Integralrechnung

Gegeben sei $f(x) = x^2 + 1$.
Eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung f ist, heißt *Stammfunktion* von f.
Übliche Schreibweise für Stammfunktionen:

$$F(x) = \int (x^2 + 1)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + x + C$$

C heißt *Integrationskonstante* (und spielt zunächst bei der Flächenberechnung keine Rolle).

$\int (x^2 + 1)\,dx$ heißt *unbestimmtes Integral*, im Gegensatz zum *bestimmten Integral* $A = \int_a^b f(x)\,dx$.
Eine Funktion zu integrieren bedeutet, eine Stammfunktion zu ermitteln.

Beispiele:

$$\int 2\ dx = 2x + C$$

$$\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\ dx = -\frac{1}{x} + C$$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Schreibweise: $A = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$$A = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 2 - (-\frac{1}{3} - 1) = 6$$

1. Integriere die Funktionen.

   a) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 5x + 1$

   b) $f(x) = x^2 \cdot (x^3 + 3x^2 - 7x + 2)$

   c) $f(x) = -\dfrac{3}{x^2} + 2x^3 + 1$

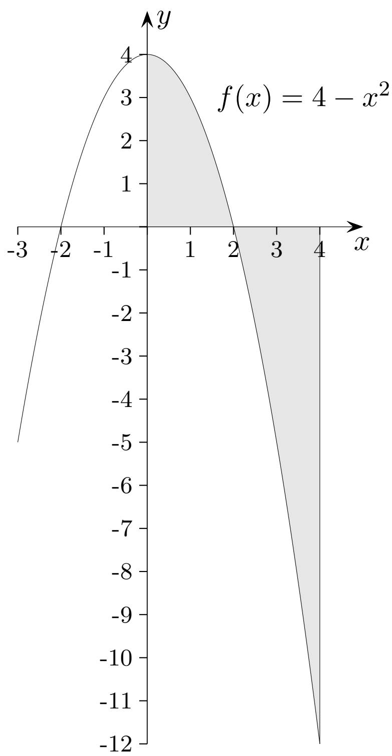
2. Überprüfe a) und c)
   und gib b) und d) <u>ohne</u> Rechnung an.

   a) $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \frac{16}{3}$

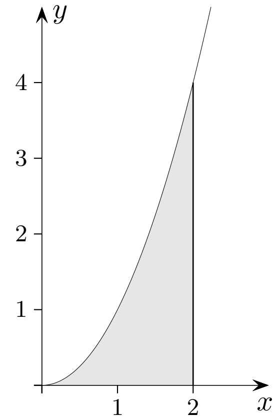
   b) $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx$

   c) $\int_2^4 (4 - x^2)\,dx = -\frac{32}{3}$

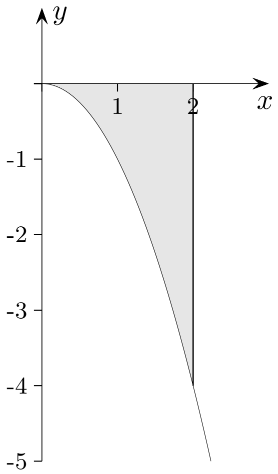
   d) $\int_{-2}^{4} (4 - x^2)\,dx$



Fläche unterhalb der x-Achse



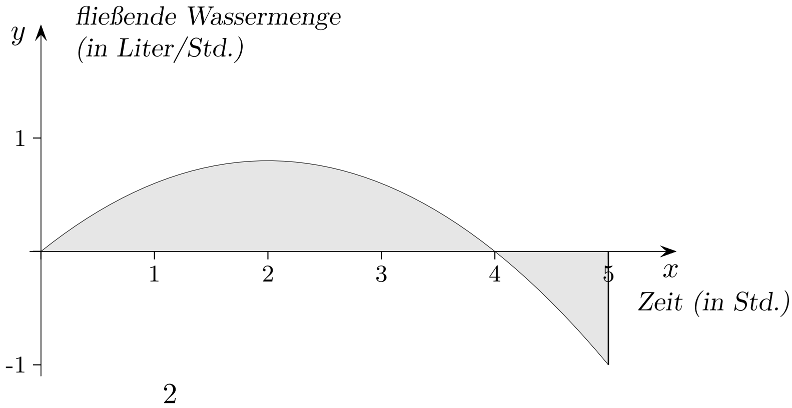
$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \quad \ldots \quad = \frac{8}{3}$$



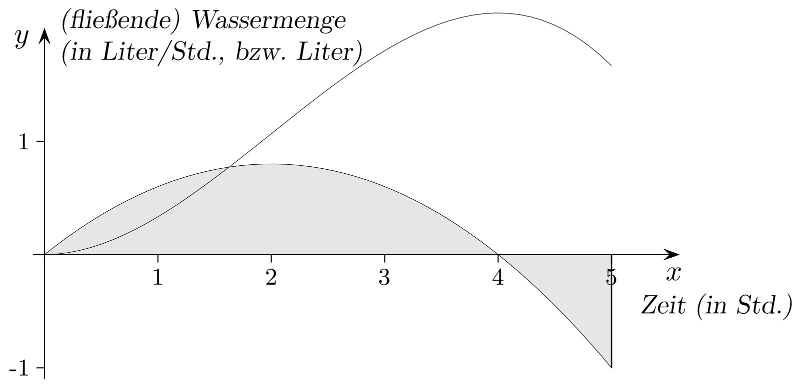
$$\int_0^2 (-x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \quad \ldots \quad = -\frac{8}{3}$$

Die Auswertung des Integrals ergibt hier ein negatives Ergebnis.
Der Inhalt der Fläche unterhalb der x-Achse beträgt $\frac{8}{3}$ *FE*.
Die folgende Aufgabe zeigt, wie nützlich diese Eigentümlichkeit ist.

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss eines Behälters geregelt.
Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer). Ermittle die Wassermenge im Behälter nach 5 Stunden.
Zu welchem Zeitpunkt war die Hälfte dieser Wassermenge im Behälter?
Bekannt ist die lokale Änderungsrate: $f'(x) = -\frac{1}{5}x(x-4), \quad 0 \leq x \leq 5$



Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss eines Behälters geregelt.
Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter
(zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer). Ermittle die Wassermenge im Behälter nach 5 Stunden.
Zu welchem Zeitpunkt war die Hälfte dieser Wassermenge im Behälter?
Bekannt ist die lokale Änderungsrate: $f'(x) = -\frac{1}{5}x(x-4), \quad 0 \le x \le 5$

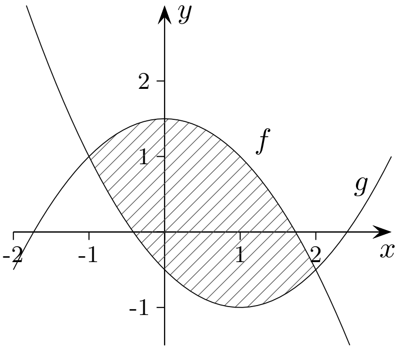


$$F(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{2}{5}x^2$$

$$F(5) = \frac{5}{3} \text{ (Liter)}$$

$$F(x) = \frac{5}{6} \quad \overset{\text{GTR}}{\Longrightarrow} \quad x = 1{,}71 \text{ (Std.)}$$

Die Funktionen $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}$ und $g(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - 1$ schließen die Fläche A ein.
Wie viel Prozent von A liegt oberhalb der x-Achse? (GTR)



Die Funktionen $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1$ schließen die Fläche A ein.

Wie viel Prozent von A liegt oberhalb der x-Achse? (GTR)

Schnittstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

Flächeninhalt $A = \frac{9}{2}$ *FE*.

62,0 %