Kettenregel (Ableitung von $f_2 \circ f_1$)

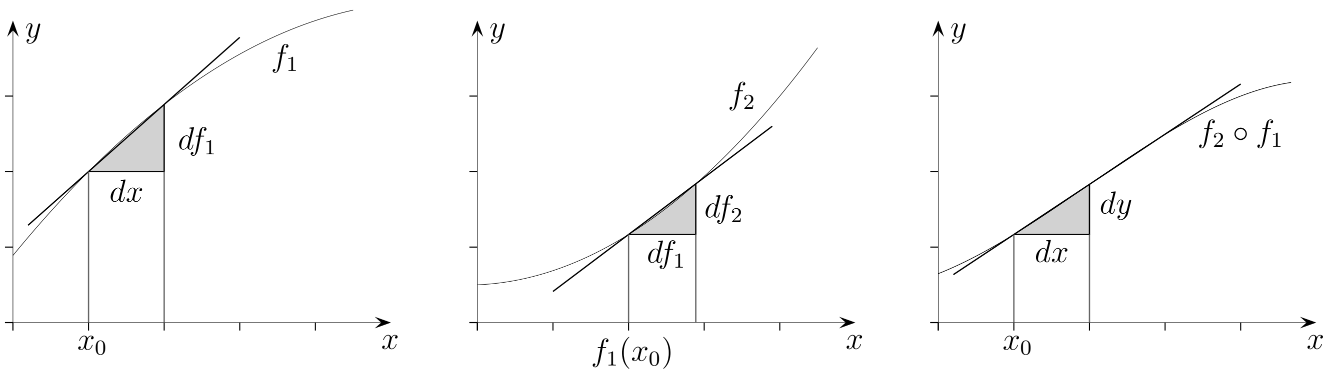
Leibniz (1646-1716)

Eine Funktion wie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^2 + 1$ kann in eine

innere Funktion $f_1 = \frac{1}{2}x - 1$ und eine

äußere Funktion $f_2 = x^2 + 1$ zerlegt werden. Es ist dann: $f(x) = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x))$.

1. Zeichne die Graphen von f_1, f_2 sowie die Verkettung $f_2 \circ f_1$.



Wir haben die Hoffnung, dass die Ableitung von $f_2 \circ f_1$ mit Hilfe der Ableitungen von f_1 und f_2 ermittelt werden kann.

Untersuchen wir wieder den Funktionszuwachs Δy der verketteten Funktion an der Stelle x_0 für einen Zuwachs um dx.

$$\Delta y = f_2(f_1(x_0 + dx)) - f_2(f_1(x_0))$$

Um die lineare Abhängigkeit von dx zu erkennen, approximieren wir

$f_1(x_0+dx)$ durch $f_1(x_0+dx) \approx f_1(x_0)+df_1 = f_1(x_0)+f_1'(x_0)\,dx$, wir erhalten:

$$\Delta y \approx f_2(f_1(x_0) + f_1'(x_0)\,dx) - f_2(f_1(x_0))$$

Nun gilt $f_2(x_0 + dx) \approx f_2(x_0) + f_2'(x_0)\,dx$,

ersetzen wir x_0 durch $f_1(x_0)$ und dx durch $f_1'(x_0)\,dx$, so erhalten wir

$dy = f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0)\ dx$ und damit die Kettenregel: $(f_2 \circ f_1)'(x_0) = f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0)$

2. Zeige: Die Verkettung zweier linearer Funktionen ergibt eine lineare Funktion. Welche Steigung hat sie?

3. Leite ab.

a) $f(x) = (2x + 1)^3$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = e^{5x}$ d) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

Kettenregel

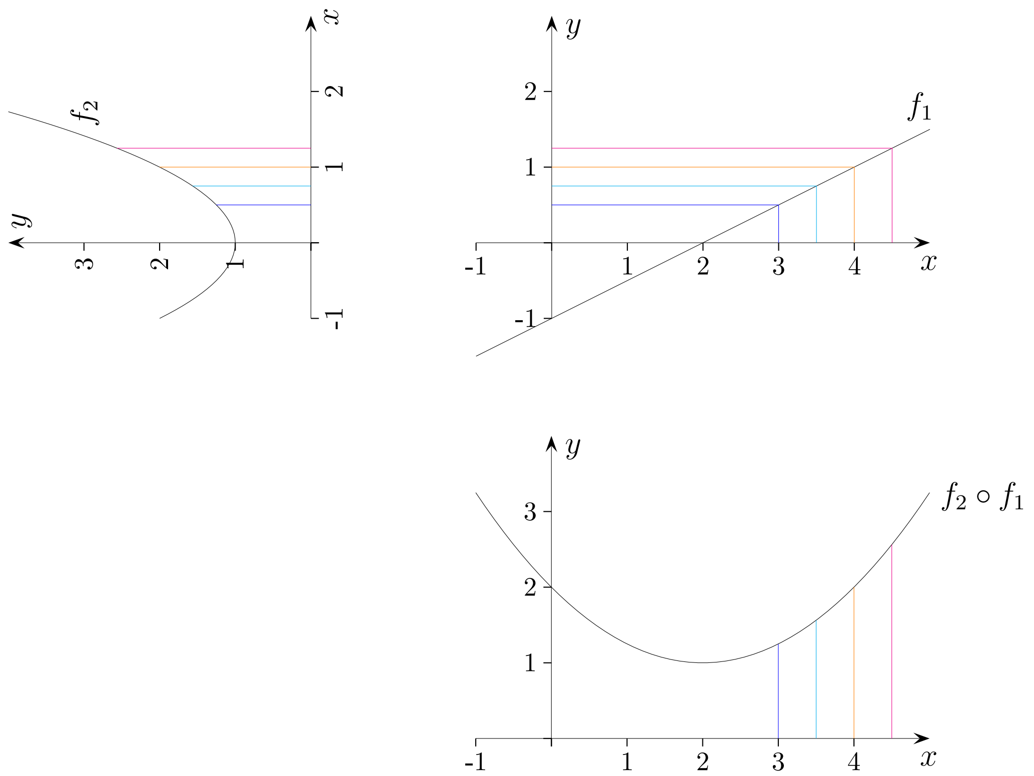
1. Eine Funktion wie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^2 + 1$ kann in eine

   innere Funktion $\quad f_1 = \frac{1}{2}x - 1 \quad$ und eine

   äußere Funktion $\quad f_2 = x^2 + 1 \quad$ zerlegt werden.

   Es ist dann: $\quad f(x) = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x))$.

   Zeichne die Graphen von f_1, f_2 sowie die Verkettung $f_2 \circ f_1$.



2. Produkt der Steigungen

3. Leite ab.

   a) $f(x) = (2x+1)^3$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

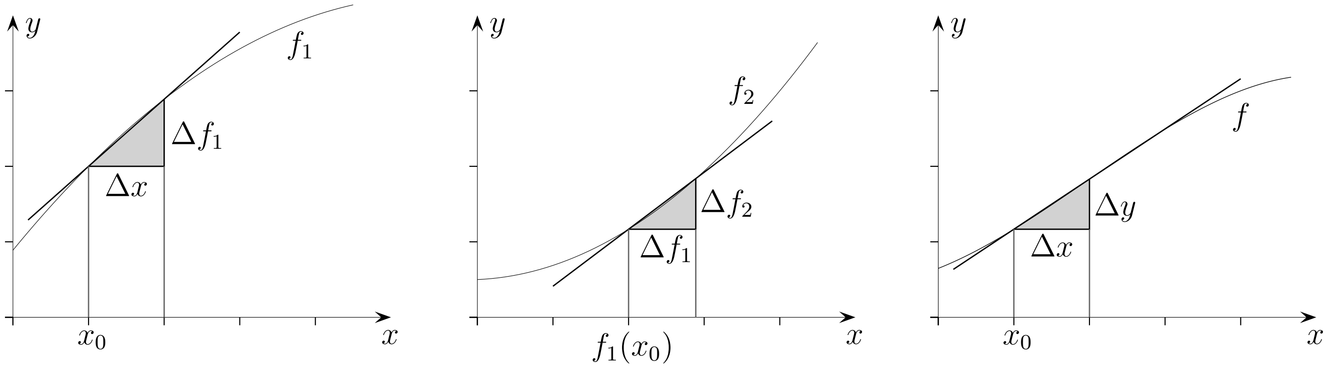
   c) $f(x) = e^{5x}$ d) $f(x) = \sqrt{3x+2}$

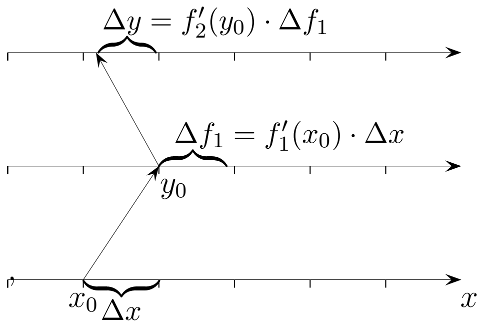
   a) $f'(x) = 6 \cdot (2x+1)^2$ b) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

   c) $f'(x) = 5\,e^{5x}$ d) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

Kettenregel Ableitung von $f(x) = f_2(f_1(x))$

Leibniz (1646-1716)





$$
\begin{aligned}
\Delta y &= f_2'(y_0) \cdot \Delta f_1 \\
&= f_2'(f_1(x_0)) \cdot \Delta f_1 \\
&= f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0) \cdot \Delta x \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0)
\end{aligned}
$$

1. Leite ab.
   a) $f(x) = (2x+1)^3$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
   c) $f(x) = e^{5x}$
   d) $f(x) = \sqrt{3x+2}$

Verkettung $f(g(x))$