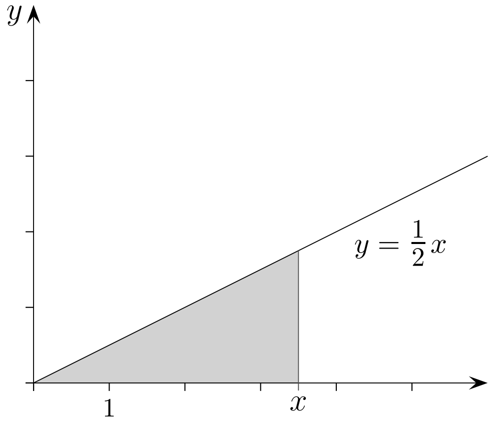
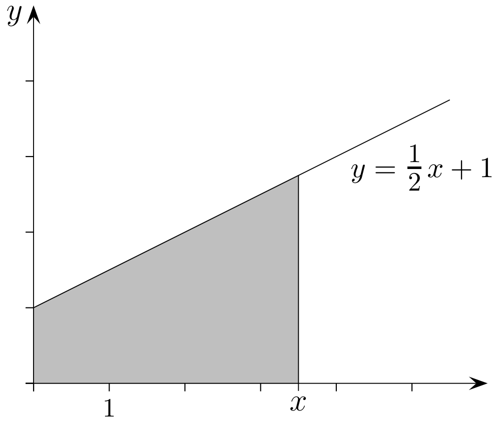
Inhaltsfunktionen

Wir betrachten zunächst Flächeninhalte, die elementar berechnet werden können.
Sei $A(x)$ der Flächeninhalt unterhalb des Graphen in den Grenzen von 0 bis x.

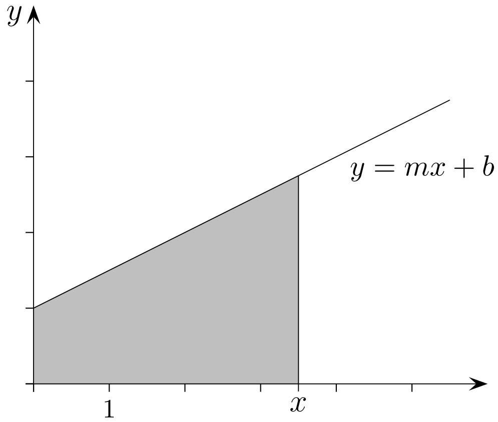
a)



b)



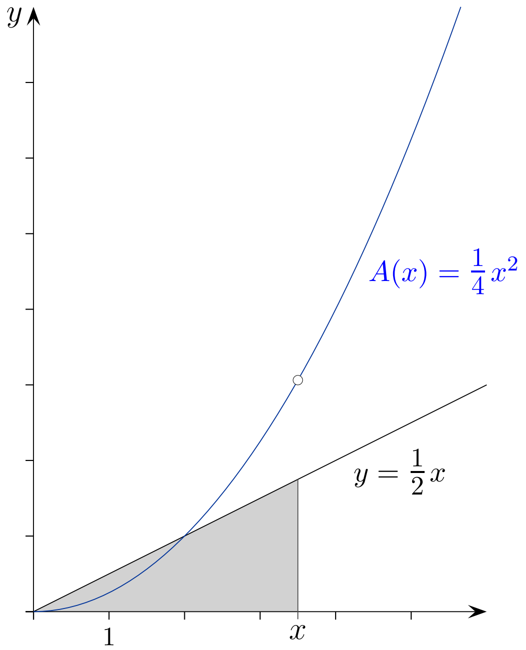
c)



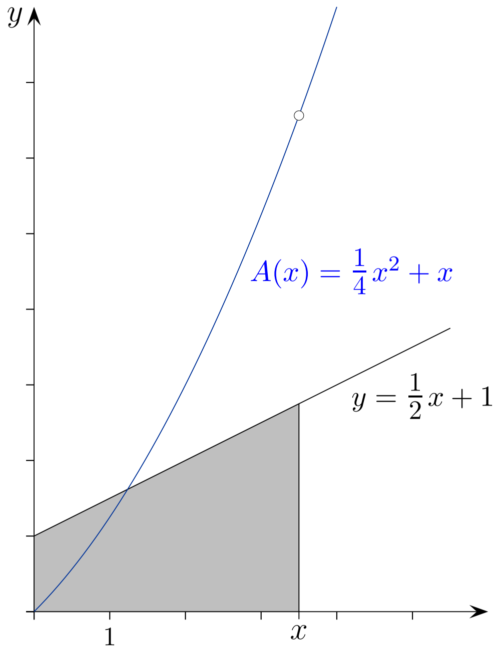
Inhaltsfunktionen

Wir betrachten zunächst Flächeninhalte, die elementar berechnet werden können.
Sei $A(x)$ der Flächeninhalt unterhalb des Graphen in den Grenzen von 0 bis x.

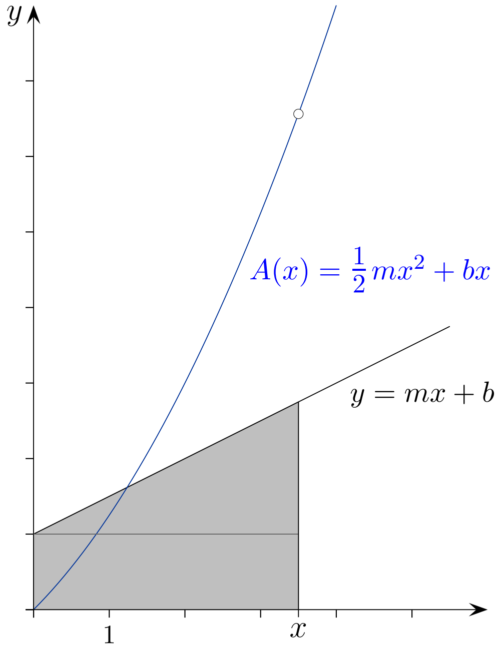
a)



b)

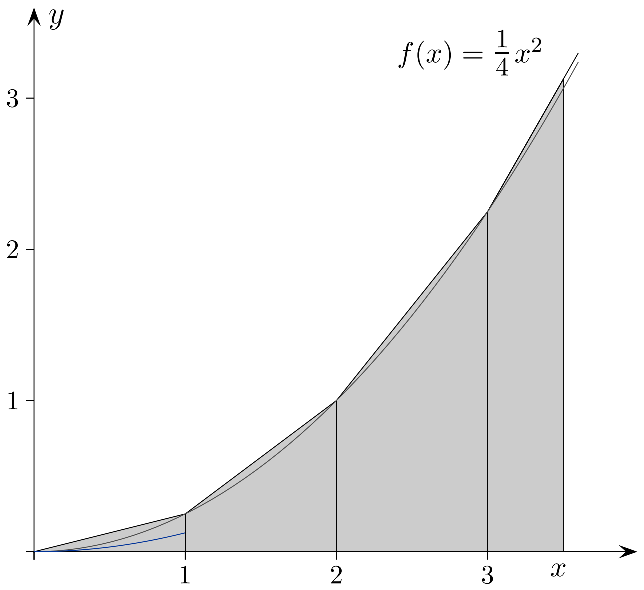


c)

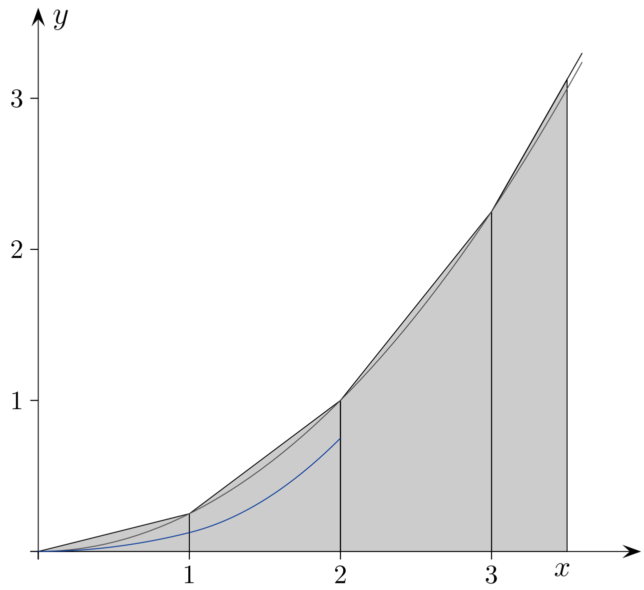


Stets gilt: $A'(x) = f(x)$.
Im Folgenden ist es nicht erforderlich, den Funktionsterm von $A(x)$ aufzustellen.
Es genügt zu wissen, dass $A(x)$ eine Aufleitung von f ist.
$A(x)$ setzt sich aus einem linearen Anteil (Rechteckinhalt bx) und einem quadratischen (Dreiecksfläche, halber Rechteckinhalt $x \cdot mx$) zusammen. Das Anwachsen von $A(x)$ stelle man sich mit größer werdendem x dynamisch vor.

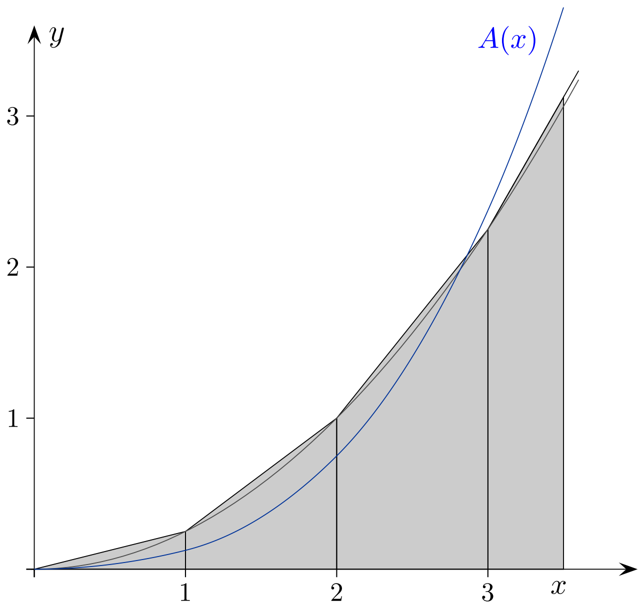
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



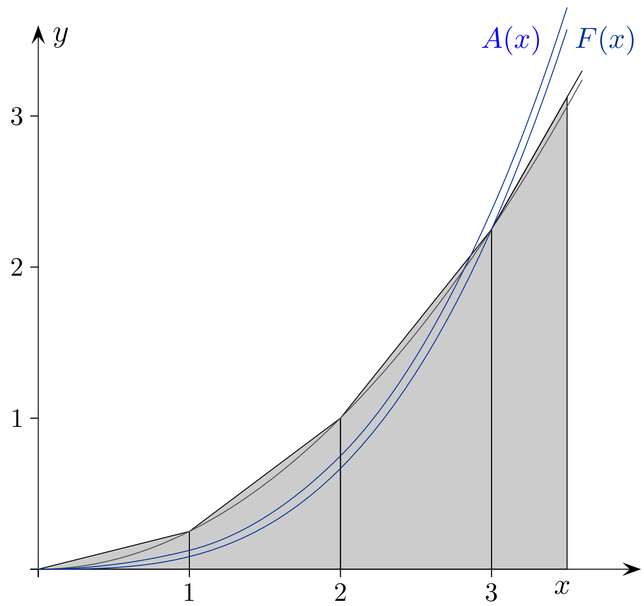
Der Graph von f wird durch eine stückweise lineare Funktion angenähert. Auf dem Intervall $[0; 1]$ ist die Inhaltsfunktion $A(x)$ vom Typ a).



An die Inhaltsfunktion auf $[0; 1]$ wird auf dem Intervall $[1; 2]$ ein Graph vom Typ c) stetig (ohne Sprung) drangesetzt, und so fort.



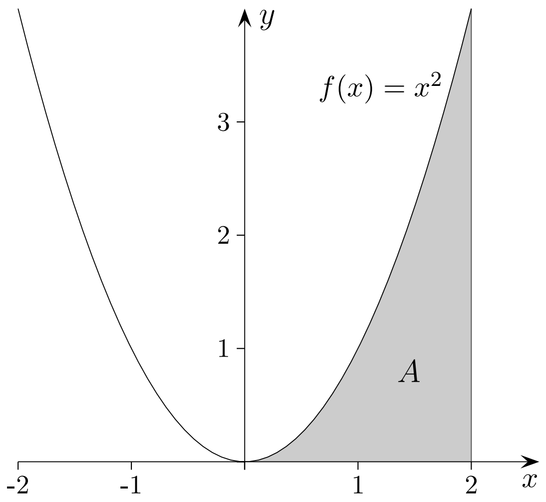
Bei feinerer Unterteilung verwischt der Unterschied zwischen f und der stückweise linearen Funktion[1], sowie zwischen ihrer Aufleitung $A(x)$ und der Aufleitung $F(x)$ von f.



Für die Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f wird statt $A(x)$ die einfacher zu bildende Aufleitung $F(x)$ von f verwendet, zunächst mit $F(0) = 0$.

[1] Wir wollen es bei der Anschauung bewenden lassen.

In den wenigen Fällen, bei denen die Aufleitung von f nicht möglich ist, z. B. bei $f(x) = 2^{-x^2}$, kann zur Flächenberechnung $A(x)$ mit einer geeigneten Unterteilung ermittelt werden.



$$F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$A = \frac{8}{3}$$

Eine Funktion F heißt Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion f, wenn $F'(x) = f(x)$ ist.
Mit F ist auch $F + C$ eine Stammfunktion mit einen konstanten Summanden C.
Zur Flächenberechnung kann eine beliebige Stammfunktion (vorzugsweise $C = 0$) verwendet werden, da in der Differenz $F(b) - F(a)$ der Summand C herausfällt.
Schreibweise:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = \int_a^b \frac{1}{4}x^2\,dx = \big[\frac{1}{12}x^3\big]_a^b = \frac{1}{12}b^3 - \frac{1}{12}a^3$$

Hauptsatz Geogebra
Startseite