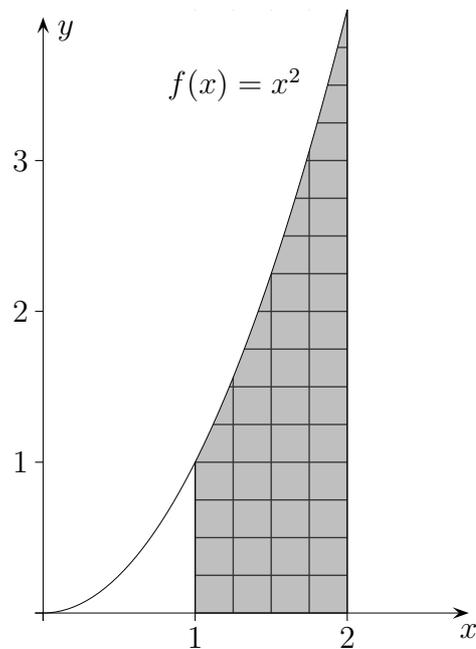
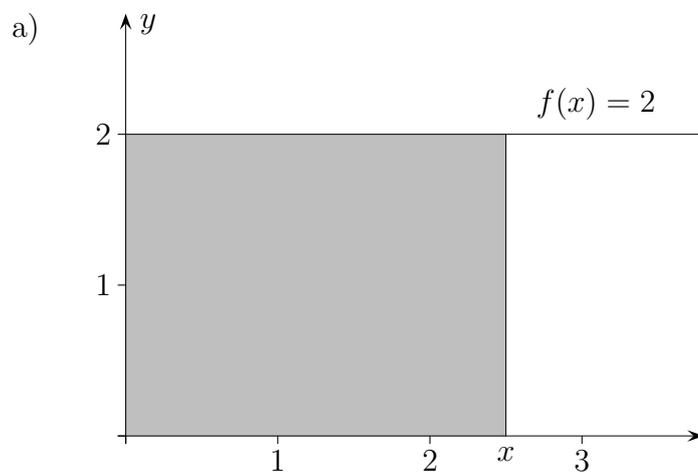


# Integralrechnung

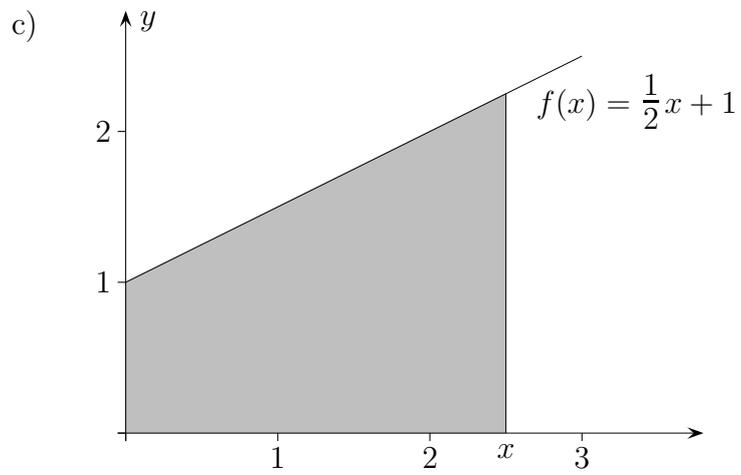
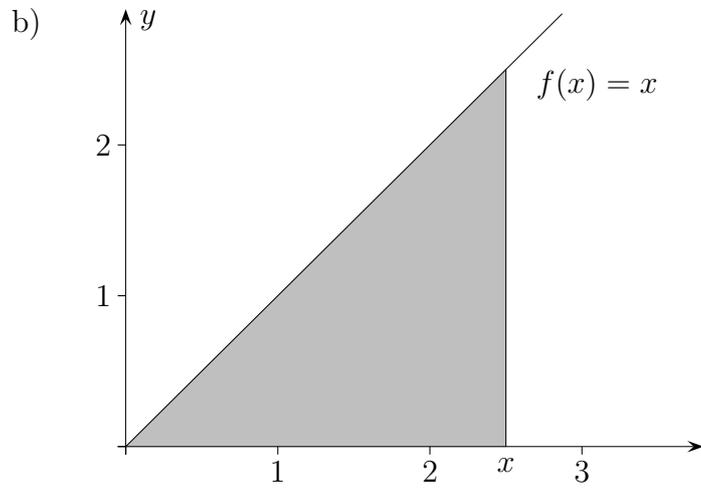
Mit der Integralrechnung können Flächen unterhalb eines Graphen in festgelegten Grenzen, hier 1 und 2, exakt berechnet werden.



Wir betrachten zunächst Flächeninhalte, die elementar berechnet werden können. Sei  $A(x)$  der Flächeninhalt unterhalb des Graphen in den Grenzen von 0 bis  $x$ . Ermittle  $A(1)$ ,  $A(2)$ ,  $A(x)$ . Was fällt dir auf?



# Integralrechnung



# Integralrechnung

$$\begin{array}{l|l} f(x) = 2 & A(x) = 2x \\ f(x) = x & A(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + 1 & A(x) = \frac{1}{4}x^2 + x \end{array}$$

Die Vermutung, dass stets  $A'(x) = f(x)$  gilt, liegt nahe.

Um Flächeninhalte zu bestimmen, müsste man  $f$  aufleiten (integrieren), um  $A(x)$  zu erhalten. Demnach ergäbe sich für den Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion  $f(x) = x^2$  in den Grenzen von 1 bis 2 (siehe Seite 1)  $A = A(2) - A(1) = \frac{7}{3}$  [FE],  $A(x) = \frac{1}{3}x^3$ .

Die Vermutung wird sich als richtig erweisen. An dieser Stelle folgen einige Übungen. Leibniz ersann folgende Schreibweise:

$$A = \int_1^2 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Das Integralzeichen  $\int$  erinnert an eine Summe von Rechtecken,

$dx$  legt die Integrationsvariable fest, möglich wäre:  $\int_1^2 xy dy$

Bestimme algebraisch den Inhalt der Fläche

- unter dem Graphen von  $f(x) = x^3 + 2$  in den Grenzen  $a = 2$ ,  $b = 4$ ,
- die der Graph von  $f(x) = 9 - x^2$  mit der  $x$ -Achse einschließt,
- den die beiden Graphen von  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = 6x + 1$  miteinander einschließen.

Die Ergebnisse sind ganzzahlig und ergeben zusammen 136,

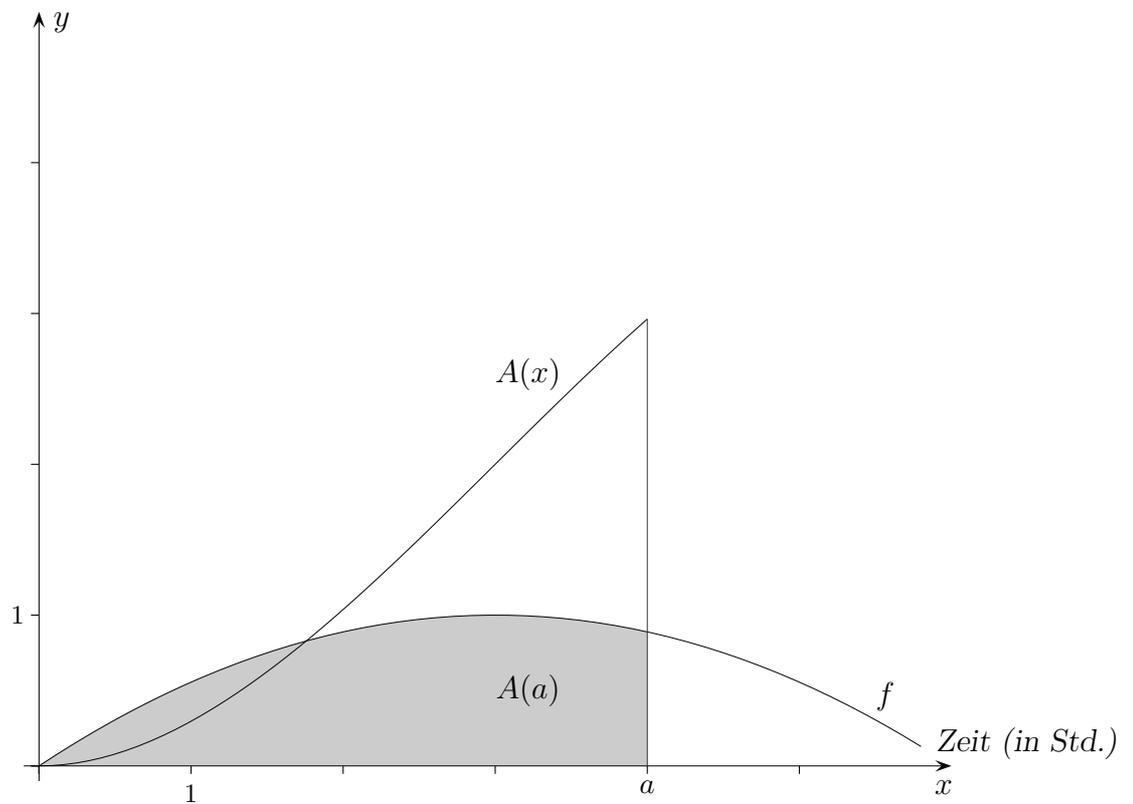
sie können mit `fnInt(f(X), X, a, b)` überprüft werden.

$A(x)$  heißt Integralfunktion. Der Beginn bei Null ist willkürlich, eine andere Wahl führte zu  $A(x)+C$  mit einer additiven Konstante (warum?), die aber ohnehin bei der Differenzbildung  $[A(x) + C]_a^b$  herausfallen würde. Für die Flächenberechnung muss daher nur eine Funktion  $F(x)$  (Stammfunktion) ermittelt werden, für die  $F'(x) = f(x)$  gilt.

$$A = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

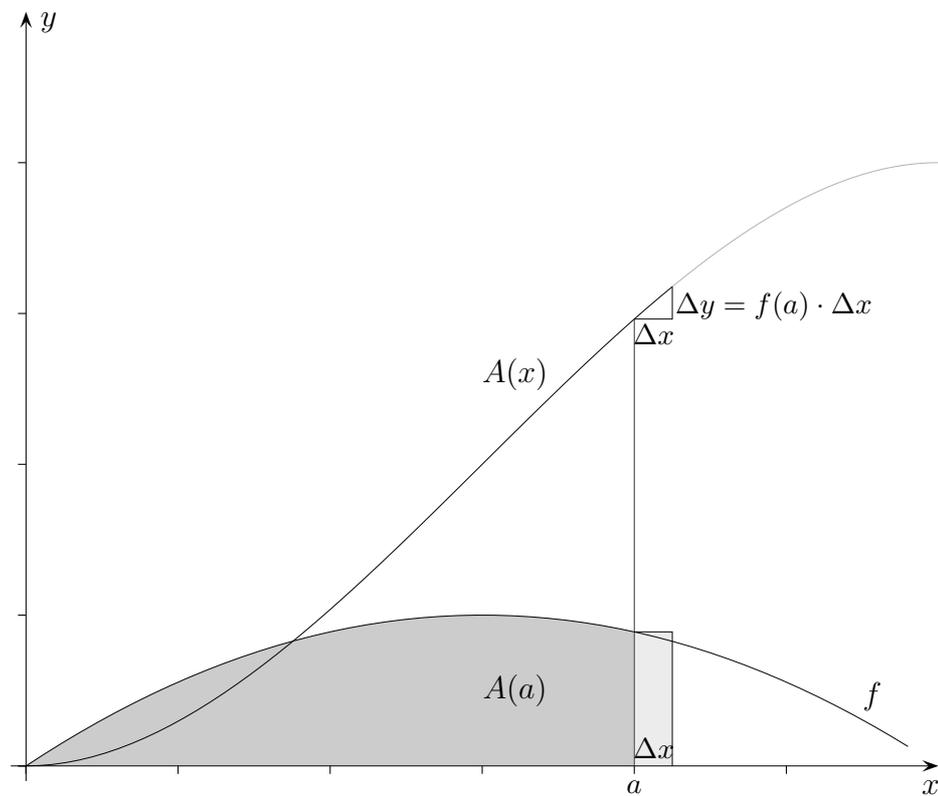
# Zusammenhang entdecken

Aus einem Ventil, das langsam geöffnet und dann wieder geschlossen wird, fließt Wasser. Die Funktion  $f$  erfasst die ausfließende Wassermenge in Liter/Std. (Änderungsrate).  $A(x)$  erfasst die Wassermenge, ist bis zum Zeitpunkt  $x = a$  ausgeflossen ist. Wie verläuft  $A(x)$  weiter?



# Zusammenhang entdecken

Aus einem Ventil, das langsam geöffnet und dann wieder geschlossen wird, fließt Wasser. Die Funktion  $f$  erfasst die ausfließende Wassermenge in Liter/Std. (Änderungsrate).  $A(x)$  erfasst die Wassermenge, ist bis zum Zeitpunkt  $x = a$  ausgeflossen ist. Wie verläuft  $A(x)$  weiter?



$\Delta x$  sei hinreichend klein.

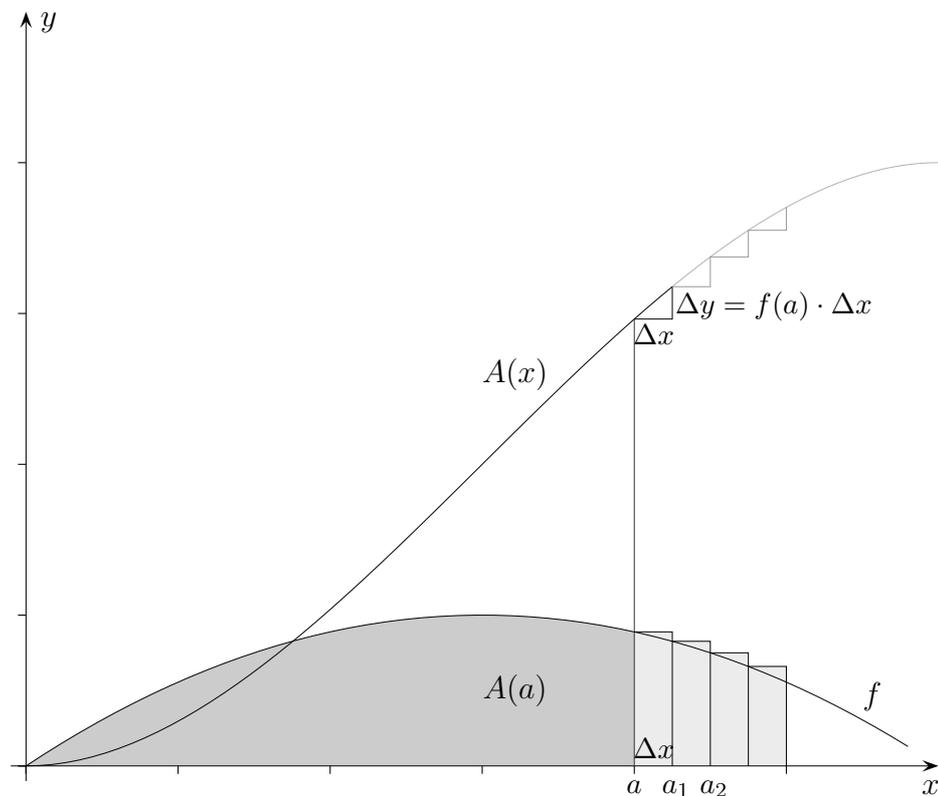
Der Zuwachs von  $A(x)$  an der Stelle  $x = a$  (genauer  $\Delta y = A(a + \Delta x) - A(a)$ ) beträgt  $\approx f(a) \cdot \Delta x$ , dem Inhalt des gezeichneten Rechtecks.

$A(x)$  hat an der Stelle  $x = a$  somit die Steigung  $f(a)$ .

Die Stelle  $a$  ist beliebig, daher gilt  $A'(x) = f(x)$ .

# Zusammenhang entdecken

Aus einem Ventil, das langsam geöffnet und dann wieder geschlossen wird, fließt Wasser. Die Funktion  $f$  erfasst die ausfließende Wassermenge in Liter/Std. (Änderungsrate).  $A(x)$  erfasst die Wassermenge, ist bis zum Zeitpunkt  $x = a$  ausgeflossen ist. Wie verläuft  $A(x)$  weiter?



$\Delta x$  sei hinreichend klein.

Der Zuwachs von  $A(x)$  an der Stelle  $x = a$  (genauer  $\Delta y = A(a + \Delta x) - A(a)$ ) beträgt  $\approx f(a) \cdot \Delta x$ , dem Inhalt des gezeichneten linken Rechtecks.

$A(x)$  hat an der Stelle  $x = a$  somit die Steigung  $f(a)$ .

Die Stelle  $a$  ist beliebig, daher gilt  $A'(x) = f(x)$ .

GTR

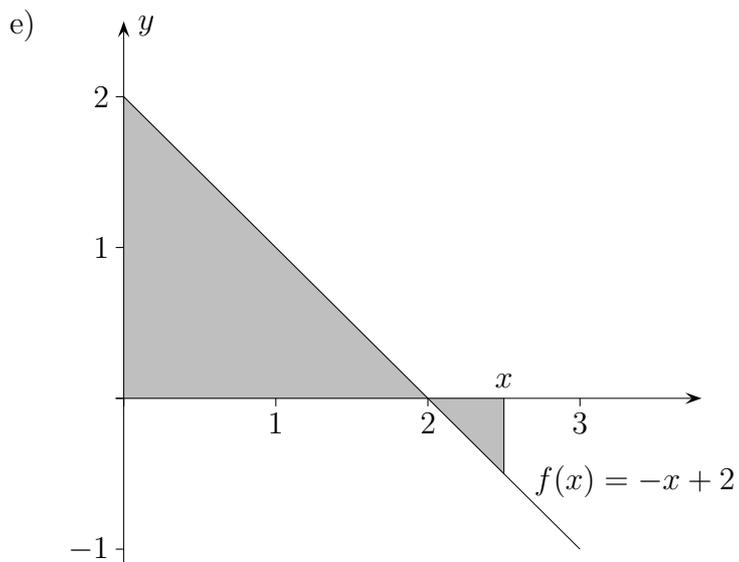
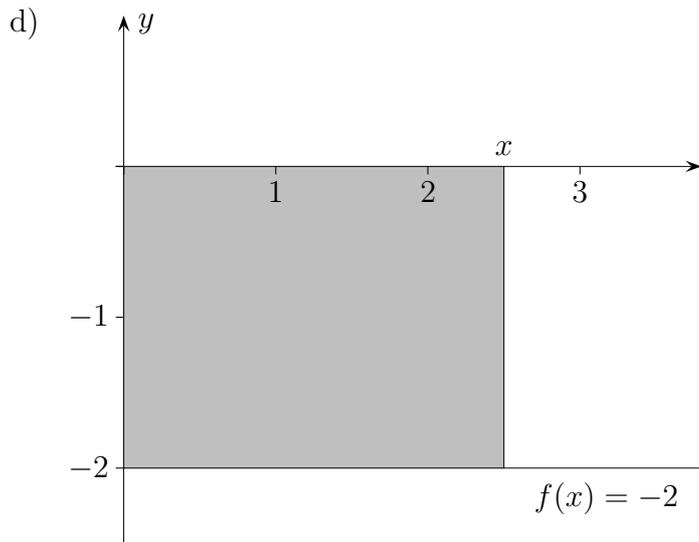
$$\backslash Y_1 = -1/9 * X * (X - 6)$$

$$\backslash Y_2 = \text{fnInt}(Y_1, X, 0, X)$$

$$\text{fnInt}(Y_1, \text{Variable}, \text{linke Grenze}, \text{rechte Grenze})$$

# Integralrechnung

Welche Besonderheiten beinhalten die folgenden Fälle?



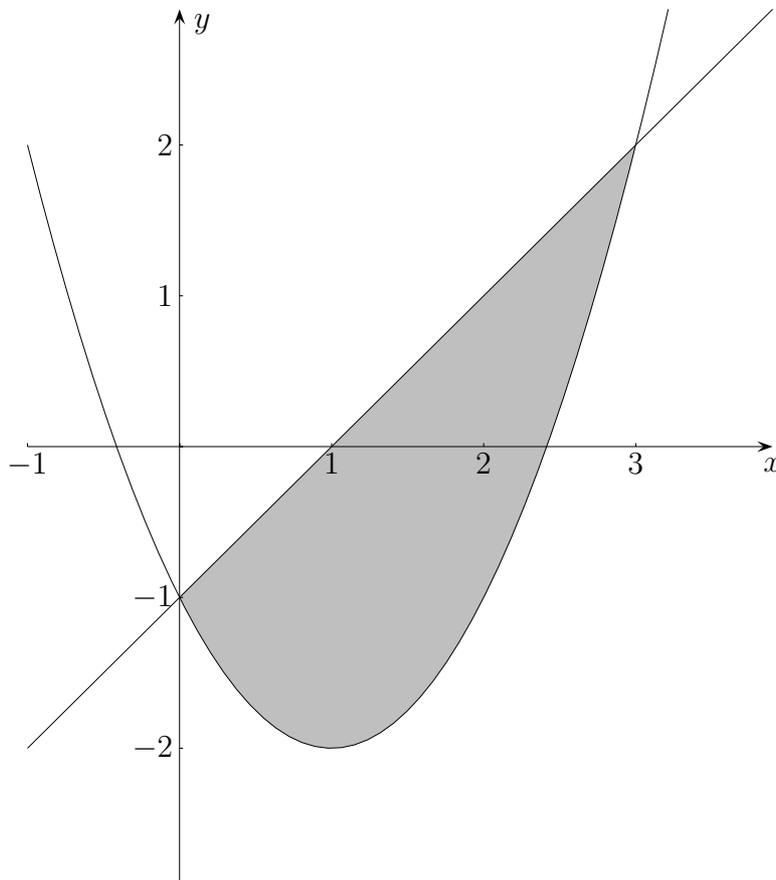
# Integralrechnung

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x - 1$$

$$g(x) = x^2 - 2x - 1$$

Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen eingeschlossen wird.



$$\frac{9}{2} \text{ [FE]}$$

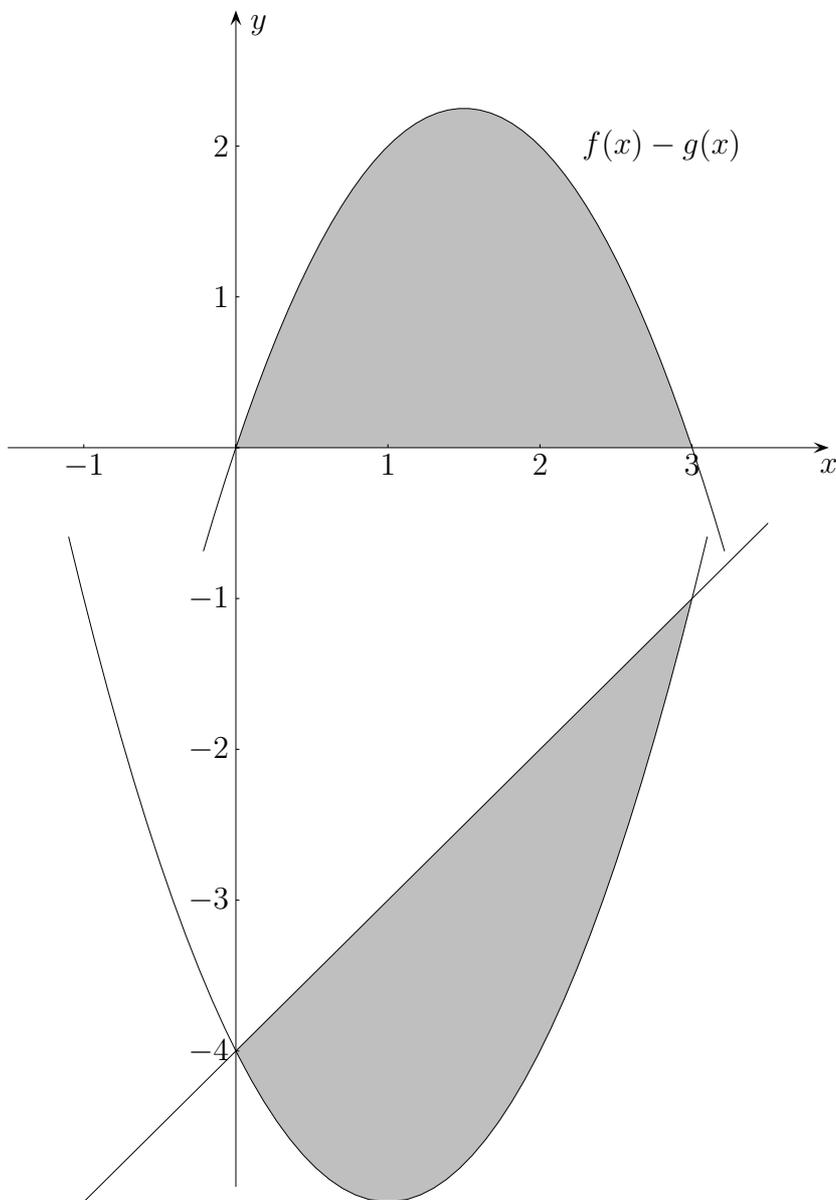
# Integralrechnung

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x - 4$$

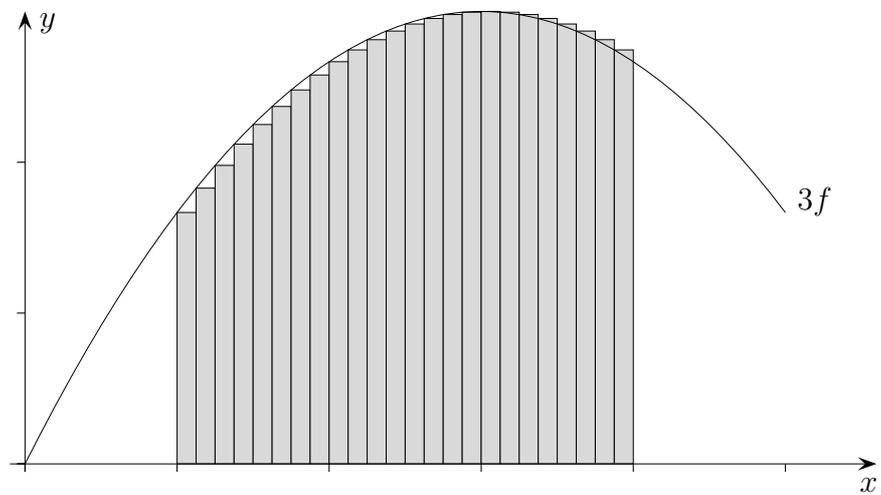
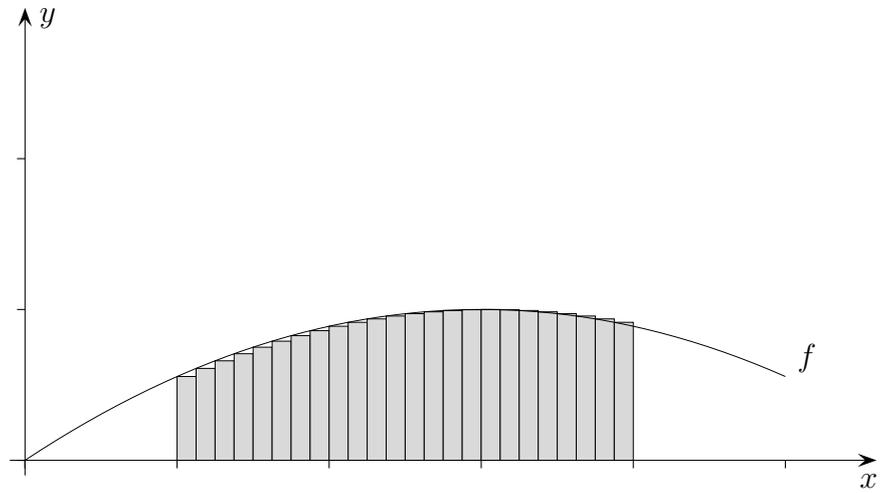
$$g(x) = x^2 - 2x - 4$$

Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen eingeschlossen wird.



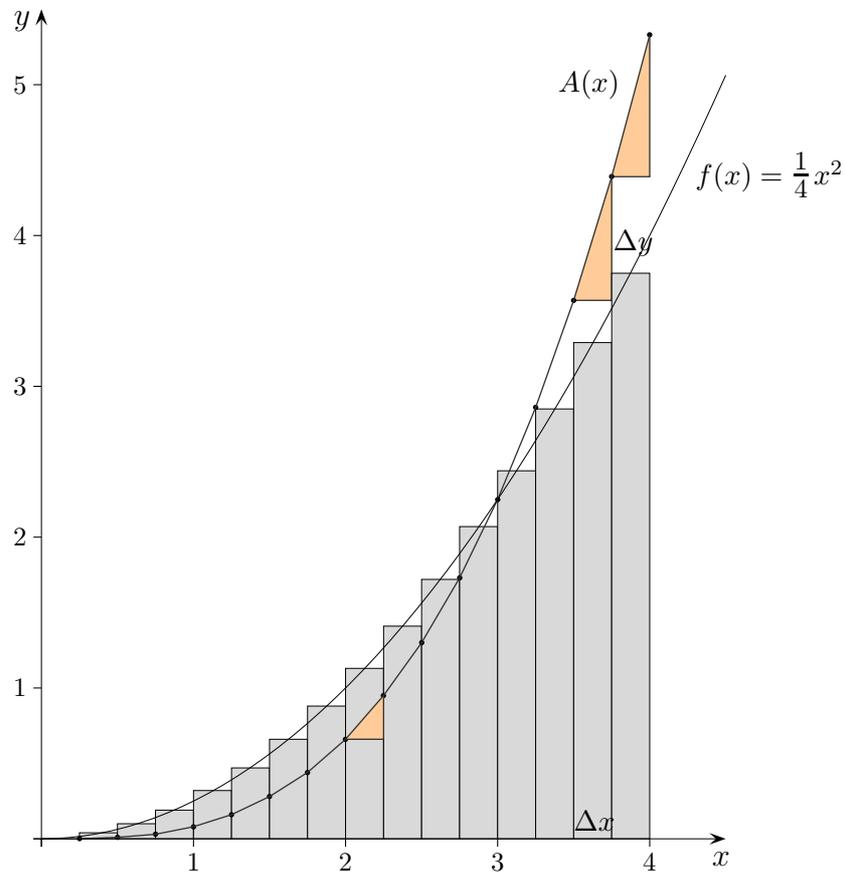
$$\frac{9}{2} [FE]$$

# Faktorregel



Begründe anschaulich die Faktorregel:  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

# Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

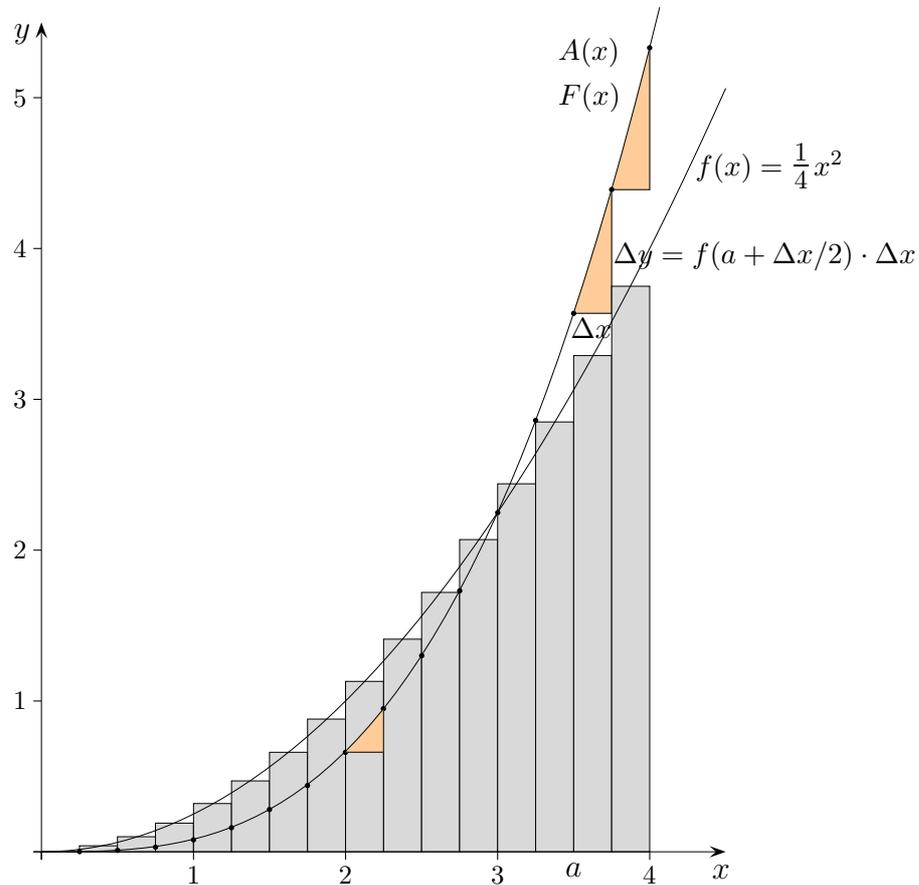


Die Punkte stellen die Summe der Rechtecksinhalte von Null beginnend dar.  
 $A(x)$  ist die Flächenfunktion der Treppenfunktion, die sich durch die Rechtecke ergibt.

Ermittle  $A'(x)$ .

Tipp: Welche Bedeutung hat  $\Delta y$  (FE)?

# Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Das zu einem Steigungsdreieck gehörenden Rechteck hat den Inhalt  $\Delta y$  (FE).

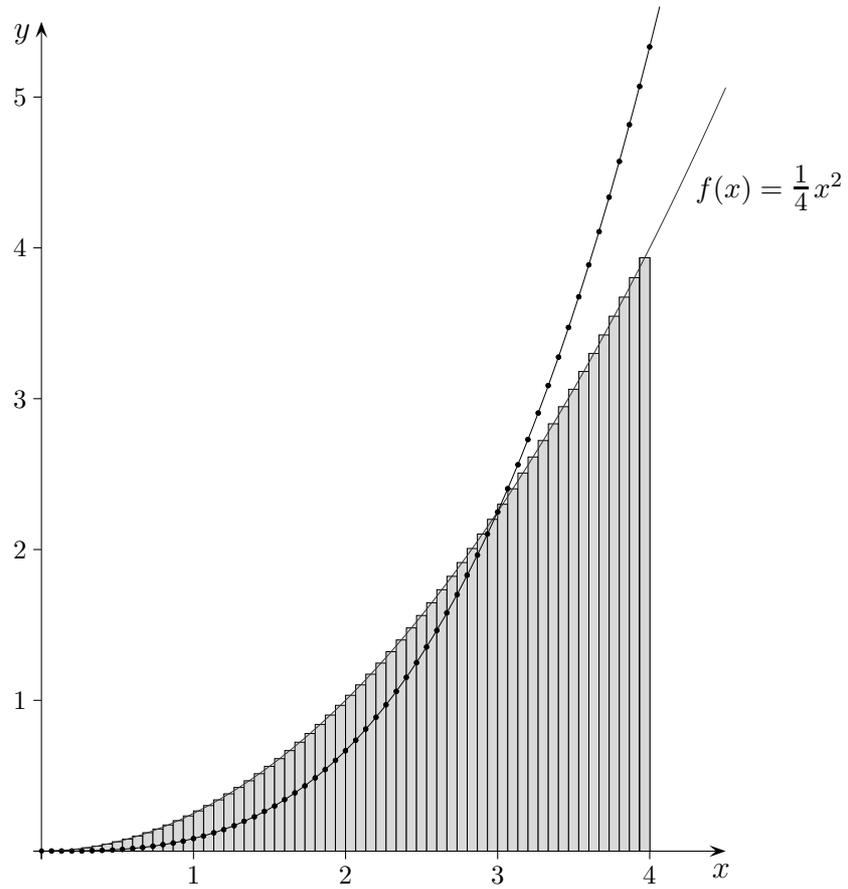
Es ist zu erkennen, dass  $A'(x) \approx f(x)$  ist,

z.B. an der Stelle  $a$ :  $A'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(a + \Delta x/2) \approx f(a)$

$F(x)$  ist die Stammfunktion von  $f(x)$ , die durch den Ursprung verläuft.

Schon bei dieser Rechteckbreite stimmt  $A(x)$  mit  $F(x)$  erstaunlich gut überein.

# Einstieg



Welche Beziehungen bestehen zwischen den Graphen?  
Welche Vermutung liegt dann nahe?

## Anmerkungen zur Didaktik

Zum Einstieg in die Integralrechnung eignen sich die Inhalte der Seiten 1 bis 3.

Zur Begründung des Hauptsatzes siehe nächste Seite, sowie die entsprechende GeoGebra-Datei.

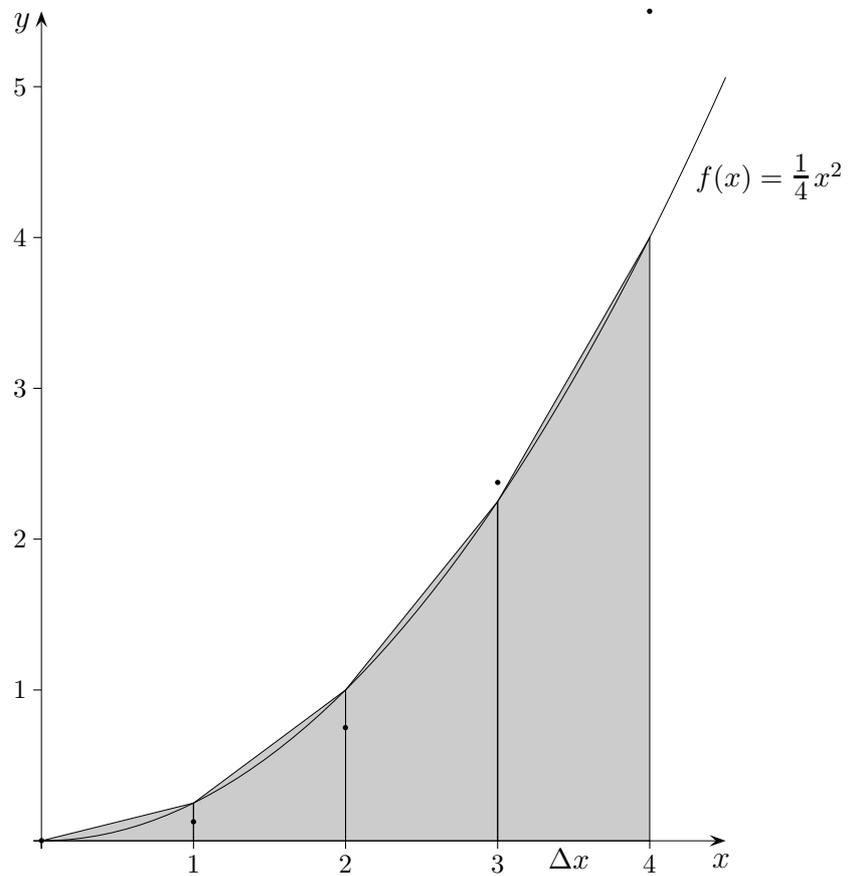
Sehnenvierecke (trapezförmig) sind besonders geeignet, den Graphen von  $f$  zu approximieren.

Dem Schluss von der Änderungsrate auf den Bestand liegen Rechtecksummen zugrunde (die Änderungsrate wird für  $\Delta x$  als konstant angesehen).

Die Thematisierung von Ober- und Untersummen ermöglicht es, Vermutungen aufzustellen; einen Einblick erhält man dadurch nicht.

Die Betrachtung der  $y$ -Zuwächse der Punkte (nächste Seite) und der Steigungen der Verbindungslinien führt zu der Erkenntnis, dass das Differenzieren und das Ermitteln einer Integralfunktion inverse Operationen sind.

# Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

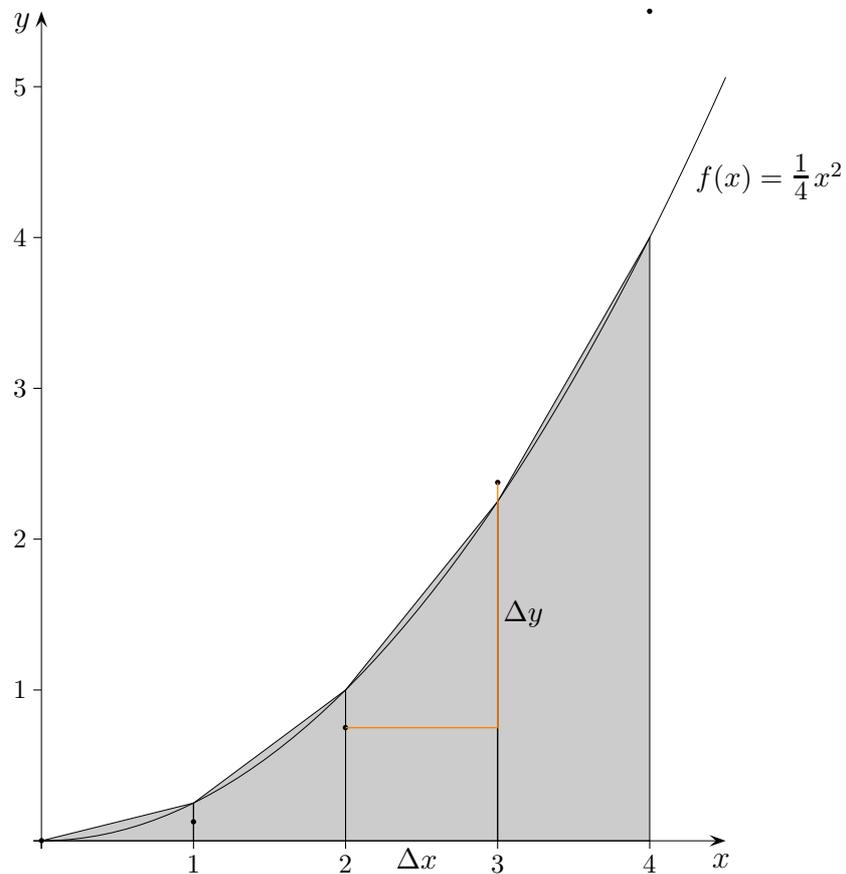


Erläutere den Sinn der Punkte.

Ermittle allgemein die Steigung der Verbindungsstrecke zweier benachbarter Punkte  $(a | f(a))$  und  $(a + \Delta x | f(a + \Delta x))$ .

Welche Vermutung liegt nahe?

# Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Erläutere den Sinn der Punkte.

Ermittle allgemein die Steigung der Verbindungsstrecke zweier benachbarter Punkte  $(a \mid f(a))$  und  $(a + \Delta x \mid f(a + \Delta x))$ .

Welche Vermutung liegt nahe?

Die Differenz  $\Delta y$  der  $y$ -Werte jeweils zweier benachbarter Punkte ist der Inhalt des zugehörigen Sehnenvierecks.

Die  $y$ -Koordinate jeden Punkts  $(x \mid y)$  stellt die Summe der trapezförmigen Sehnenvierecksinhalte von 0 bis  $x$  dar.

$$dy = \frac{1}{2}[f(a) + f(a + dx)]dx \quad \text{Das doppelte Trapez ergibt ein Rechteck.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}[f(a) + f(a + dx)] \approx f(a)$$

# Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

