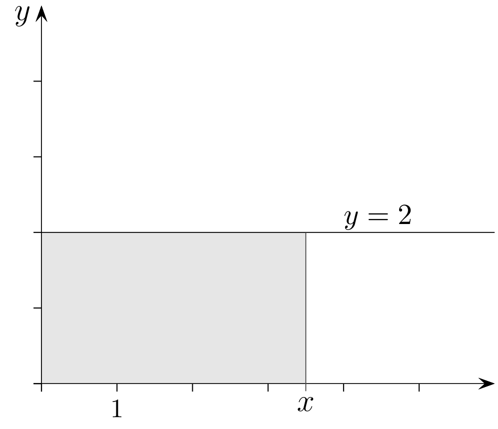
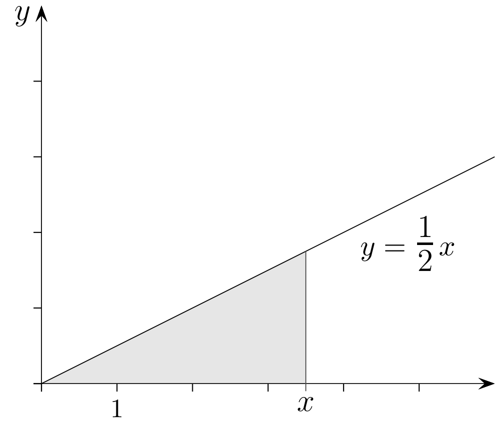
Zusammenhang Aufleiten Flächenberechnung

Das Grundlegende kann anhand einfachster Funktionen aufgedeckt werden.
Wie groß ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen in den Grenzen von 0 bis x?
Ermittle die Inhaltsfunktion $A(x)$ und stelle sie grafisch dar.

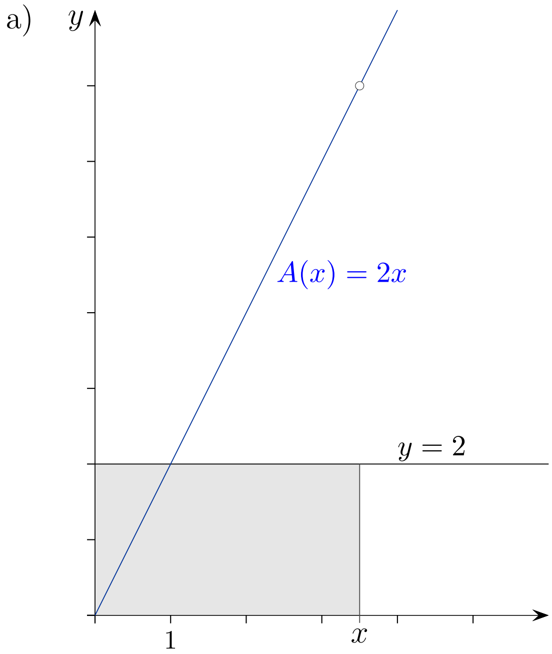
a)

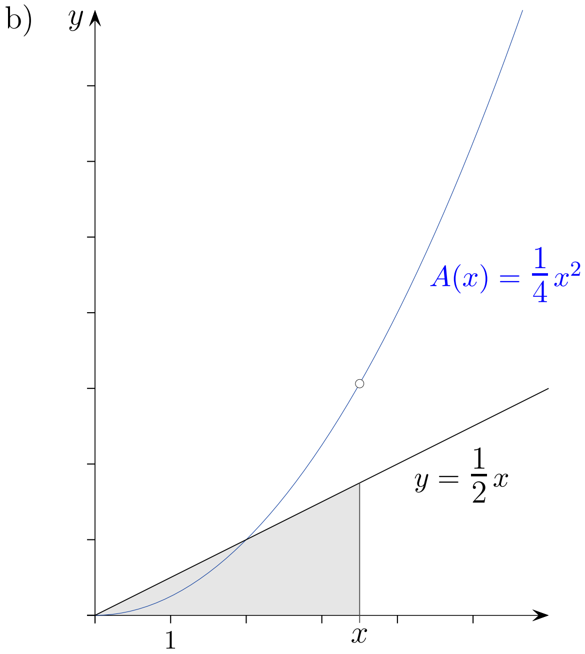


b)



Zusammenhang Aufleiten Flächenberechnung



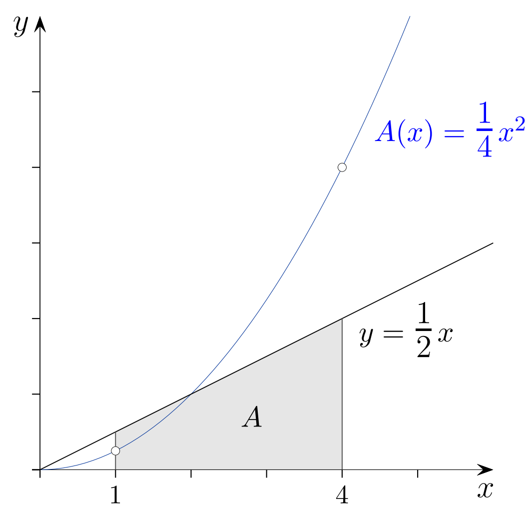


a) Der Flächeninhalt $A(x)$ wächst linear mit der Steigung 2 an, $A'(x) = 2$.

b) Hier ist der Dreiecksinhalt $A(x)$ zu ermitteln, $A'(x) = \frac{1}{2}x$.

Für eine Lösung des Flächenproblems ist eine Inhaltsfunktion $A(x)$ zu ermitteln.

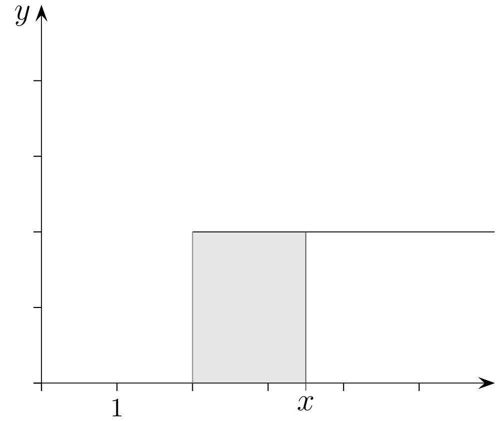
$A = A(4) - A(1) = 4 - 0{,}25 = 3{,}75$



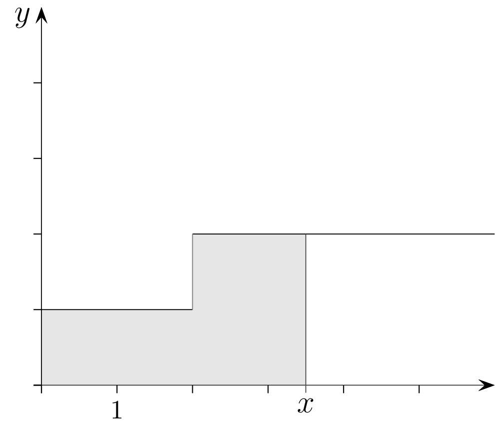
Vorübung

Zeichne den Graphen der Inhaltsfunktion (Integralfunktion) $A(x)$.

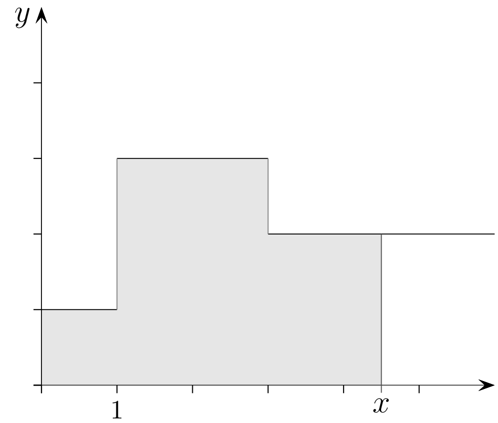
c)



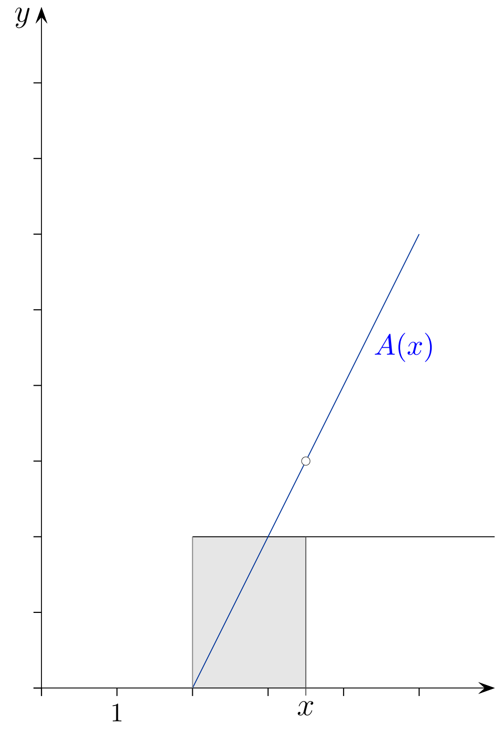
d)

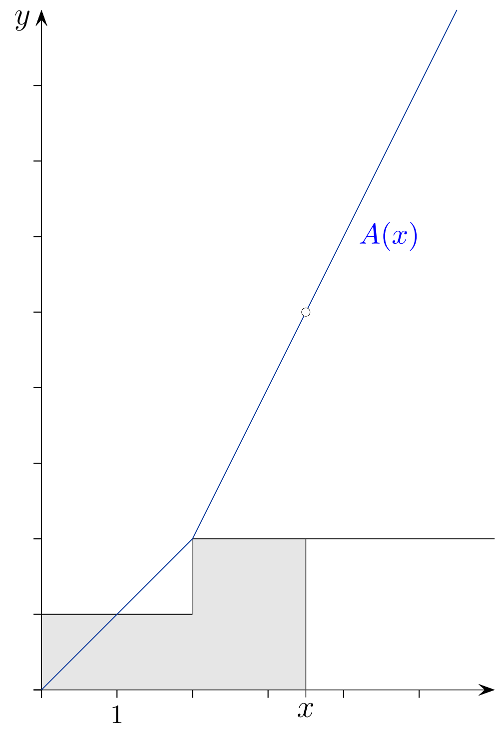


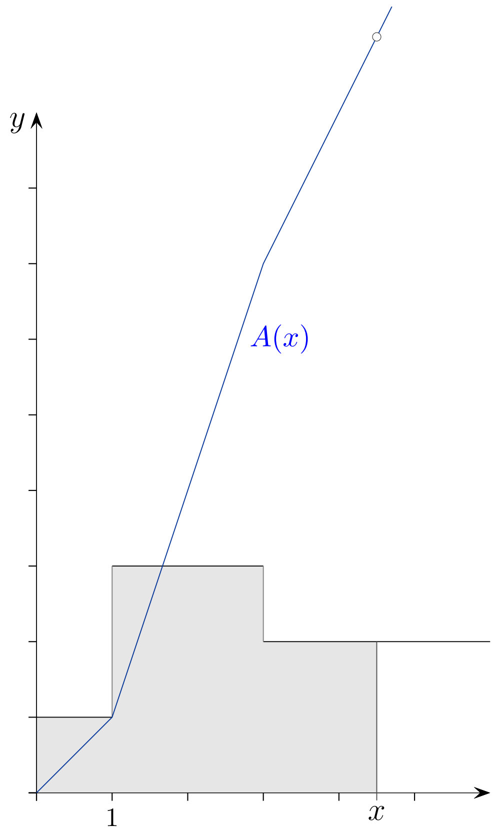
e)



Vorübung

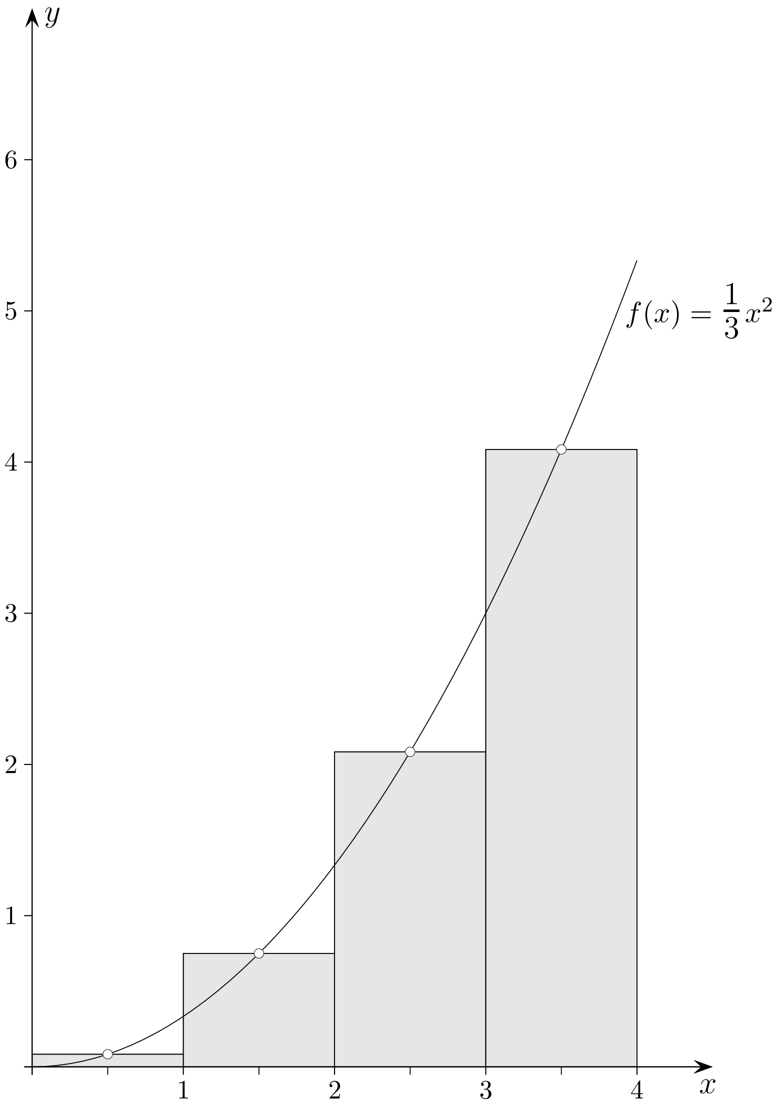
c) 

d) 

e) 

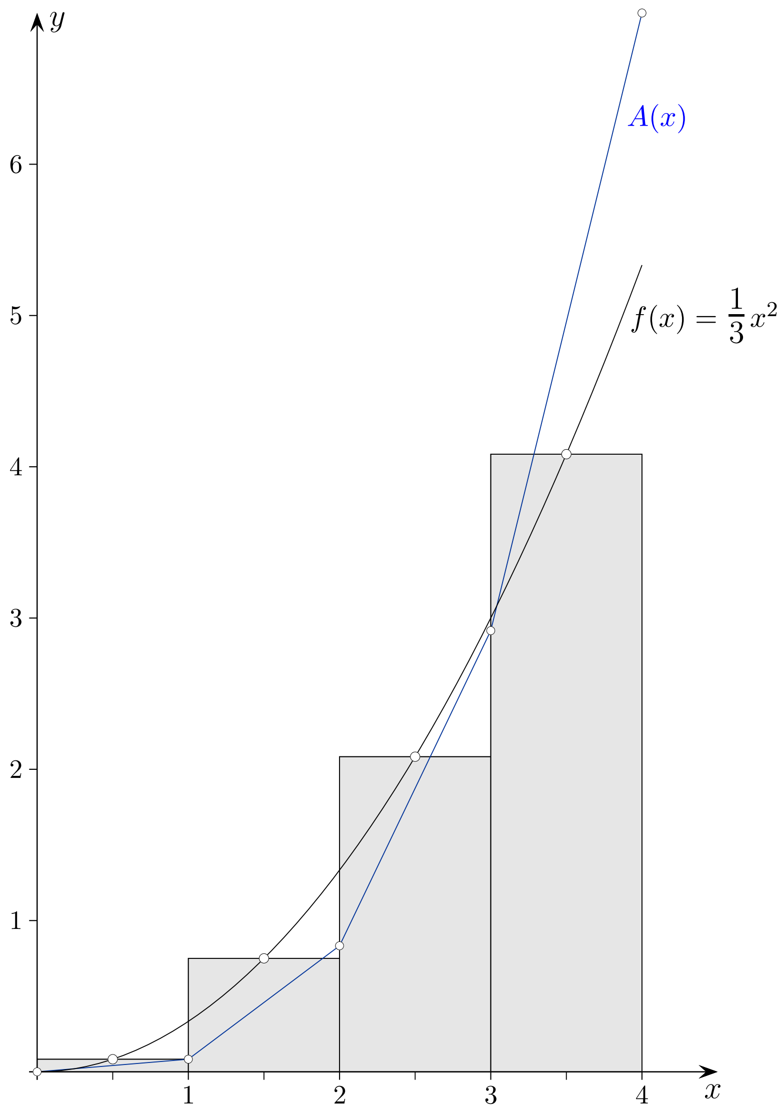
d) Der Flächeninhalt $A(x)$ wächst auf dem Intervall $[0; 2]$ linear mit der Steigung 1 an, anschließend wächst er mit konstanter Steigung 2. Mathematik kann einfach sein: In diesem Beispiel ist bereits die wesentliche Idee des gesuchten Zusammenhangs enthalten.

Inhaltsfunktion



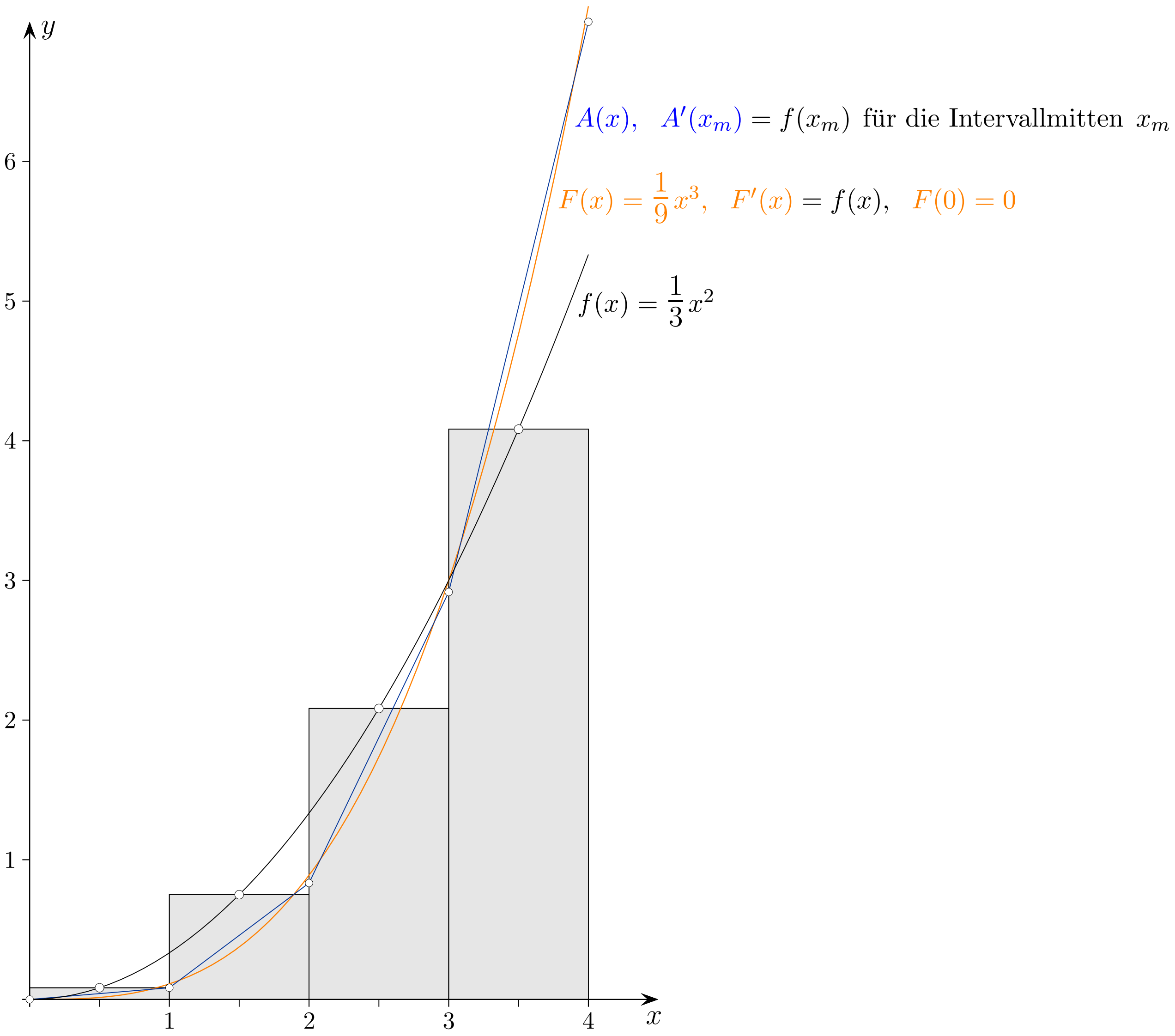
Wir wollen den Inhalt der Fläche unterhalb des Graphen von f in den Grenzen von 0 bis 4 zunächst näherungsweise mit Hilfe der Rechtecke (Treppenfunktion) ermitteln.
Dazu zeichnen wir den Verlauf der Inhaltsfunktion $A(x)$ von der Treppenfunktion.

Inhaltsfunktion



Zu Beginn ermitteln wir $f(0{,}5) = 0{,}083$.
Der Flächeninhalt $A(x)$ wächst linear mit der Steigung $f(0{,}5)$ auf dem Intervall von 0 bis 1 an, anschließend auf dem Intervall von 1 bis 2 mit der Steigung $f(1{,}5) = 0{,}750$, auf dem Intervall von 2 bis 3 mit der Steigung $f(2{,}5) = 2{,}083$, usw.
$A(x)$ ist die stetige Aufleitung der Treppenfunktion.
Da die Rechteckbreite 1 beträgt, stimmt die y-Koordinate des Endpunkts der 1. Strecke mit $f(0{,}5)$ überein, die des Endpunkts der 2. Strecke mit $f(0{,}5) + f(1{,}5)$, usw.
Für den Graph von $A(x)$ (Streckenzug) ist somit keine Rechnung erforderlich.
Die Ableitung $A'(x)$ existiert nicht an den Intervallgrenzen, das ist aber ohne Belang.
$A'(x)$ stimmt mit den Funktionswerten von f an den Intervallmitten überein.
Eingebung: Statt der Treppenfunktion leiten wir f auf.

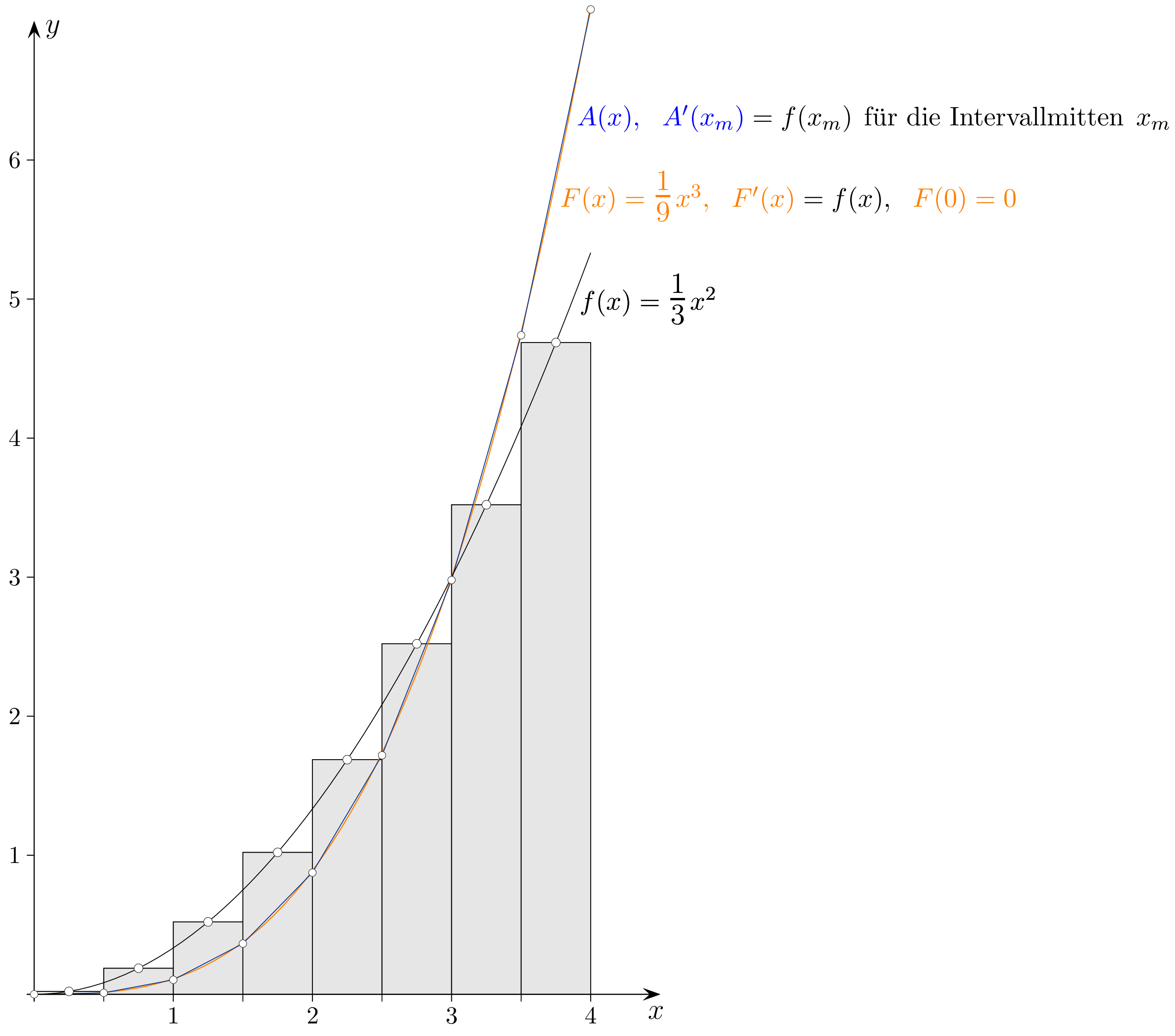
Aufleitung



Bei einer feineren Unterteilung wird der Flächeninhalt besser angenähert und $A(x)$ gleicht sich der Aufleitung $F(x)$ an, denn (plausibel, siehe auch GeoGebra-Datei Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):

Zu f gibt es nur eine Aufleitung F mit $F(0) = 0$.
Für $A(x)$ gilt $A'(x_m) = f(x_m)$ für die Intervallmitten x_m und $A(0) = 0$.
Der Abstand aufeinanderfolgender Intervallmitten kann beliebig klein gewählt werden.

Flächenberechnung mit der Aufleitung, Integration



Eine Funktion F heißt Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion f, wenn $F'(x) = f(x)$ ist.
Mit F ist auch $F + C$ eine Stammfunktion für einen konstanten Summanden C.
Zur Flächenberechnung kann eine beliebige Stammfunktion (vorzugsweise $C = 0$) verwendet werden, da die Differenz $F(b) - F(a)$ stets mit $A(b) - A(a)$ übereinstimmt, weil C herausfällt.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = \int_a^b \frac{1}{3}x^2\,dx = \Big[\frac{1}{9}x^3\Big]_a^b = \frac{1}{9}b^3 - \frac{1}{9}a^3$$