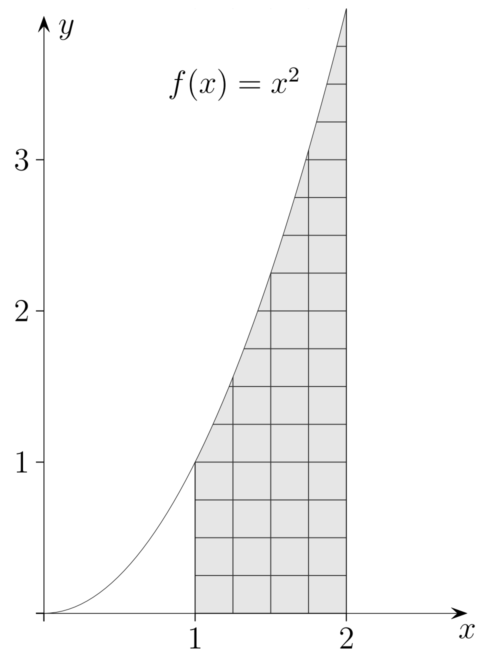
Integralrechnung

1. Flächeninhalte, elementar berechnet
2. Integralrechnung
3. Zusammenhang entdecken
4. Fläche unter der x-Achse
5. Fläche zwischen Graphen
6. Fläche zwischen Graphen Fortsetzung
7. Faktorregel
8. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
9. Einstieg
10. Anmerkungen zur Didaktik
11. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Sehnenvierecke
12. Leibniz calculus integralis
13. Fermat

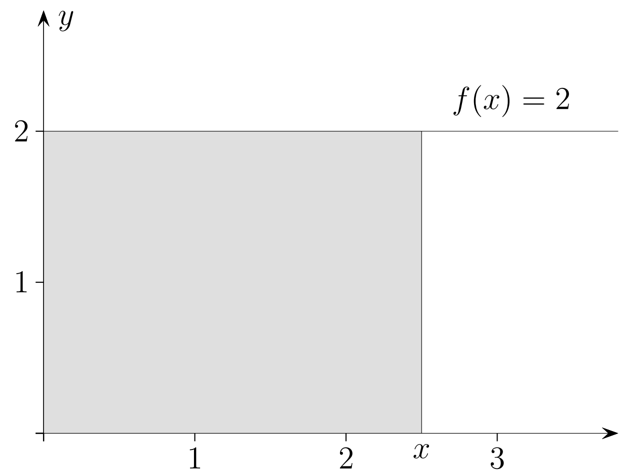
↑ Integralrechnung

Mit der Integralrechnung können Flächen unterhalb eines Graphen in festgelegten Grenzen, hier 1 und 2, exakt berechnet werden.

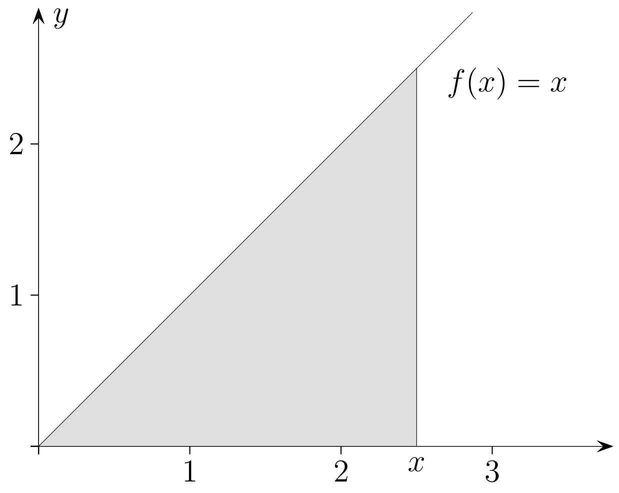


Wir betrachten zunächst Flächeninhalte, die elementar berechnet werden können.
Sei $A(x)$ der Flächeninhalt unterhalb des Graphen in den Grenzen von 0 bis x.
Ermittle $A(1)$, $A(2)$, $A(x)$. Was fällt dir auf?

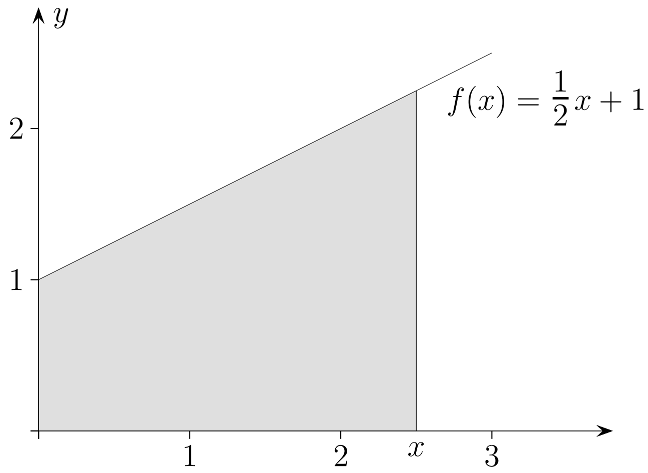
a)



b)



c)



Von der Änderung zum Bestand

Bei Anwendungen ist häufig die Änderungsratenfunktion gegeben, denke an Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit oder an einen zeitlich variierenden Zu- und Abfluss (negativer Zufluss) eines Wasserbeckens und es ist die Bestandsfunktion gesucht, also die Funktion, die den zurückgelegten Weg oder das Wasservolumen im Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Die Änderungsrate - hier betrachten wir die momentane bzw. lokale - ist an der Einheit, z. B. km pro h, ℓ pro min, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ usw., zu erkennen.

Die Formulierung der Aufgabenstellung: *Rekonstruieren Sie den Bestand und zeichnen Sie die Bestandsfunktion* erinnert daran, dass in der Differenzialrechnung zu gegebener Bestandsfunktion die Änderungsratenfunktion durch Ableiten ermittelt wurde.

Zu beachten ist, dass der Bestand zur Zeit $t = 0$ nicht null sein muss.

↑ Integralrechnung

$f(x) = 2$	$A(x) = 2x$
$f(x) = x$	$A(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$	$A(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

Die Vermutung, dass stets $A'(x) = f(x)$ gilt, liegt nahe.
Um Flächeninhalte zu bestimmen, müsste man f aufleiten (integrieren), um $A(x)$ zu erhalten.
Demnach ergäbe sich für den Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ in den Grenzen von 1 bis 2 (siehe Seite 1) $A = A(2) - A(1) = \frac{7}{3}$ [FE], $A(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Die Vermutung wird sich als richtig erweisen. An dieser Stelle folgen einige Übungen.
Leibniz ersann folgende Schreibweise:

$$A = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Das Integralzeichen $\int$ erinnert an eine Summe von Rechtecken,

dx legt die Integrationsvariable fest, möglich wäre: $\displaystyle\int_1^2 xy\,dy$

Bestimme algebraisch den Inhalt der Fläche

a) unter dem Graphen von $f(x) = x^3 + 2$ in den Grenzen $a = 2$, $b = 4$,

b) die der Graph von $f(x) = 9 - x^2$ mit der x-Achse einschließt,

c) den die beiden Graphen von $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 6x + 1$ miteinander einschließen.

Die Ergebnisse sind ganzzahlig und ergeben zusammen 136,

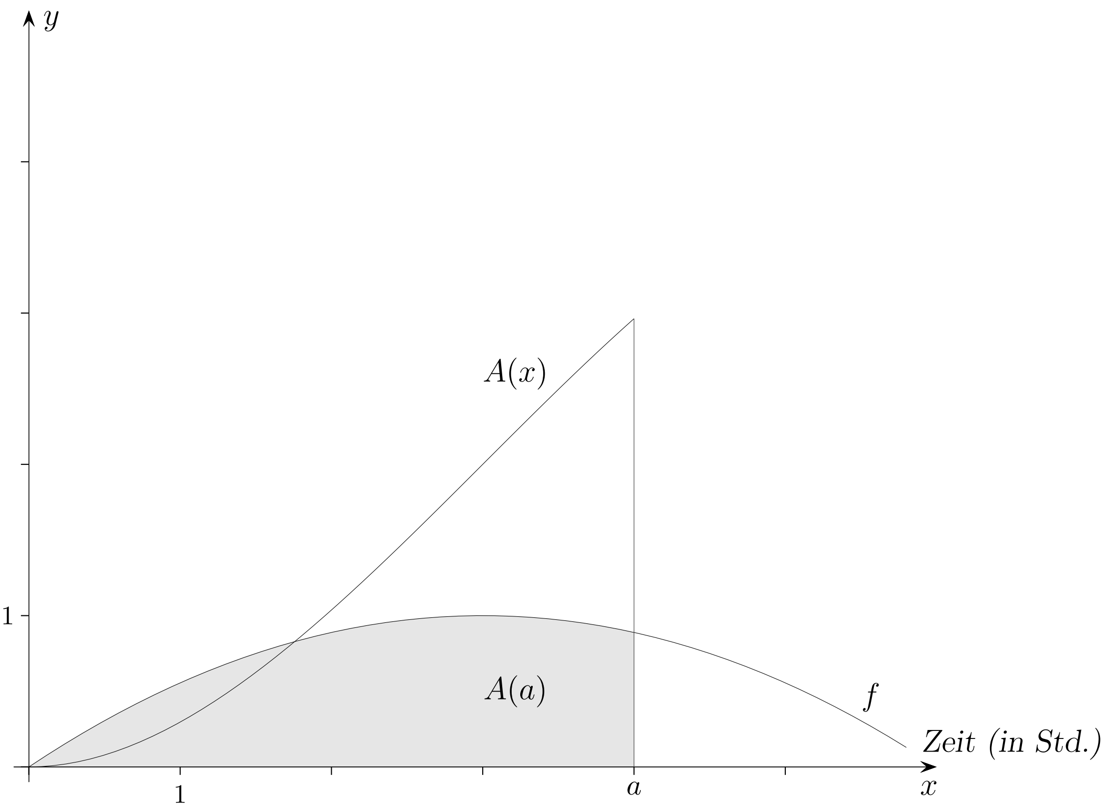
sie können mit fnInt(f(X), X, a, b) überprüft werden.

$A(x)$ heißt Integralfunktion. Der Beginn bei Null ist willkürlich, eine andere Wahl führte zu $A(x)+C$ mit einer additiven Konstante (warum?), die aber ohnehin bei der Differenzbildung $\big[A(x) + C\big]_a^b$ herausfallen würde. Für die Flächenberechnung muss daher nur eine Funktion $F(x)$ (Stammfunktion) ermittelt werden, für die $F'(x) = f(x)$ gilt.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

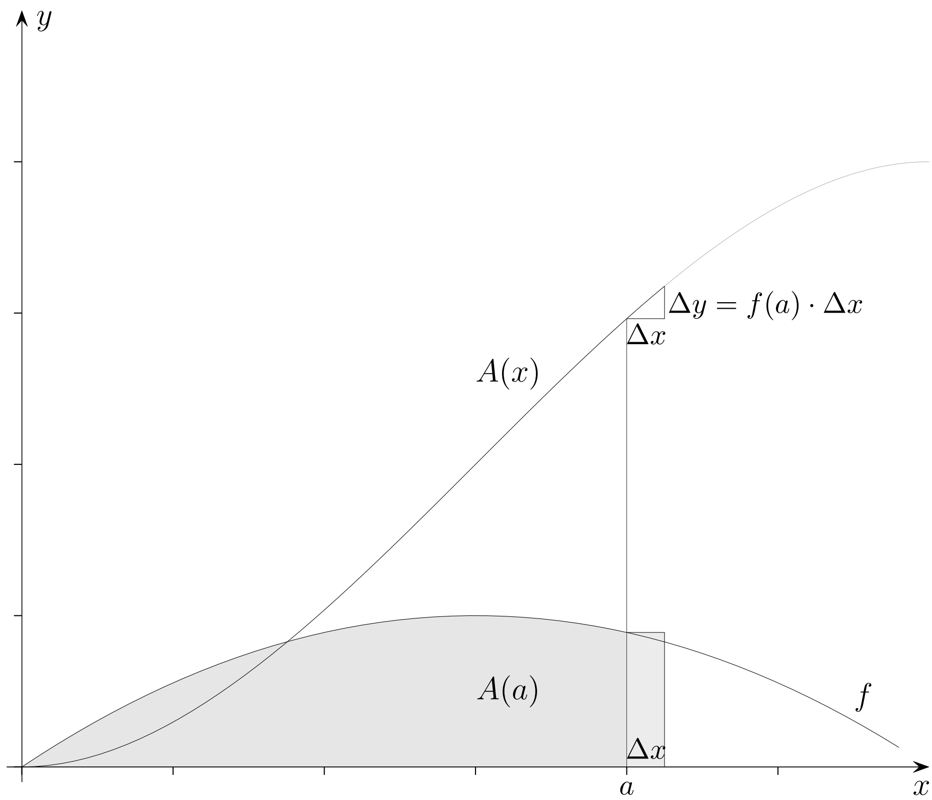
↑ Zusammenhang entdecken

Aus einem Ventil, das langsam geöffnet und dann wieder geschlossen wird, fließt Wasser.
Die Funktion f erfasst die ausfließende Wassermenge in Liter/Std. (Änderungsrate).
$A(x)$ erfasst die Wassermenge, ist bis zum Zeitpunkt $x = a$ ausgeflossen ist.
Wie verläuft $A(x)$ weiter?



↑ Zusammenhang entdecken

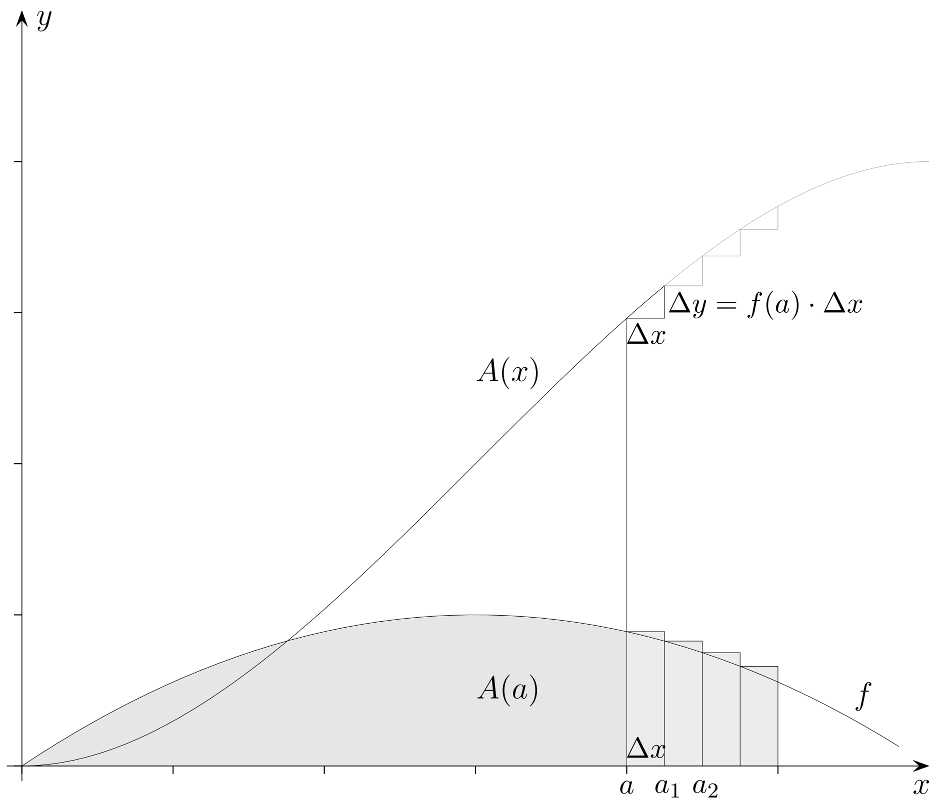
Aus einem Ventil, das langsam geöffnet und dann wieder geschlossen wird, fließt Wasser.
Die Funktion f erfasst die ausfließende Wassermenge in Liter/Std. (Änderungsrate).
$A(x)$ erfasst die Wassermenge, ist bis zum Zeitpunkt $x = a$ ausgeflossen ist.
Wie verläuft $A(x)$ weiter?



Δx sei hinreichend klein.
Der Zuwachs von $A(x)$ an der Stelle $x = a$ (genauer $\Delta y = A(a + \Delta x) - A(a)$)
beträgt $\approx f(a) \cdot \Delta x$, dem Inhalt des gezeichneten Rechtecks.
$A(x)$ hat an der Stelle $x = a$ somit die Steigung $f(a)$.
Die Stelle a ist beliebig, daher gilt $A'(x) = f(x)$.

↑ Zusammenhang entdecken

Aus einem Ventil, das langsam geöffnet und dann wieder geschlossen wird, fließt Wasser.
Die Funktion f erfasst die ausfließende Wassermenge in Liter/Std. (Änderungsrate).
$A(x)$ erfasst die Wassermenge, ist bis zum Zeitpunkt $x = a$ ausgeflossen ist.
Wie verläuft $A(x)$ weiter?

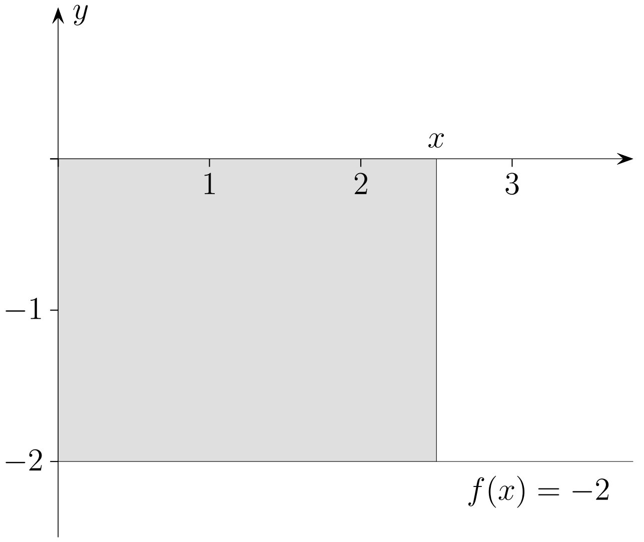


Δx sei hinreichend klein.
Der Zuwachs von $A(x)$ an der Stelle $x = a$ (genauer $\Delta y = A(a + \Delta x) - A(a)$)
beträgt $\approx f(a) \cdot \Delta x$, dem Inhalt des gezeichneten linken Rechtecks.
$A(x)$ hat an der Stelle $x = a$ somit die Steigung $f(a)$.
Die Stelle a ist beliebig, daher gilt $A'(x) = f(x)$.

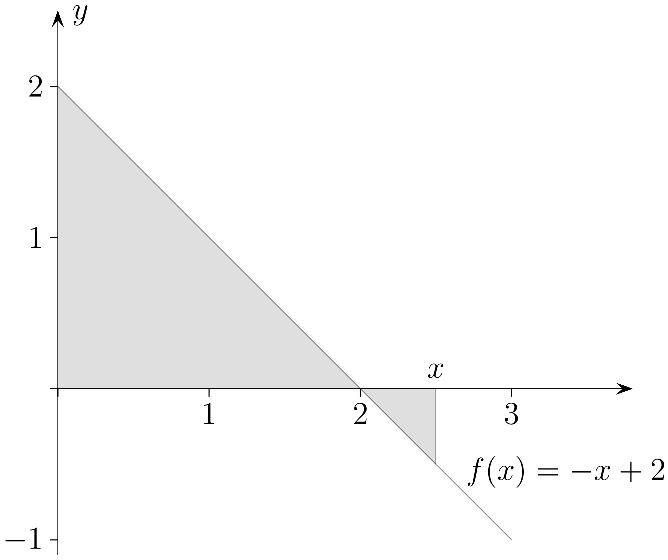
GTR
$\backslash Y_1 = \text{-}1/9*X*(X-6)$
$\backslash Y_2 = \text{fnInt}(Y_1, X, 0, X)$ $\qquad$ $\text{fnInt}(Y_1, \text{Variable}, \text{linke Grenze}, \text{rechte Grenze})$

Welche Besonderheiten beinhalten die folgenden Fälle?

d)



e)



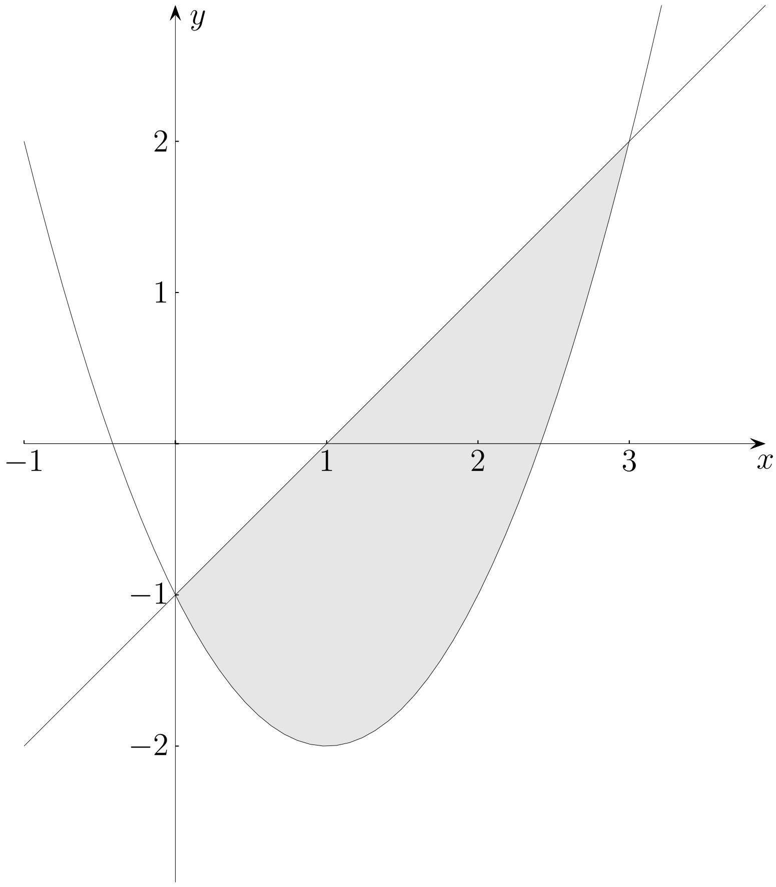
↑ Fläche zwischen Graphen

Gegeben sind die Funktionen

$f(x) = x - 1$

$g(x) = x^2 - 2x - 1$

Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen eingeschlossen wird.



$\frac{9}{2}$ $[FE]$

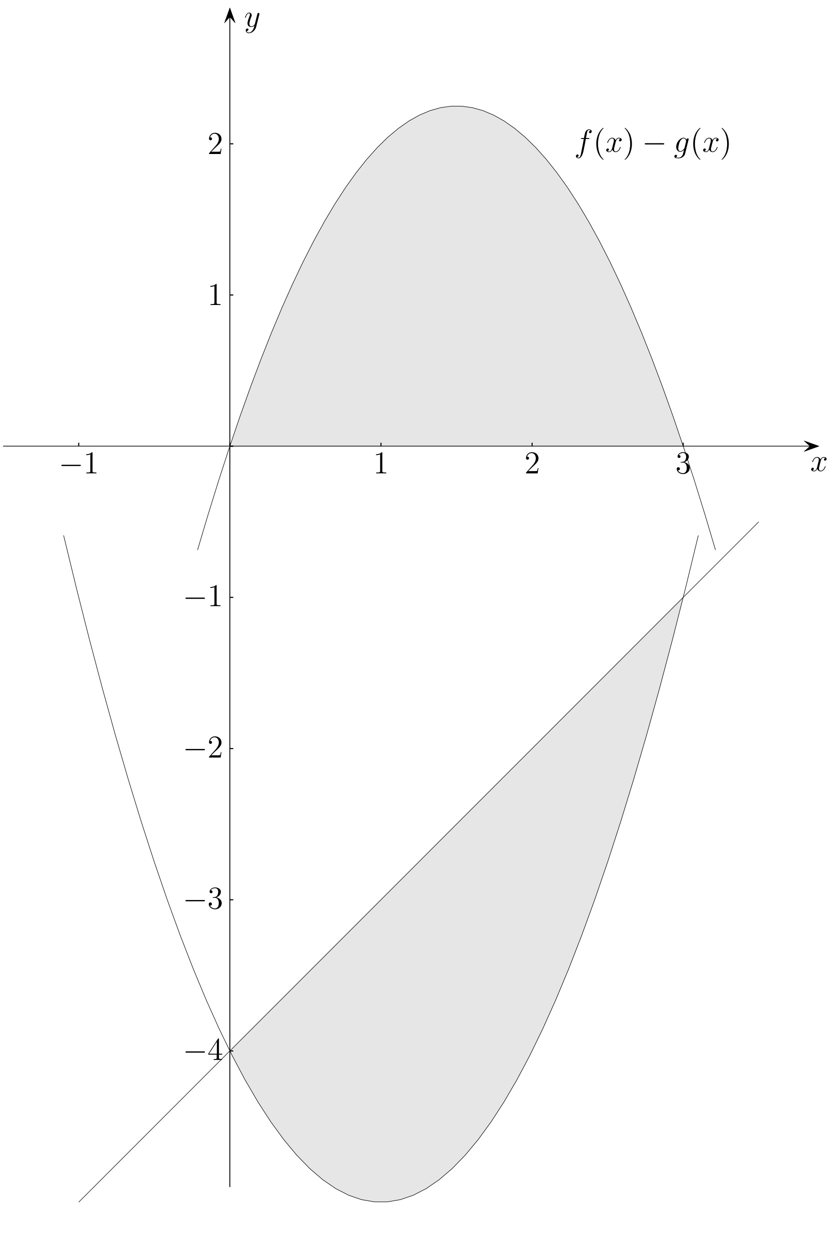
↑ Fläche zwischen Graphen Fortsetzung

Gegeben sind die Funktionen

$f(x) = x - 4$

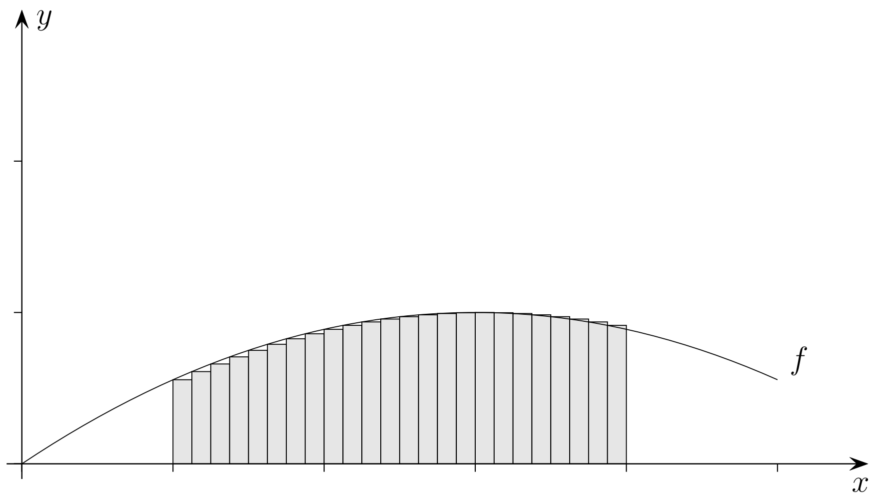
$g(x) = x^2 - 2x - 4$

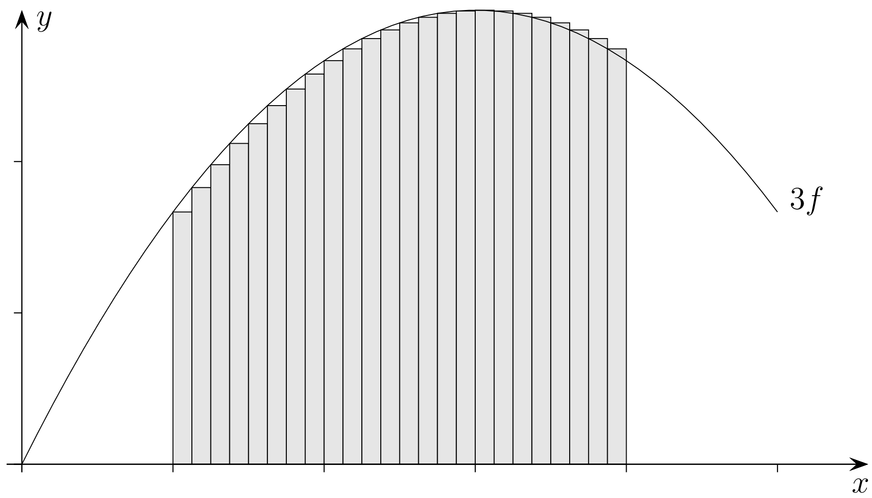
Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen eingeschlossen wird.



$\frac{9}{2}$ [FE]

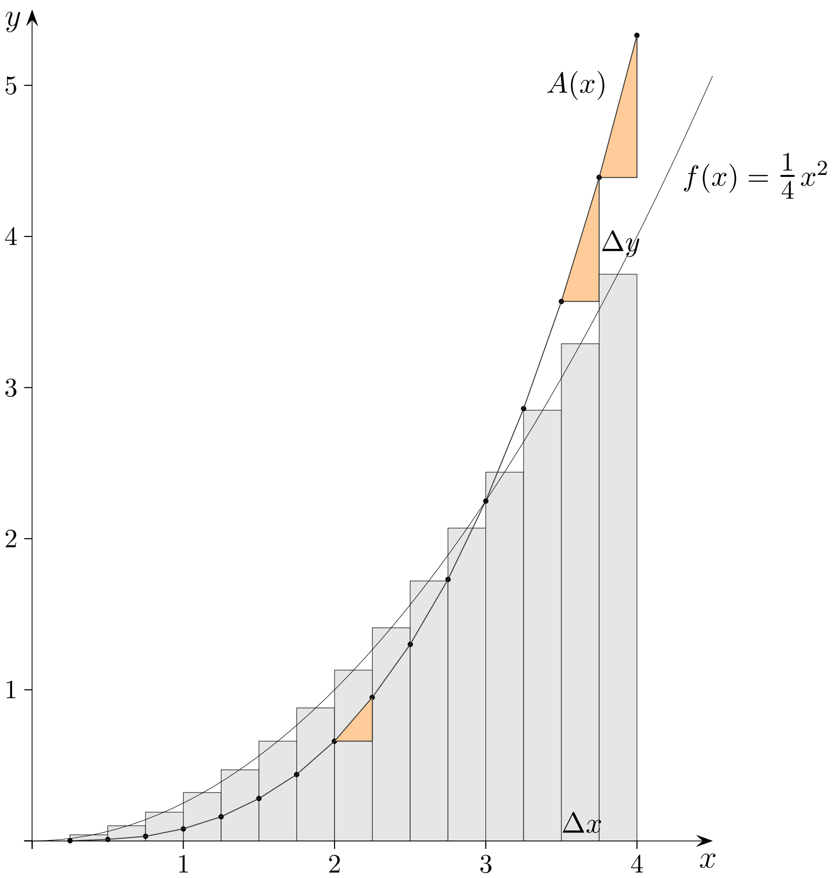
↑ Faktorregel





Begründe anschaulich die Faktorregel: $\int\limits_a^b k f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$

↑ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

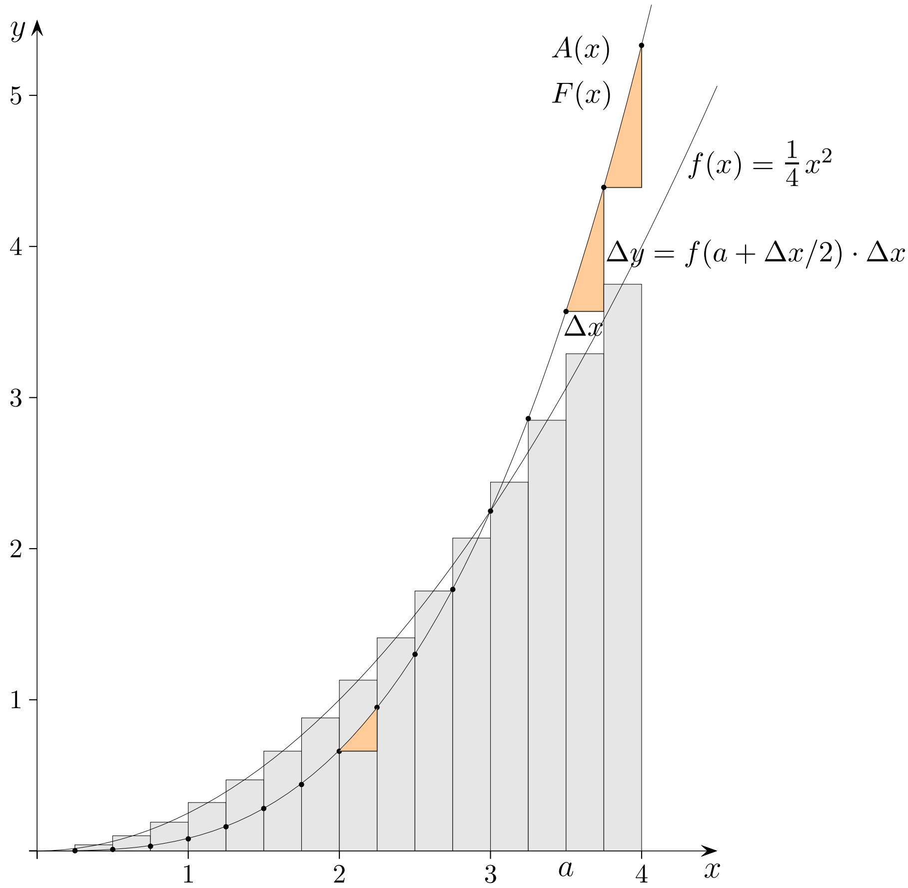


Die Punkte stellen die Summe der Rechtecksinhalte von Null beginnend dar.
$A(x)$ ist die Flächenfunktion der Treppenfunktion, die sich durch die Rechtecke ergibt.

Ermittle $A'(x)$.

Tipp: Welche Bedeutung hat Δy (FE)?

↑ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

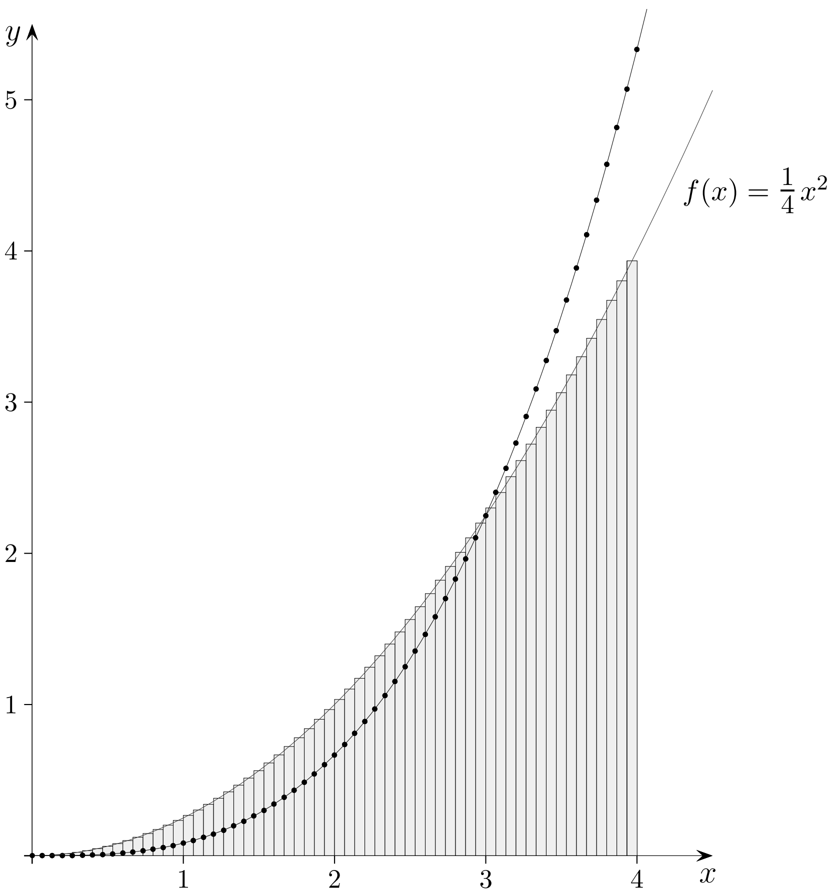


Das zu einem Steigungsdreieck gehörenden Rechteck hat den Inhalt Δy (*FE*).
Es ist zu erkennen, dass $A'(x) \approx f(x)$ ist,

z. B. an der Stelle a: $A'(a) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f(a + \Delta x/2) \approx f(a)$

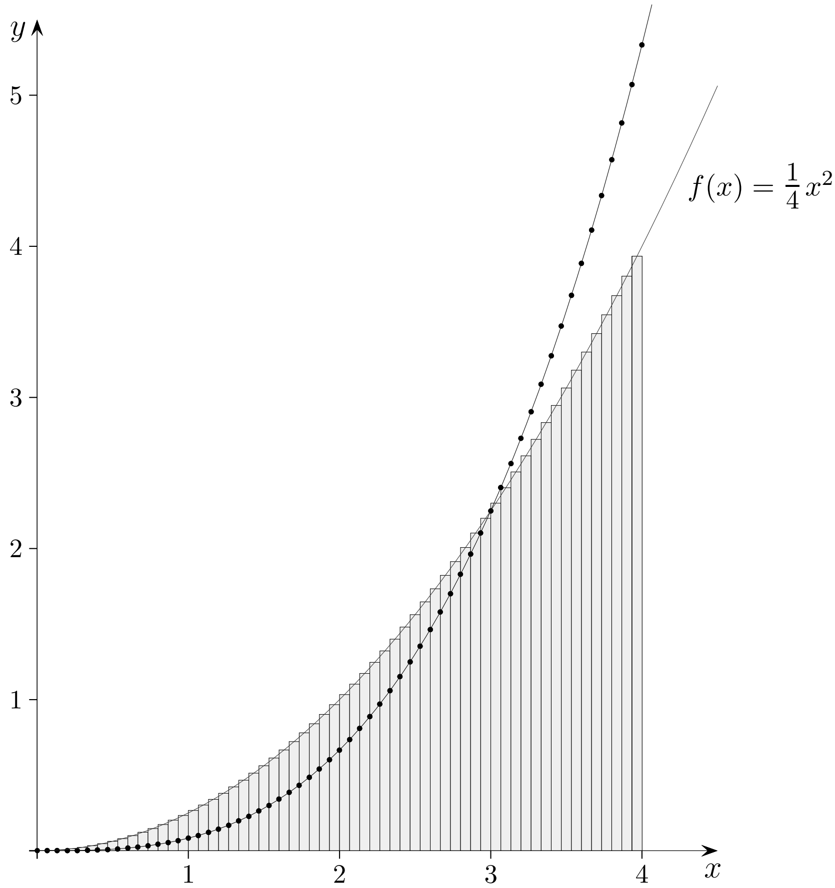
$F(x)$ ist die Stammfunktion von $f(x)$, die durch den Ursprung verläuft.
Schon bei dieser Rechteckbreite stimmt $A(x)$ mit $F(x)$ erstaunlich gut überein.

↑ Einstieg



Welche Beziehungen bestehen zwischen den Graphen?
Welche Vermutung liegt dann nahe?

↑ Einstieg



Welche Beziehungen bestehen zwischen den Graphen?
Welche Vermutung liegt dann nahe?

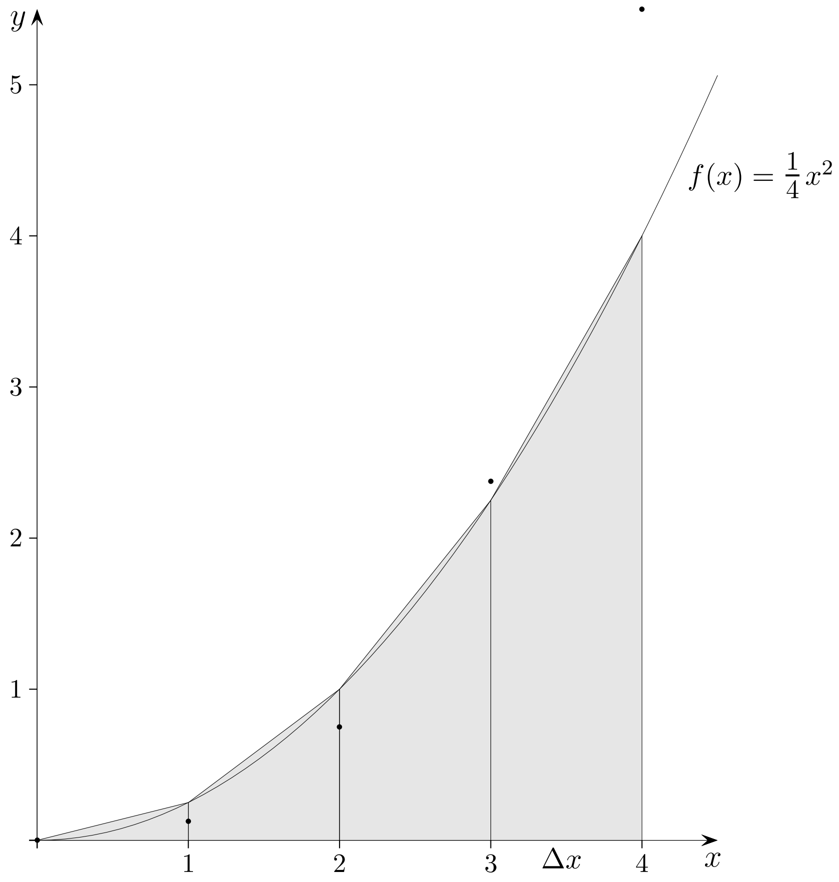
Wir summieren gedanklich die Flächeninhalte der Rechtecke, beginnen bei null und stellen die Summe als Graph dar. Die Breite der Rechtecke sei dx, ihr Inhalt beträgt jeweils $f(x)\,dx$. Der Höhenzuwachs der Punkte der sogenannten Inhaltsfunktion zum drauffolgenden Punkt beträgt daher jeweils $f(x)\,dx$.
Die Steigung zweier benachbarter Punkte der Inhaltsfunktion berechnet sich zu $f(x)\,dx/dx = f(x)$. Die Ableitung ist wieder die Funktion f, von der wir ausgegangen sind. Wir vermuten, dass die Inhaltsfunktion auch durch (einfaches) Aufleiten ermittelt werden kann: $F(x) = \frac{1}{12}x^3$

↑ Anmerkungen zur Didaktik

Zum Einstieg in die Integralrechnung eignen sich die Inhalte der Seiten 1 bis 3.
Zur Begründung des Hauptsatzes siehe unter anderem die nächste Seite, sowie eine entsprechende GeoGebra-Datei (mehrere Versionen). Sehnenvierecke (trapezförmig) scheinen besonders geeignet, den Graphen von f zu approximieren. Dem Schluss von der Änderungsrate auf den Bestand liegen Rechtecksummen zugrunde (die Änderungsrate wird für Δx als konstant angesehen). Die dynamische Betrachtung mit der Integralfunktion $A(x)$ geht auf Newton zurück.
Leibniz betrachtete die Integration als Summation von infinitesimalen Rechteckflächen ydx (lat. infinitus beliebig/unbegrenzt klein):
„Ich berechne die Fläche als Summe aller Rechtecke, die durch das Produkt aus jedem y und seinem entsprechenden dx gebildet werden.“ *Analysis Tetragonistica 1675*

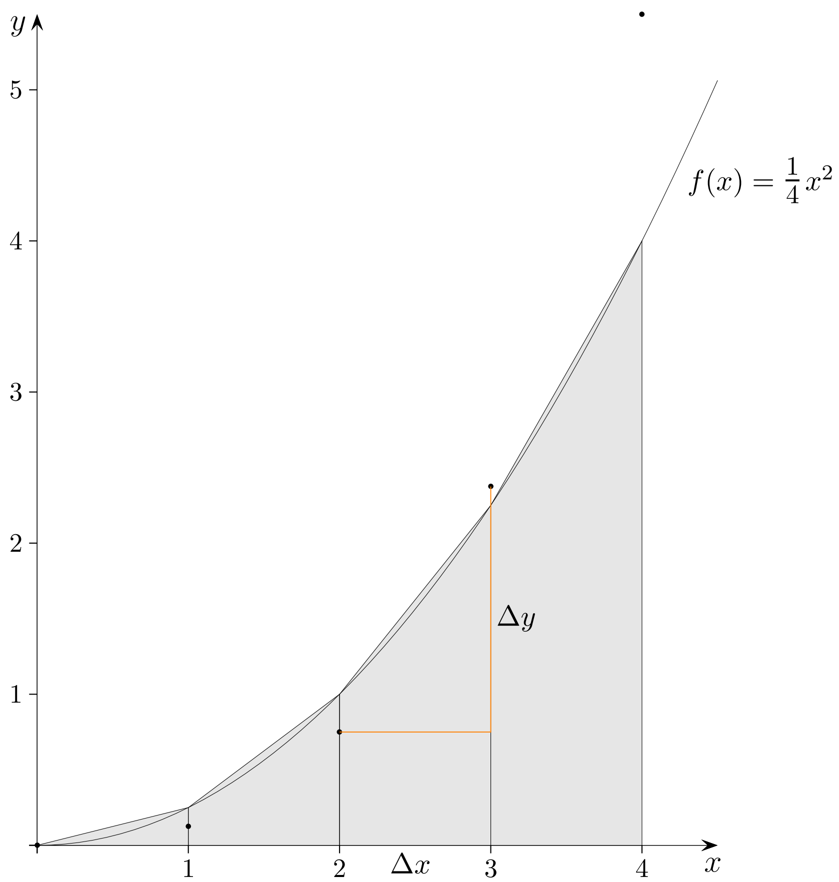
Jakob Bernoulli verwendete 1690 erstmals den Begriff Integral. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Bernoulli-Kette nach ihm benannt. Nebenbei: Sieben weitere Familienmitglieder waren auch Professoren der Mathematik, der Physik oder anderer naturwissenschaftlicher Zweige. Die Thematisierung von Ober- und Untersummen (Streifenmethode nach Archimedes) ermöglicht es, Vermutungen aufzustellen, einen tieferen Einblick erhält man dadurch nicht.
Die Betrachtung der y-Zuwächse der Punkte (nächste Seite) und der Steigungen der Verbindungslinien führt zu der Erkenntnis, dass das Differenzieren und das Ermitteln einer Integralfunktion inverse Operationen sind.

↑ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Erläutere den Sinn der Punkte.
Ermittle allgemein die Steigung der Verbindungsstrecke zweier benachbarter Punkte $\big(a \mid f(a)\big)$ und $\big(a + \Delta x \mid f(a + \Delta x)\big)$.
Welche Vermutung liegt nahe?

$\uparrow$ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Erläutere den Sinn der Punkte.
Ermittle allgemein die Steigung der Verbindungsstrecke zweier benachbarter Punkte $\big(a \mid f(a)\big)$ und $\big(a + \Delta x \mid f(a + \Delta x)\big)$.
Welche Vermutung liegt nahe?

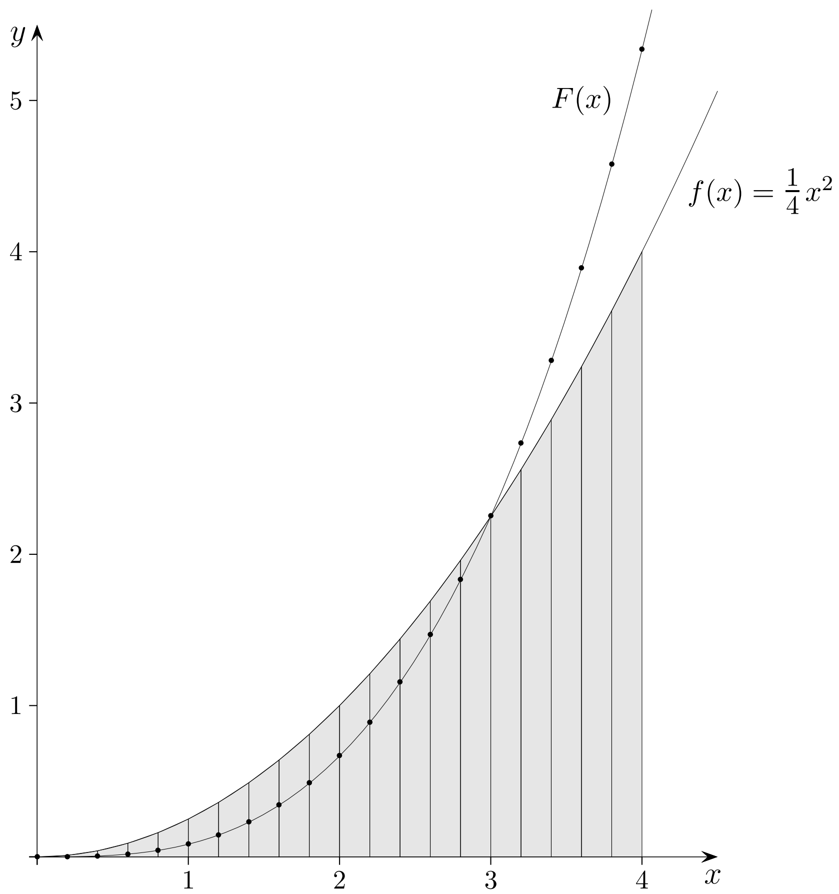
Die Differenz Δy der y-Werte jeweils zweier benachbarter Punkte ist der Inhalt des zugehörigen Sehnenvierecks.
Die y-Koordinate jeden Punkts $\big(x \mid y\big)$ stellt die Summe der trapezförmigen Sehnenvierecksinhalte von 0 bis x dar.

$$dy = \frac{1}{2}[f(a) + f(a + dx)]\,dx$$

Das doppelte Trapez ergibt ein Rechteck.

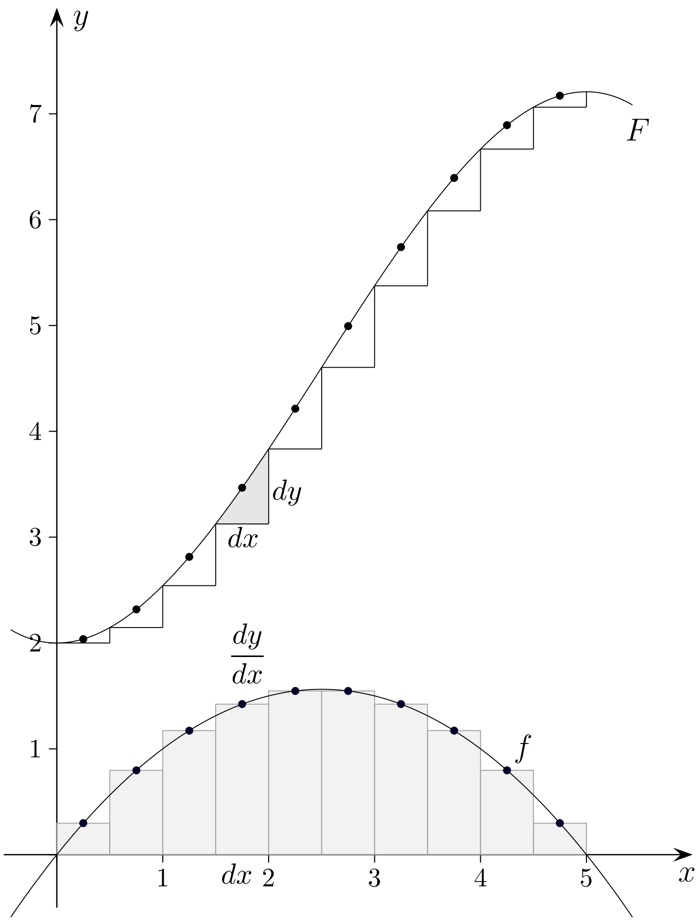
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}[f(a) + f(a + dx)] \approx f(a)$$

↑ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



↑ Leibniz calculus integralis 1675

Mit der Leibnizschen Schreibweise erscheinen die Zusammenhänge fast selbsterklärend, Differentiale dx, dy, Ableitung $\frac{dy}{dx}$, gelesen: dy nach dx, d von lat. differentia.
Die „unvergleichbar kleinen“ Größen dx, dy (Leibniz) werden so klein gewählt, dass der Fehler vernachlässigt werden kann.



Erläutere:

$$f = \frac{dF}{dx}$$

$$f\,dx = dF$$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 dF = F(5) - F(0)$$

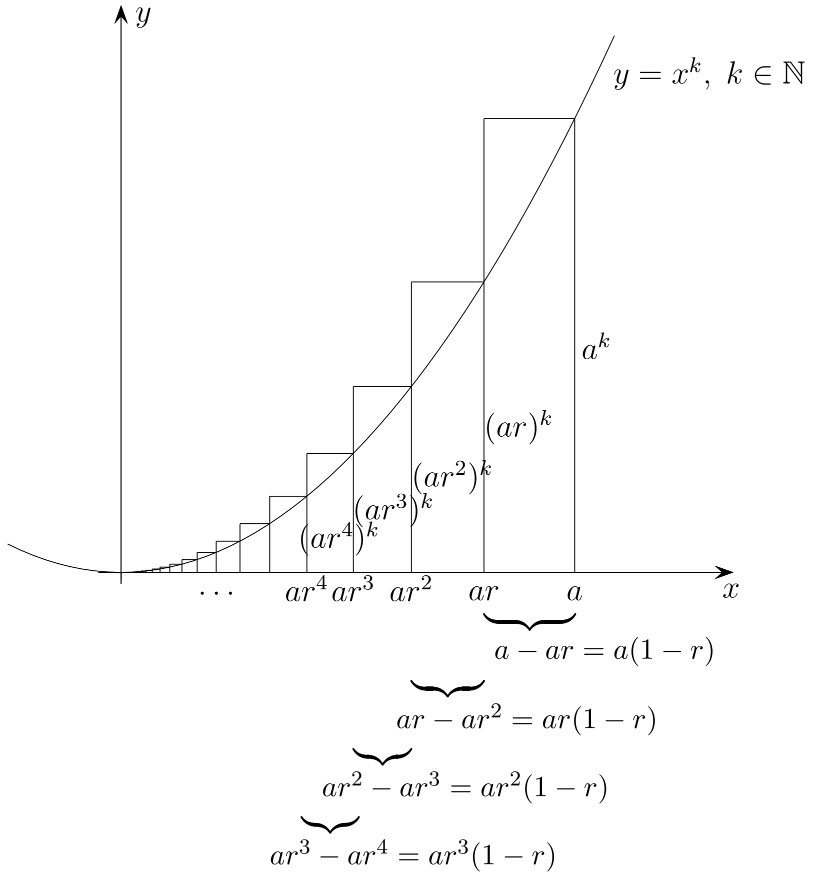
Summation $\int$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

d (für Ableitung) und $\int$ sind invers zueinander.

↑ Fermat

Neben einer äquidistanten Zerlegung des Intervalls $[0, a]$ untersuchte Fermat 1608-1665 auch die Zerlegung des Intervalls mithilfe einer geometrischen Folge ar^n, die für wachsendes n und $0 < r < 1$ gegen null strebt.



$$
\begin{aligned}
A(r) &= a(1-r)a^k + ar(1-r)(ar)^k + ar^2(1-r)(ar^2)^k + ar^3(1-r)(ar^3)^k + \dots \\
&= a^{k+1}(1-r) + a^{k+1}(1-r)r^{k+1} + a^{k+1}(1-r)r^{2(k+1)} + a^{k+1}(1-r)r^{3(k+1)} + \dots \\
&= a^{k+1}(1-r)\,\frac{1}{1-r^{k+1}} \qquad \text{unendl. geom. Reihe mit } q = r^{k+1},\ 0 < q < 1
\end{aligned}
$$

Mit der Formel $(1 - x^n) = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots x^{n-1})$ gelangt man zu

$$A(r) = a^{k+1}\,\frac{1}{1 + r + r^2 + \dots + r^k}$$

Für $r \to 1$ ergibt das

$$A = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Fermat gelang es, das Ergebnis für $y = x^k,\ k \in \mathbb{Q}$, mit der Ausnahme $k = -1$ nachzuweisen. Die Quadratur (Integration) von $y = x^{-1}$ führt zum natürlichen Logarithmus.

↑ Fermat Ergänzung

$y = x^k,\ k = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
A(r) &= a^{k+1}(1-r)\frac{1}{1-r^{k+1}} \\
A(r) &= a^{\frac{p+q}{q}}\,\frac{1-r}{1-r^{\frac{p+q}{q}}}, \qquad\qquad r = s^q \\
&= a^{\frac{p+q}{q}}\,\frac{1-s^q}{1-s^{p+q}}
\end{aligned}$$

Mit der Formel $(1-x^n) = (1-x)(1+x+x^2+\ldots x^{n-1})$ wird umgeformt:

$$A(r) = a^{\frac{p+q}{q}}\,\frac{1+s+s^2+\ldots+s^{q-1}}{1+s+s^2+\ldots+s^{p+q-1}}$$

$r \to 1$ hat $s \to 1$ zur Folge.

$$\begin{aligned}
A &= a^{\frac{p+q}{q}}\,\frac{q}{p+q} = \frac{1}{\frac{p}{q}+1}a^{\frac{p}{q}+1} \\
\int_0^a x^k\,\mathrm{d}x &= \frac{a^{k+1}}{k+1}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hatte auch Wallis 1616-1703 ohne Beweis angegeben.

GeoGebra, Bestandsfunktion, Untersumme, usw.
Startseite