66
[1,75; 2]	0,88
[2; 2,25]	1,13
[2,25; 2,5]	1,41
[2,5; 2,75]	1,72
[2,75; 3]	2,07
[3; 3,25]	2,44
[3,25; 3,5]	2,85
[3,5; 3,75]	3,29
[3,75; 4]	3,76

Der Streckenzug der Steigungen kann als Approximation des Graphen einer Funktion f gesehen werden.

Wir interessieren uns nun für den Inhalt der grau gefärbten Fläche A.
Diese Fläche ist ein Näherung für die Fläche unterhalb des Graphen von f in den Grenzen von 0 bis 4.

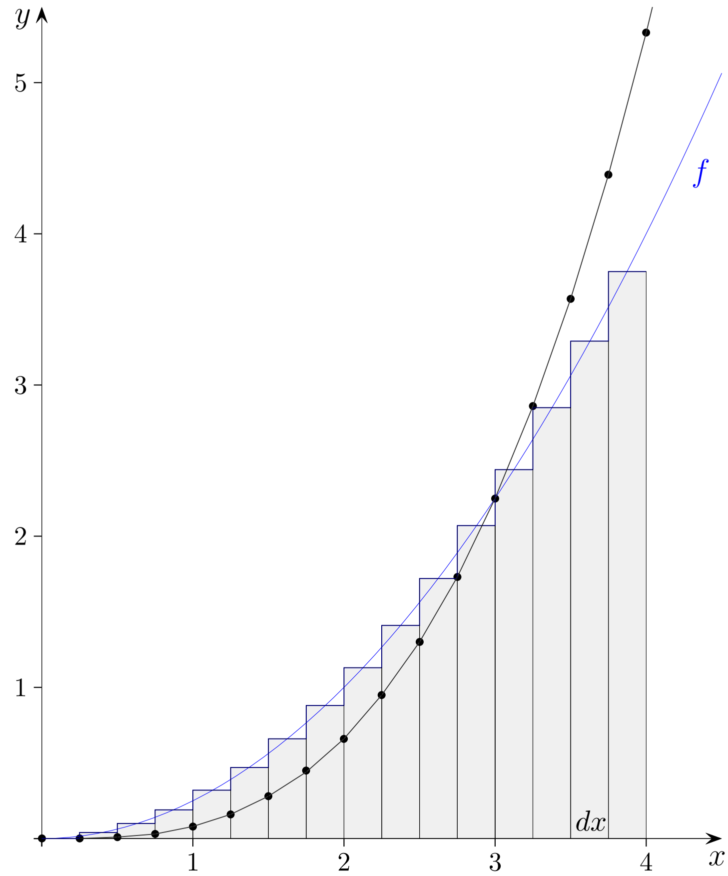
Nebenbei: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

Leibniz' Idee



Die Fläche A setzt sich als Summe von Rechtecken zusammen.
Wir ermitteln die Inhaltssumme.

Leibniz' Idee

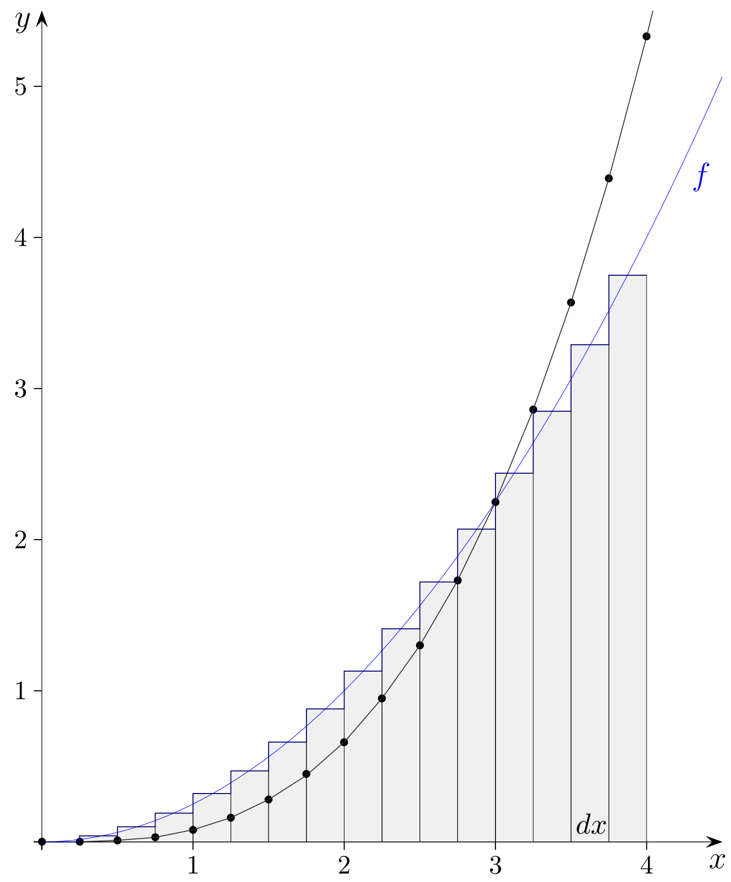


Rechtecksumme mit $dx = 0{,}25$:

$$
\begin{aligned}
A &= 0{,}01 \cdot dx + 0{,}04 \cdot dx + 0{,}10 \cdot dx + 0{,}19 \cdot dx + \ldots \\
&= (0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}10 + 0{,}19 + 0{,}32 + \ldots + 2{,}85 + 3{,}29 + 3{,}76) \cdot dx \approx 5{,}33
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis hätten wir auch ohne Rechnung erhalten können, aber wie und warum?

Leibniz' Idee



Rechtecksumme mit $dx = 0{,}25$:

$$\begin{aligned} A &= 0{,}01 \cdot dx + 0{,}04 \cdot dx + 0{,}10 \cdot dx + 0{,}19 \cdot dx + \ldots \\ &= (0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}10 + 0{,}19 + 0{,}32 + \ldots + 2{,}85 + 3{,}29 + 3{,}76) \cdot dx \approx 5{,}33 \end{aligned}$$

Beachte, dass die Rechteckhöhen Steigungen darstellen.

$$\begin{aligned} 0{,}01 &= \frac{0{,}001 - 0}{dx} \\ 0{,}04 &= \frac{0{,}010 - 0{,}001}{dx} \\ 0{,}10 &= \frac{0{,}035 - 0{,}010}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 0{,}01 \cdot dx + 0{,}04 \cdot dx + 0{,}10 \cdot dx + 0{,}19 \cdot dx + \ldots \\ &= (0{,}001 - 0) + (0{,}010 - 0{,}001) + (0{,}035 - 0{,}010) + \ldots + (5{,}333 - 4{,}395) \\ &= 5{,}333 \qquad \text{Die Summanden zwischen 0 und 5,333 heben sich auf (Teleskopsumme).} \\ &= F(4) \end{aligned}$$

Flächenberechnung

Quintessenz
Zur Berechnung einer Fläche A unterhalb eines Graphen einer Funktion f wird f als Ableitung betrachtet. Es ist also die Aufleitung F (Stammfunktion) von f zu bilden, $F'(x) = f(x)$. Um A zu ermitteln, werden die Intervallgrenzen in F eingesetzt, die rechte zuerst.

Fläche A unterhalb des Graphen von f in den Grenzen von 0 bis a:

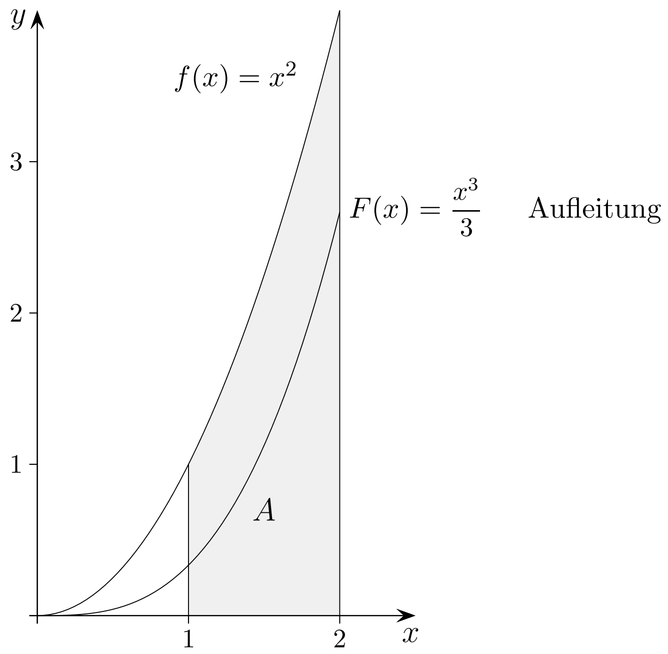
$$A = \int\limits_0^a f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_0^a = F(a), \quad F(x) \text{ Aufleitung}, \quad F(0) = 0$$

Integralzeichen (langgezogenes s) $\int$ in Anlehnung an $\sum f(x)\,dx$ lat. summa

$$A = \int\limits_0^4 \frac{1}{4}x^2\,dx = \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3} = 5{,}\overline{3}$$

allgemeiner:

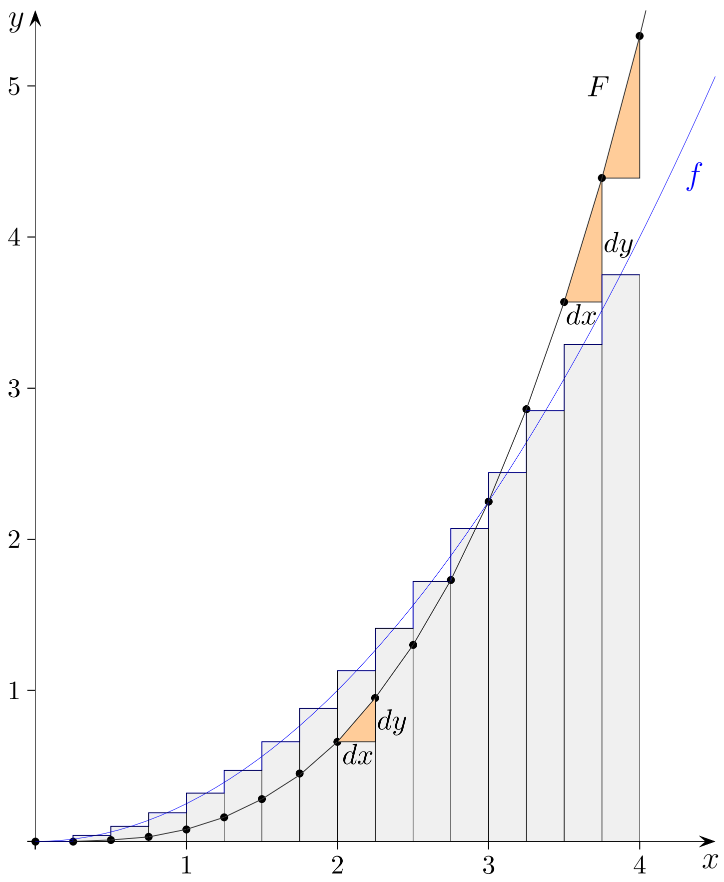
$$A = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a), \quad F(x) \text{ Aufleitung}$$



$$A = \int\limits_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Linke Grenze steht unten.

Leibniz-Notation



$y = F(x)$ ist eine Stammfunktion von f,

d. h. es gilt stets: $F'(x) = f(x) \approx \dfrac{dy}{dx}$ $\quad$ dy ist der jeweilige Zuwachs von F auf einem Unterteilungs-Intervall.

Der Inhalt eines Rechtecks beträgt $f(x) \cdot dx \approx \dfrac{dy}{dx} \cdot dx = dy$ mit dem entsprechenden dy.

Summe aller Rechteckinhalte: $A \approx \sum dy = y$ $\quad$ hier $y = F(4) - F(0)$

Die Differenz hängt nicht von der Breite dx ab.

Der Inhalt der Fläche unter einem Graphen kann als Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion an der Stelle der rechten und linken Grenze bestimmt werden.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

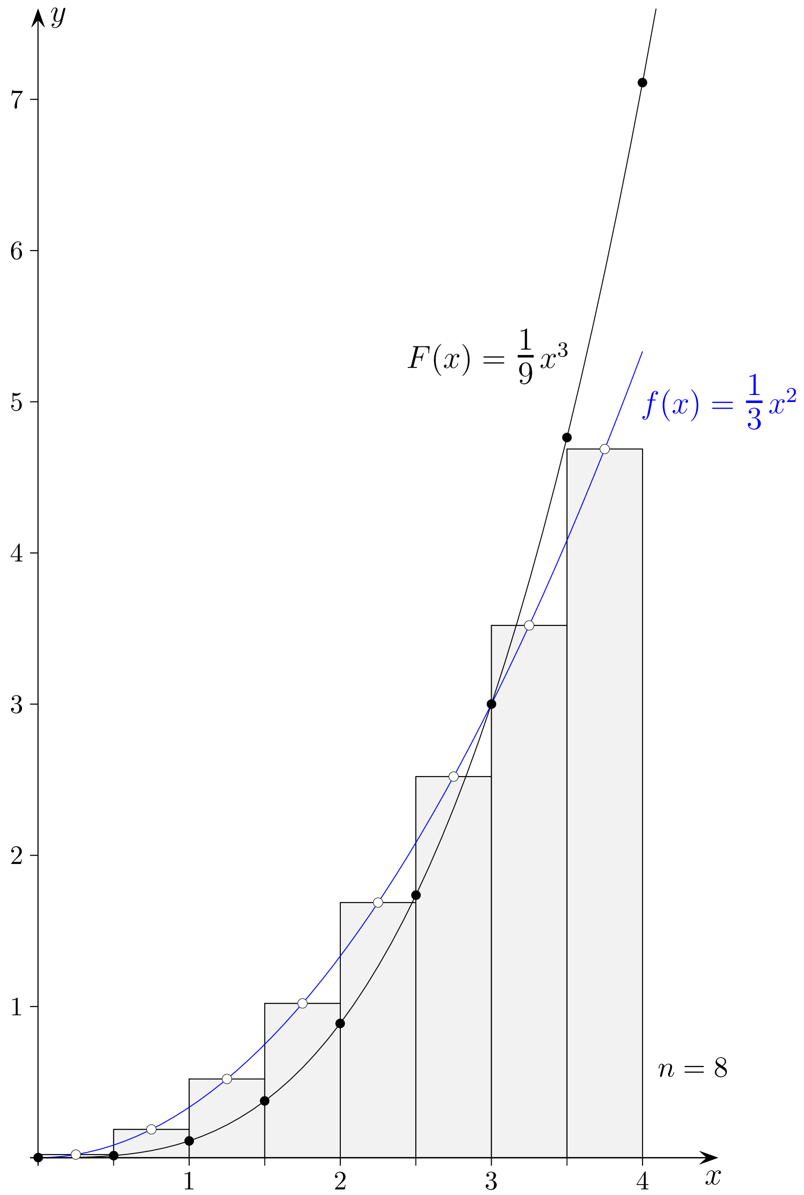
Leibniz-Notation:

$$A = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int dy = y$$

Bei Leibniz entfallen die Integrationsgrenzen.
y ist hier der Funktionswert F(rechte Grenze).
Die Stammfunktion beginnt hier im Ursprung.

Flächeninhalt als Grenzwert

$$
\begin{aligned}
s_8 &= 7{,}0833333\ldots\\
s_{16} &= 7{,}1041666\ldots\\
s_{32} &= 7{,}1093750\ldots\\
s_{64} &= 7{,}1106770\ldots\\
s_{128} &= 7{,}1110026\ldots\\
s_{256} &= 7{,}1110839\ldots\\
s_{512} &= 7{,}1111043\ldots\\
s_{1024} &= 7{,}1111094\ldots\\
s_{2048} &= 7{,}1111106\ldots\\
s_{4096} &= 7{,}1111110\ldots\\
\longrightarrow &\quad 7{,}1111111\ldots
\end{aligned}
$$



s_n ist Inhaltssumme der Rechtecksflächen für n Unterteilungen.
Die Folge erzeugt den Grenzwert $\frac{64}{9}$.

Plausibel[1] dürfte nun sein:
Je feiner die Einteilung des Intervalls $[a;b]$ ist, um so besser stimmt die Summe der Rechtecke mit der Differenz $F(b) - F(a)$ überein. dx kann so klein gewählt werden, dass der Näherungsfehler vernachlässigbar ist. Wir können uns auch vorstellen, dass dx die Werte einer gegen null strebenden Folge annimmt. Die gültigen Dezimalstellen der Reckteckssummen stabilisieren sich dann sukzessive.

[1]Für eine genauere Begründung wird der (anschauliche) Mittelwertsatz benötigt. Für jedes Unterteilungs-Intervall gilt: $\frac{dy}{dx} = F'(\xi)\ \ (= f(\xi))$ für ein bestimmtes ξ des Intervalls und damit $dy = f(\xi)dx$.

Anfang des Jahres 1675 erfuhr Leibniz aus einem Brief eines Sekretärs der Royal Society, dass Newton über eine allgemeine Methode zur Berechnung von Tangenten, Flächeninhalten, Bogenlängen usw. verfügt, ohne dass Einzelheiten genannt wurden.

Im Herbst 1675 formulierte Leibniz den Zusammenhang von Differentiation und Integration und führte das Integralzeichen $\int$ ein. Für Leibniz war die Integration eine Summation, für Newton die Ermittlung der Bestandsfunktion aus der Änderungsrate.

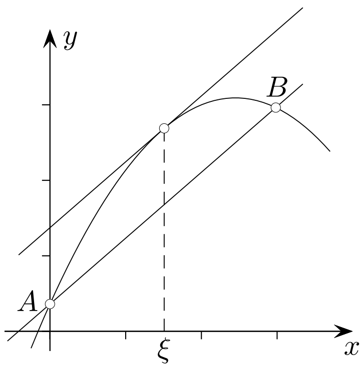
Leibniz erhielt 1676 bei seinem zweiten Besuch in London Einblick in einige Dokumente Newtons, der das missbilligt hätte. Dieser Umstand nährte den späteren Plagiatsvorwurf.
Für die englische Seite nicht erkennbar hatte Leibniz bis zu diesem Zeitpunkt jedoch die wesentlichen Teile seines Infinitesimalkalküls gefunden.

Es kann gezeigt werden, dass für eine stückweise stetige Funktion f die Lage der ξ_i im jeweiligen Unterteilungs-Intervall für den Flächeninhalt mit $A = \sum\limits_i dy_i = \sum\limits_i f(\xi_i)dx$ unerheblich ist, siehe Anhang.

Mittelwertsatz

Der Mittelwertsatz verknüpft die Sekantensteigung mit der Ableitung einer Funktion.

Die Steigung der Sekante zwischen zwei Punkten A und B einer differenzierbaren Funktion wird zwischen diesen beiden Punkten (hier an der Stelle ξ) als Ableitung angenommen.



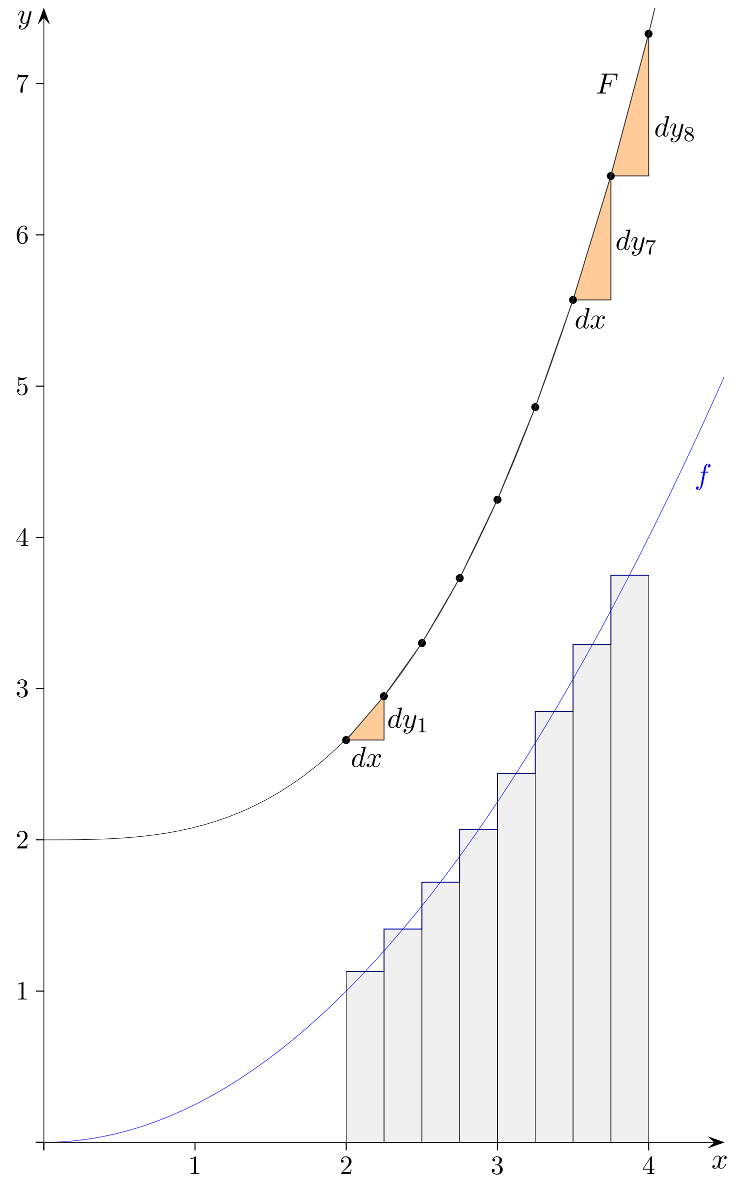
$A\big(a \mid f(a)\big)$

$B\big(b \mid f(b)\big)$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Der Satz wurde zuerst von Lagrange 1797 bewiesen.

Zusammengefasst



Um den Inhalt der Fläche unterhalb des Graphen von f in den Grenzen von 2 bis 4 zu ermitteln, kann dx beliebig klein vorgegeben werden. f wird als Ableitung von F betrachtet, $F' = f$.

Zu dx gibt es die Folge dy_i der Zuwächse von F mit $\dfrac{dy_i}{dx} = f(\xi_i)$. (Mittelwertsatz)

Die Höhe der Rechtecke beträgt jeweils $f(\xi_i)$ und wir erhalten als Summe aller Rechteckinhalte:

$$A = \sum_i f(\xi_i) \cdot dx = \sum_i \frac{dy_i}{dx} \cdot dx = \sum_i dy_i = F(4) - F(2)$$

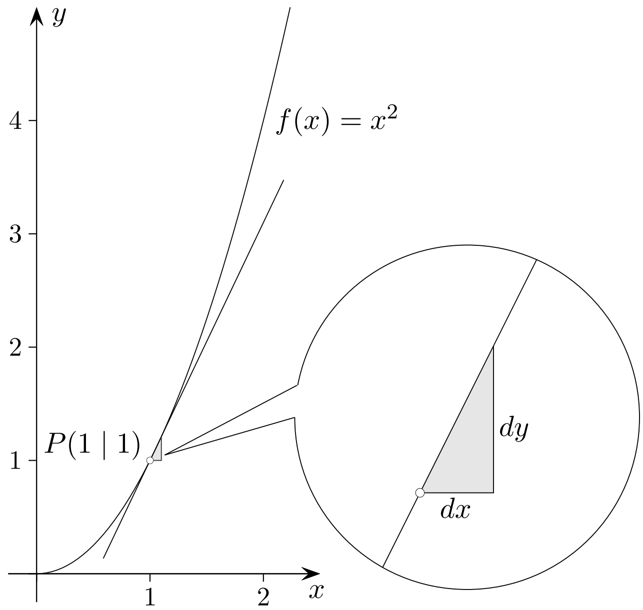
Der Inhalt der Fläche unterhalb des Graphen von f ergibt sich für dx strebt gegen null.
A bleibt konstant. Der Grenzwert ist somit $F(4) - F(2)$.

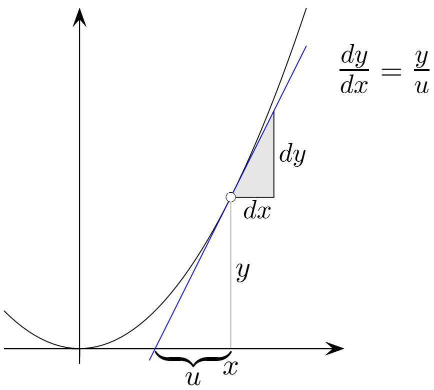
$f(x) = \frac{1}{4}x^2,\ F(x) = \frac{1}{12}x^3,\ \xi_1 = 2{,}126,\ \xi_2 = 2{,}376,\ \xi_3 = 2{,}626,\ \ldots,$ ξ_i jeweils nahezu mittig zur Rechteckseite

Unendlich klein

Für Leibniz sind in seinem *calculus differentialis et integralis* Kurven Polygone mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten. Entgegen allen anders lautenden, oft wiederholten Behauptungen in der Literatur ist es Leibniz 1676 gelungen, den Begriff *unendlich klein* math. korrekt zu definieren. Das Manuskript wurde erst im 20. Jh. aufgefunden. „Wenn eine beliebige positive reelle Zahl vorgegeben wird, dann kann die unendlich kleine (variable) Größe einen Wert annehmen, der kleiner als diese reelle Zahl ist.“

Die Rechteckbreite dx ist also unendlich klein. Wir können uns vorstellen, dass die Größe dx die Werte einer Nullfolge annimmt. Für den *calculus differentialis* bedeutet das:





$$
\begin{aligned}
y &= x^2 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\
&= \frac{x^2 + 2x\,dx + (dx)^2 - x^2}{dx} = 2x + dx \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

Leibniz’ abgekürzte Schreibweise enthält bereits den Grenzprozess.

Unendlich kleine Größen wurden von den Brüdern Bernoulli, l’Hospital und Varignon als real existierend angesehen, also kleiner als jede reelle Zahl. Leibniz widersprach, jedoch war für ihn diese schräge Interpretation für die Ergebnisse unerheblich.
Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurden die Grundlagen der Infinitesimalrechnung durch Bolzano, Cauchy und Weierstraß präzisiert. Das Rechnen mit unendlich kleinen Größen wurde weitestgehend verbannt und durch ausformulierte Grenzwertbetrachtungen ersetzt.

Integralfunktion

Ausgehend von $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ kann die rechte Grenze b als variabel betrachtet werden.

Die Integrationsvariable wird hierbei der Übersicht halber umbenannt.

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \quad \text{d.h. } F(x) = F(a) + \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Ist f die Änderungsratenfunktion, so kann hiermit die Bestandsfunktion
mit dem Anfangswert $F(a)$ ermittelt werden.

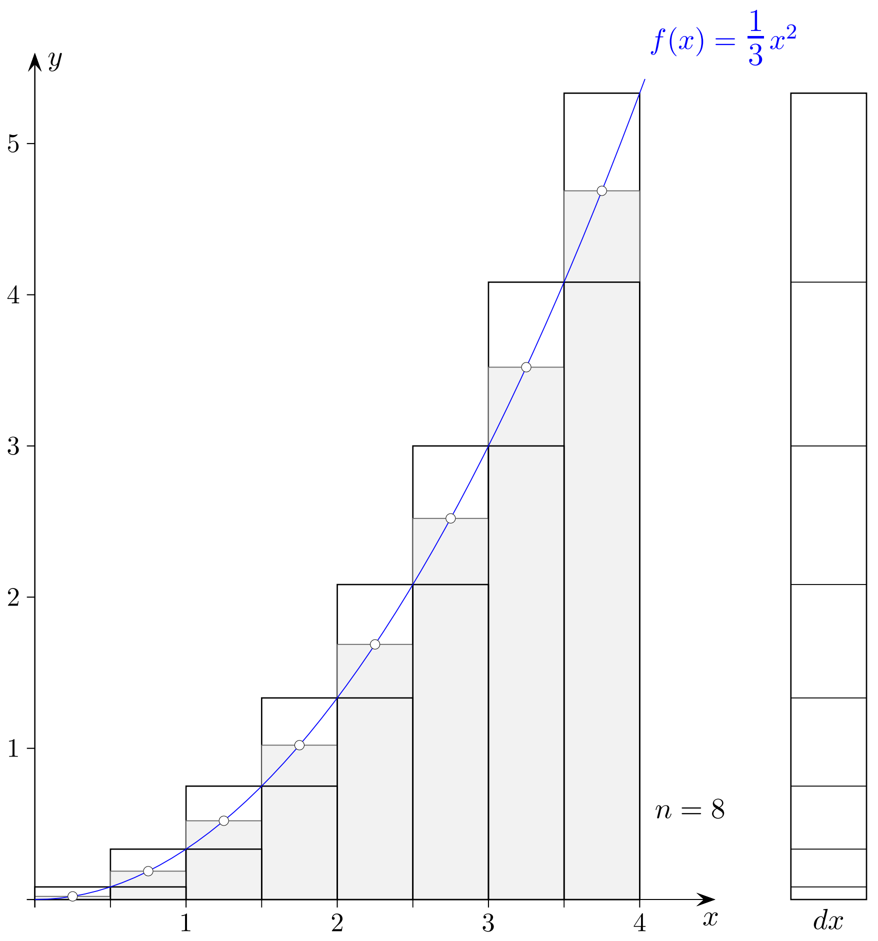
Abgeleitet erhalten wir: $\dfrac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)\,dt = F'(x) = f(x)$

$$H(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \text{ heißt Integralfunktion, } H(a) = 0.$$

Für Newton war der Zusammenhang von Änderungsraten- und Bestandsfunktion offensichtlich.

Die Infinitesimalrechnung von Leibniz benötigte den Funktionsbegriff nicht explizit. Er wurde von Johann Bernoulli 1694 und dann weiter von Euler 1748 thematisiert.

Anhang Ober- und Untersumme



Der Inhalt der Fläche unterhalb des Graphen der monoton steigenden Funktion f in den Grenzen von 0 bis 4 liegt zwischen der Ober- und Untersumme. Die Differenz $f(4) \cdot dx$ von Ober- und Untersumme strebt für $dx \to 0$ gegen null. Jede Rechtecksumme $\sum_i f(\xi_i) \cdot dx$ mit beliebigen Stützstellen ξ_i jeweils innerhalb der Unterteilungs-Intervalle liegt zwischen Ober- und Untersumme und strebt daher für $dx \to 0$ gegen den selben Flächeninhalt.

Intervallschachtelung

Grenzwerte

Reelle Zahlen

Leibniz' Kalkül Kurzfassung

Startseite